Exercice 1 On dit qu'un anneau est *noetherien* si tout idéal est de type fini. Montrer que dans un tel anneau, toute suite croissante d'idéaux est stationnaire. (Généraliser l'argument du lemme 5.2.8.) Prouver la réciproque. (Si I n'est pas de type fini, choisir $x_0 \in I$ puis $x_1 \in I \setminus Ax_0$, etc.)

Exercice 2 1) On dit que A est *de Bézout* si, quels que soient $x, y \in A$, l'idéal $Ax + Ay$ est principal. Montrer que cette propriété équivaut à la suivante : tout idéal de type fini est principal.
2) Montrer que, dans un anneau noetherien de Bézout, tout idéal est principal, et réciproquement.
3) Donner un exemple d'anneau noetherien de Bézout non principal.

Exercice 3 1) Soit A l'anneau des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f, g \in A$ sont premiers entre eux (autrement dit, $\mathrm{Div}(f) \cap \mathrm{Div}(g) = A^*$) si, et seulement s'ils n'ont pas de zéro commun. Montrer que, dans ce cas, $Af + Ag = A$.
2) Montrer que l'anneau A ne contient aucun élément irréductible et aucun élément premier.
3) Montrer que l'ensemble des fonctions $f \in A$ telles que $f(0) = 0$ est un idéal non principal de A.

Exercice 4 Dans un anneau factoriel, les idéaux premiers non nuls minimaux sont principaux.

Exercice 5 Soit g un stathme euclidien sur l'anneau A. Montrer les équivalences suivantes :

$$g(x) \text{ minimum } \iff x \text{ inversible}, \qquad \big(g(x) = g(y) \text{ et } x|y\big) \iff x \sim y.$$

Exercice 6 Soit $A := \mathbf{Z}[j]$ avec $j := \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot$ Montrer que A est euclidien et effectuer la division euclidienne de 5 par $1+\sqrt{-3}$.

Exercice 7 Montrer à l'aide de la "norme" $N(z) := z\bar{z}$ que, dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$, tout élement non nul et non inversible est produit d'irréductibles mais que cet anneau n'est pas factoriel.

Exercice 8 1) Soit $d \in \mathbf{Q}$ un rationnel non carré. Si $d < 0$, on convient que $\sqrt{d} := \mathrm{i}\sqrt{|d|}$. Montrer que $K := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$, et que c'est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de base $(1, \sqrt{d})$. On le notera $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.
2) Montrer qu'il existe un unique $d' \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}$ quadratfrei (c'est à dire sans facteur carré > 1) tel que $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d'})$. Dorénavant, on supposera $d \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}$ et quadratfrei.
3) Montrer que l'application $a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$ est un automorphisme du corps K.
4) Pour tout $u \in K$, vérifier que l'application $x \mapsto ux$ est un endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel K et calculer sa trace et son déterminant. La trace sera notée $\mathrm{Tr}(u)$ et appelée *trace de u* ; le déterminant sera noté $N(u)$ et appelé *norme de u*. Vérifier que $\mathrm{Tr}(u) = u + \sigma(u)$ et $N(u) = u\sigma(u)$.
5) On dit que $x \in K$ est *entier sur* $\mathbf{Z}$, ou encore que c'est un *entier algébrique*, si $\mathrm{Tr}(x) \in \mathbf{Z}$ et $N(x) \in \mathbf{Z}$. Montrer que l'ensemble A des entiers algébriques de K est égal à :

$$A = \{a + b\delta \mid a, b \in \mathbf{Z}\}, \quad \text{avec } \delta := \begin{cases} \sqrt{d} \text{ si } d \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod 4, \\ \dfrac{-1+\sqrt{d}}{2} \text{ si } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

et que c'est un sous-anneau de K dont K est le corps des fractions.
6) Montrer que $A^* = \{u \in A \mid N(u) = \pm 1\}$.
7) Montrer que, si $d \in \{-1, 2, -2, 3, -3-7, -11\}$, alors N est un stathme euclidien sur A.