L3 MAF "Algèbre 1" : TD n° 2

Exercice 1 (Cours) Dans un anneau commutatif A, démontrer la *formule du multinôme* :

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \ , \ \forall a_1,\dots,a_p \in A \ , \ \forall n \in \mathbf{N} \ , \ (a_1+\cdots+a_p)^n = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_p \geq 0 \\ k_1+\cdots+k_p=n}} \frac{n!}{k_1!\cdots k_p!} a_1^{k_1}\cdots a_p^{k_p}.$$

Exercice 2 (Cours) On appelle *ordre de nilpotence* de $a \in A$ (anneau commutatif) :

$$\nu(a) := \inf\{n \in \mathbf{N} \mid a^n = 0\}.$$

Par convention, c'est donc $+\infty$ si a n'est pas nilpotent. Montrer que $\nu(a+b) \leq \nu(a)+\nu(b)-1$.

Exercice 3 1) Soient a et b deux idempotents de l'anneau commutatif A tels que $ab = 0$ (on dit alors qu'ils sont *orthogonaux*). Montrer que $a+b$ est idempotent. Vérifier que le produit de deux idempotents quelconques est idempotent.
2) Soient a et b deux idempotents quelconques. Montrer que $a(1-b)$ et $b(1-a)$ sont des idempotents orthogonaux et que $a \star b := a+b-2ab$ est idempotent.
3) Montrer que l'ensemble des idempotents muni des lois $\star$ et . (multiplication de A) est un anneau.

Exercice 4 1) Soit A un anneau intègre fini. Montrer que c'est un corps.
2) Peut-on appliquer ce résultat à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$?

Exercice 5 (Cours) Soient A un anneau commutatif, B un sous-anneau et E une partie quelconque. Décrire le sous-anneau $B[E]$ de A engendré par $B \cup E$.

Exercice 6 1) Soit A un anneau non nécessairement commutatif. Montrer que son *centre* $Z(A) := \{a \in A \mid \forall x \in A \ , \ ax = xa\}$ en est un sous-anneau.
2) Déterminer le centre de tous les anneaux donnés en exemple dans le cours.
3) Étendre l'exercice précédent au cas d'un anneau A non commutatif, mais tel que $B \subset Z(A)$ ("sous-anneau central").

Exercice 7 Montrer que dans l'anneau $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, il n'y a aucun élément irréductible.

Exercice 8 1) Soit d un entier non carré. Si $d < 0$, on posera $\sqrt{d} := i\sqrt{-d}$. Vérifier que l'application $(a,b) \mapsto a+b\sqrt{d}$ est injective de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{C}$ et que son image est le sous-anneau $A := \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ de $\mathbf{C}$ engendré par $\sqrt{d}$.
2) Pour $z := a+b\sqrt{d} \in A$, on pose $\overline{z} := a-b\sqrt{d}$ et $N(z) := z\overline{z}$. (Attention : l'application $z \mapsto \overline{z}$ ne coïncide avec la conjugaison de $\mathbf{C}$ que si $d < 0$.) Vérifier que $z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme de l'anneau $(A,+)$.
3) Vérifier que l'application N envoie A dans $\mathbf{Z}$ et que $N(zz') = N(z)N(z')$.
4) Montrer que $z \in A$ est inversible si, et seulement si, $N(z) = \pm 1$.
5) Montrer que $p \in \mathbf{Z}$ est un élément irréductible de A si, et seulement si, p est premier dans $\mathbf{Z}$ et que ni p ni $-p$ ne sont de la forme a^2-db^2 avec $a,b \in \mathbf{Z}$.
6) On prend $d := -6$. Trouver dans A un élément irréductible non premier.

Exercice 9 1) Soit d un entier non carré tel que $d \equiv 1 \pmod 4$. On pose :

$$x := \frac{1+\sqrt{d}}{2} \text{ et } \bar{x} := \frac{1-\sqrt{d}}{2}.$$

Vérifier que l'application $(a,b) \mapsto a+bx$ est injective de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{C}$ et que son image est le sous-anneau $A := \mathbf{Z}[x]$ de $\mathbf{C}$ engendré par x.
2) Pour $z := a+bx \in A$, on pose $\bar{z} := a+b\bar{x}$ et $N(z) := z\bar{z}$. Reprendre les questions de l'exercice précédent.
3) Application : $d := -3$.

Exercice 10 (Cours) Déterminer tous les automorphismes de $\mathbf{Z}$, de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Exercice 11 1) Dans le produit d'anneaux commutatifs $\prod A_i$, déterminer les inversibles, les nilpotents, les idempotents et les diviseurs de zéro.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante d'intégrité de ce produit.

Exercice 12 1) Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On le munit de la loi définie par :

$$A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Vérifier que l'on obtient ainsi un groupe commutatif dans lequel chaque élément est son propre opposé.
2) On munit également $\mathcal{P}(E)$ de la loi définie par :

$$A.B := A \cap B.$$

Vérifier que l'on obtient ainsi un anneau commutatif. Déterminer les inversibles, les diviseurs de 0, les idempotents et les nilpotents de cet anneau et en caractériser la relation de divisibilité.
3) Pour tout $A \subset E$ on définit la fonction caractéristique χ_A de E dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\chi_A(x) = \dot{1}$ si $x \in A$, et 0 autrement. Vérifier que l'application qui associe à un élément $A \in \mathcal{P}(E)$ l'élément $\chi_A \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^E$ est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 13 1) Soit $e \neq 0,1$ un idempotent non trivial de l'anneau commutatif A. On a vu (exercice 2.3.3 du cours) que les opérations de A induisent une structure d'anneau sur le sous-ensemble $Ae := \{ae \mid a \in A\}$, mais que ce n'est pas un sous-anneau. Montrer que $a \mapsto ae$ est un morphisme surjectif d'anneaux de A sur Ae. Quel est son noyau ?
2) Soit $f := 1-e$. Vérifier que c'est un idempotent et que l'application $a \mapsto (ae, af)$ est un isomorphisme d'anneaux de A sur l'anneau produit $Ae \times Af$.

Exercice 14 On appelle *saturé* d'une partie multiplicative S de l'anneau commutatif intègre A l'ensemble $\overline{S}$ des diviseurs des éléments de S. Montrer que c'est une partie multiplicative de A, que $(S^{-1}A)^*$ est égal à $\overline{S}$ et que $\overline{S}^{-1}A = S^{-1}A$.

Exercice 15 Soit $\overline{S}$ le saturé de la partie multiplicative S de l'anneau commutatif A. Vérifier que le morphisme canonique de $S^{-1}A$ dans $\overline{S}^{-1}A$ est un isomorphisme.

Exercice 16 1) Soient A, B deux anneaux commutatifs, $S \subset A$ et $T \subset B$ des parties multiplicatives et $f : A \to B$ un morphisme tel que $f(S) \subset T$. Définir un morphisme $S^{-1}A \to T^{-1}B$ et énoncer sa propriété caractéristique.
2) Appliquer au cas de deux anneaux intègres et de leurs corps des fractions.