# L3 MAF “Algèbre 1” : TD n° 3

**Exercice 1 (Cours)** Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et $I$ un idéal de $A$ et $J$ un idéal de $B$.
1) Le sous-groupe $f(I)$ de $B$ est-il nécessairement un idéal ? Que dire si $f$ est supposé surjectif ?
2) On suppose que $f(I) \subset J$. Montrer que $f$ passe au quotient en un morphisme $\overline{f} : A/I \to B/J$.
3) Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de $A$ et que $A/f^{-1}(J)$ est isomorphe à un sous-anneau de $B/J$.

**Exercice 2 (Cours)** 1) Décrire les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $m$ pour que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ soit intègre, resp. un corps.
2) Mêmes questions concernant $K[X]/(P)$.

**Exercice 3** 1) On note ici $A$ l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}] := \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ des entiers de Gauß. Montrer que son corps des fractions est le sous-corps $K := \mathbf{Q}[\mathrm{i}] := \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ de $\mathbf{C}$.
2) Montrer que, pour tout $w \in K$, il existe $z \in A$ tel que $|z - w| < 1$.
3) Pour tout $z = a + b\mathrm{i} \in A$, on note $N(z) := a^2 + b^2$. Montrer que, quels que soient $z, z' \in A$, $z \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que $z' = qz + r$ et $N(r) < N(z)$. Y a-t-il unicité de cette “division euclidienne” ?
4) Soit $I$ un idéal non trivial de $A$. Montrer qu'il existe un élément $x$ de $I$ tel que $N(x)$ soit minimum non nul. Déduire de la question 3 que $x$ engendre $I$.
On a donc montré que l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ des entiers de Gauß est *principal*, autrement dit, que tout idéal de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ est principal.

**Exercice 4** Dans l'anneau $K[X,Y]/ < X(1 - YX) >$, on note $x$ la classe de $X$ et $y$ la classe de $Y$. Montrer que chacun des éléments $x$ et $yx$ divise l'autre mais qu'ils ne sont pas associés.

**Exercice 5** On dit qu'un idéal $I$ d'un anneau commutatif $A$ est *de type fini* s'il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $I =< x_1, \ldots, x_n >$. Montrer que la somme et le produit de deux idéaux de type fini sont des idéaux de type fini.

**Exercice 6** Soit $(I_k)$ une suite croissante d'idéaux. On suppose que l'idéal $\bigcup I_k$ est de type fini. Montrer que la suite est stationnaire.

**Exercice 7** 1) Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que tout élément $g$ de $< f_1, \ldots, f_n >$ vérifie $g = O(|f_1| + \cdots + |f_n|)$ au voisinage de 0. En déduire que l'idéal $I := \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(0) = 0\}$ n'est pas de type fini. (Si $f_1, \ldots, f_n \in I$, la fonction $f := \sqrt{|f_1| + \cdots + |f_n|}$ appartient à $I$ mais pas à $< f_1, \ldots, f_n >$.)
2) Dans l'anneau $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, l'idéal $I$ des fonctions nulles en 0 Montrer que $I^2 = I$. (Toute fonction $f \in I$ s'écrit $f = gh$ où $g := \sqrt{|f|}$ et $h := \mathrm{sgn}(f)g$.)

**Exercice 8** On dit qu'un anneau est *local* s'il admet un unique idéal maximal. Montrer que cette condition est équivalente à la suivante : la somme de deux éléments non inversibles est un élément non inversible. Dans ce cas, l'idéal maximal est l'ensemble de tous les éléments non inversibles.

**Exercice 9** Montrer que les idéaux de $\mathbf{Z}_{(p)} := S^{-1}\mathbf{Z}$ , où $S := \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$, sont 0 et les $(p^n)$, $n \in \mathbf{N}$. Montrer que cet anneau est principal et local.

**Exercice 10** 1) Soit $X$ un espace topologique compact. Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ (resp. de $\mathcal{C}(X,\mathbf{C})$) sont les idéaux de la forme $\{f \mid f(a)=0\}$, où $a \in X$.
2) Montrer que ce n'est pas vrai dans $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$).

