Exercice 1 Soient A un anneau intègre et S une partie multiplicative de A. Montrer que $(S^{-1}A)[X]$ et $S^{-1}(A[X])$ sont isomorphes. On donnera un sens précis à la deuxième notation.

Exercice 2 1) Quels sont les facteurs irréductibles de X^4-1, de X^4+1, de X^4+X^2+1 dans $\mathbf{Z}[X]$, dans $\mathbf{Q}[X]$, dans $\mathbf{R}[X]$, dans $\mathbf{C}[X]$?
2) Soit $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que X^4+aX^2-1 est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 3 Montrer que le polynôme $1+aX$ est inversible dans $A[X]$ si, et seulement si, a est nilpotent. Si $1+aX$ n'est pas inversible et si $\mathfrak{M}$ un idéal maximal qui ne le contient pas (pourquoi en existe-t'il ?), montrer que $\mathfrak{P} := A \cap \mathfrak{M}$ est un idéal premier de A qui ne contient pas a. En déduire une nouvelle preuve du fait que le nilradical est l'intersection des idéaux premiers.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbf{Q}$. Quel est le noyau du morphisme $P \mapsto P(x)$ de $\mathbf{Z}[X]$ dans $\mathbf{Q}$?

Exercice 5 Pour que l'anneau $A[X]$ soit principal, il faut, et il suffit, que A soit un corps. À quelle condition $A[X]$ est-il un corps ?

Exercice 6 Soit A un anneau factoriel et soit $a \in A$. L'anneau $A[X]/ < X^2-a >$ est-il intègre ? Intégralement clos ? Factoriel ?

Exercice 7 1) Soient A un anneau factoriel et $p \in A$ un irréductible. Soit $P = a_0X^n + \cdots + a_n \in A[X]$ tel que $p \not| a_0, p|a_1, \ldots, p|a_n$ et $p^2 \not| a_n$. Démontrer que P est irréductible (critère d'Eisenstein).
2) Soit $p \in \mathbf{N}$ un nombre premier. Démontrer que le polynôme $P := X^{p-1} + \cdots + 1$ est irréductible. (Appliquer le critère d'Eisenstein au polynôme $P(X+1)$.)

Exercice 8 Soient A un anneau factoriel de corps des fractions K et $F, G \in K[X]$ unitaires tels que $FG \in A[X]$. Démontrer que $F, G \in A[X]$.

Exercice 9 1) Soit v une valuation discrète sur le corps commutatif K, autrement dit, une application de K dans $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ telle que : $v^{-1}(+\infty) = \{0\}$; $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$; et $v(ab) = v(a) + v(b)$. Montrer que $v^{-1}(\mathbf{N} \cup \{+\infty\})$ est un anneau de valuation discrète, autrement dit un anneau local (*cf.* l'exercice 3.6.8 du chapitre 3) principal qui n'est pas un corps.
2) Soient A un anneau de valuation discrète et p un générateur de son idéal principal. On note : $v_p(a) := \sup\{m \in \mathbf{N} \mid p^m|a\}$. Montrer que v_p s'étend en une valuation discrète sur le corps des fractions de A, telle que $A = v^{-1}(\mathbf{N} \cup \{+\infty\})$. Vérifier que cette construction est la réciproque de la construction précédente. Montrer que tout idéal non nul I de A est engendré par p^m, où $m := \min v_p(I)$.

Exercice 10 1) Dans l'anneau $A := \mathbf{Z}[X]/ < 2(X^2-1) >$, on note $\dot{2}$ la classe de 2 et x la classe de X. Vérifier que les éléments $\dot{2}$ et $y := \dot{2}x$ engendrent le même idéal. Vérifier que, si $y = \dot{2}x'$, alors $x' = x + (x^2-1)u$ pour un certain $u \in A$.
2) Notons $U(X) \in \mathbf{Z}[X]$ un antécédent de u et $X' = X + (X^2-1)U(X)$, qui est donc un antécédent de x' dans $\mathbf{Z}[X]$. Montrer que l'image de X' par la surjection canonique $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{F}_2[X]$ est égale à l'image de x' par la surjection canonique $A \to \mathbf{Z}[X]/ < 2 >$, modulo l'identification naturelle de $\mathbf{Z}[X]/ < 2 >$ avec $\mathbf{F}_2[X]$. En déduire que, si x' est inversible dans A, alors l'image $X + (X^2-1)\overline{U}$ de X' dans $\mathbf{F}_2[X]$ est inversible. Vérifier que c'est impossible.
3) Les éléments $\dot{2}$ et y sont-ils associés ?