**Exercice 11** 1) Démontrer que tout idéal premier contient un idéal premier minimal.
2) En déduire que le radical est l'intersection des idéaux premiers minimaux.

**Exercice 12** 1) On note $\mathrm{Spec}(A)$ (*spectre* de $A$) l'ensemble des idéaux premiers de $A$. A quelle condition $\mathrm{Spec}(A)$ est-il vide ?
2) Pour tout idéal $I$ de $A$, on note $V(I) := \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{P}\}$. A quelle condition a-t-on $V(I)=\emptyset$, resp. $V(I)=\mathrm{Spec}(A)$ ?
3) Montrer que $V(IJ)=V(I\cap J)=V(I)\cup V(J)$ et que $V(\sum I_i)=\bigcap V(I_i)$. En déduire que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathrm{Spec}(A)$.
4) Quels sont les points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ ? La topologie est-elle séparée ?
5) Montrer que, si $A$ est intègre, l'élément $(0)$ de $\mathrm{Spec}(A)$ est dense (il appartient à tous les ouverts non vides).
6) Montrer que, si $x,y \in \mathrm{Spec}(A)$ sont distincts, il existe un ouvert contenant l'un et pas l'autre.
7) Montrer que l'adhérence de $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ est le fermé $V(I)$ où $I = \bigcap\limits_{\mathfrak{P}\in X} \mathfrak{P}$.
8) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'application $f^* : \mathfrak{Q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{Q})$ de $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ est continue.
9) Dans le cas où $B=A/I$ et où $f$ est le morphisme canonique, montrer que $f^*$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(B)$ sur le fermé $V(I)$.
10) Dans le cas où $B=S^{-1}A$, avec $S=\{a^n \mid n\in\mathbf{N}\}$ pour un certain $a\in A$, et où $f$ est le morphisme canonique, montrer que $f^*$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(B)$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(A)\setminus V(Aa)$.

**Exercice 13** Un *idéal à gauche* de l'anneau $A$ (non nécessairement commutatif) est un sous-groupe $I$ de $(A,+)$ tel que :

$$\forall a \in A\ ,\ \forall x \in I\ ,\ ax \in I.$$

Montrer que, pour tout $x \in A$, l'ensemble $Ax := \{ax \mid a \in A\}$ est un idéal à gauche. A quelle condition est-il trivial ? A quelle condition est-il égal à $A$ ?

**Exercice 14** 1) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux (non nécessairement commutatifs). Montrer que le noyau de $f$ est un *idéal bilatère* de $A$, autrement dit, un sous-groupe de $(A,+)$ tel que :

$$\forall a \in A\ ,\ \forall x \in I\ ,\ ax \in I \text{ et } xa \in I.$$

2) Montrer que les seuls idéaux bilatères de l'anneau $M_n(K)$ des matrices carrées de taille $n$ sur le corps commutatif $K$ sont l'idéal trivial et l'anneau tout entier. Donner des exemples d'idéaux à gauche de $M_2(\mathbf{R})$ qui ne soient ni triviaux ni égaux à l'anneau tout entier.

**Exercice 15** On dit que la relation d'équivalence $a \sim b$ dans l'anneau $A$ (non nécessairement commutatif) est *compatible avec les lois de l'anneau* si :

$$\forall a,b,a',b' \in A\ ,\ (a\sim a' \text{ et } b\sim b') \Longrightarrow (a+b\sim a'+b' \text{ et } ab\sim a'b').$$

1) Montrer qu'alors $I := \{x \in A \mid a \sim 0\}$ est un idéal bilatère de $A$ et que $a \sim a' \Leftrightarrow a'-a \in I$.
2) Montrer qu'il existe une unique multiplication sur le groupe quotient $A/I$ qui en fasse un anneau et telle que le morphisme de groupes canonique $A \to A/I$ soit un morphisme d'anneaux.