Chapitre 2

Conditions de finitude

2.1 Diagrammes et suites exactes

Nous allons introduire un formalisme graphique très commode. Il est possible d'en donner des définitions totalement formelles, mais nous nous en abstiendrons. Voici trois *diagrammes* typiques :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ N_1 \arrow[rr, "g"'] & & N_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\phi"] & N \arrow[d, "v"] \\ M' \arrow[r, "f'"'] & N' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans le premier, M, N_1, N_2 désignent par exemple des modules et f_1, f_2, g des morphismes. On dit que le diagramme est *commutatif* (ou qu'il *commute*) si tous les chemins possibles d'un sommet du diagramme à un autre définissent, par composition des flèches rencontrées, le même morphisme. Dans le premier diagramme, cela équivaut à $f_2 = g \circ f_1$. Noter que cette convention garde un sens dans n'importe quelle catégorie. Le deuxième diagramme est donc commutatif si $f' \circ u = \phi = v \circ f$.

Le troisième diagramme illustre la "propriété universelle" du passage au quotient pour des groupes : le morphisme canonique $p : G \to G/H$ est tel que pour tout morphisme $f : G \to G'$ tel que $H \subset \mathrm{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/H \to G'$ qui rende le diagramme commutatif (autrement dit, f se factorise à travers G/H). Le morphisme $\overline{f}$ est représenté par une flèche en pointillés parce qu'il n'est pas là au départ.

Noter qu'interprétée strictement, notre définition implique que deux flèches ayant même source et même but sont égales ; et qu'une flèche dont la source et le but sont les mêmes est l'identité. Nous exclurons donc toujours ces cas inutiles.

Isomorphismes de diagrammes. Soient deux diagrammes ayant "même structure" : le premier a des sommets M_i, $i \in I$ et des flèches $f_{i,j} : M_i \to M_j$, $(i, j) \in J$ où $J \subset I \times I$; et le second a des sommets M'_i, $i \in I$ et des flèches $f'_{i,j} : M'_i \to M'_j$, $(i, j) \in J$ (mêmes ensembles d'indices I et J). On dit que ces diagrammes sont *isomorphes* s'il existe des isomorphismes $u_i : M_i \to M'_i$

rendant commutatives toutes les "faces" $\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{u_i} & M'_i \\ {\scriptstyle f_{i,j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'_{i,j}} \\ M_j & \xrightarrow[u_j]{} & M'_j \end{array}$. Par exemple, un isomorphisme entre diagrammes du premier type ci-dessus ressemblerait à un prisme.

Exercice 2.1.1 Si deux diagrammes sont isomorphes, l'un commute si et seulement si l'autre commute.

Définition 2.1.2 Une *suite exacte* de A-modules est un diagramme de la forme :

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n$$

tel que $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Si l'on a, dans un tel diagramme, une égalité isolée $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$, on dit que la suite est *exacte en M_i*.

Exemples 2.1.3
1. La suite $0 \to M' \to M$ est exacte si, et seulement si, le morphisme $M' \to M$ est injectif.
2. La suite $M \to M'' \to 0$ est exacte si, et seulement si, le morphisme $M \to M''$ est surjectif.
3. Soit N un sous-module de M. Les morphismes canoniques i, p permettent de définir une suite exacte :
$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0.$$

Théorème 2.1.4 *Toute suite exacte* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *est isomorphe à une suite exacte*

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0.$$

Preuve. - On veut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales soient des isomorphismes.
On pose $N := \mathrm{Im} f$. Comme f est injectif, il induit (par "corestriction") un isomorphisme $u : M' \to N$. Prenant $v := \mathrm{Id}_M$, on obtient le diagramme commutatif partiel :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant. □

Lemme 2.1.5 *Soit un diagramme commutatif de suites exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u'"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "u"] & M''_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_2 \arrow[r, "f_2"'] & M_2 \arrow[r, "g_2"'] & M''_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(i) Il existe un unique $u'' : M''_1 \to M''_2$ qui rende le diagramme complet commutatif.
(ii) Si u est injectif et u' surjectif, alors u'' est injectif.
(iii) Si u est surjectif, alors u'' est surjectif.

Preuve. - (i) Soit $x''_1 \in M''_1$. Soient $x, y \in M_1$ des antécédents de x''_1 par g_1 ; alors $y - x \in \operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Im} f_1$ et l'on peut écrire $y = x + f_1(x')$, $x' \in M'_1$. On a :

$$g_2(y) - g_2(x) = g_2 \circ u(x + f_1(x')) - g_2 \circ u(x) = g_2 \circ u \circ f_1(x') = g_2 \circ f_2 \circ u'(x') = 0, \text{ car } g_2 \circ f_2 = 0,$$

de sorte que l'élément $g_2 \circ u(x)$ ne dépend pas de l'antécédent particulier choisi de x'' mais seulement de x'' : on peut donc poser $u''(x'') := g_2 \circ u(x)$. La relation $u'' \circ g_1 = g_2 \circ u$ est vraie par construction, le diagramme obtenu est donc bien commutatif. Il reste à vérifier que u'' est bien un morphisme. Or on sait que $u'' \circ g_1$ l'est, et que g_1 est un morphisme surjectif. C'est alors un exercice facile d'en déduire la linéarité de u'' (voir l'exercice 1.5.6).
(ii) Soit $x'' \in M''_1$ tel que $u''(x'') = 0$. Puisque g_1 est surjectif, écrivons $x'' = g_1(x)$, $x \in M_1$. On a :

$$0 = u''(x'') = u'' \circ g_1(x) = g_2 \circ u(x) \underset{\text{exactitude en } M_2}{\Longrightarrow} u(x) = f_2(y') \underset{\text{surjectivité de } u'}{\Longrightarrow}$$

$$u(x) = f_2 \circ u'(x') = u \circ f_1(x') \underset{\text{injectivité de } u}{\Longrightarrow} x = f_1(x') \underset{\text{exactitude en } M_1}{\Longrightarrow} x'' = g_1(x) = g_1 \circ f_1(x') = 0.$$

(iii) Si u est surjectif, comme g_2 l'est, $g_2 \circ u = u'' \circ g_1$ l'est aussi et il est immédiat que cela entraîne la surjectivité de u''. □

Suites exactes scindées. On dit que la suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est *scindée* si M admet deux sous-modules M_1, M_2 dont il est somme directe : $M = M_1 \oplus M_2$, tels que f réalise un isomorphisme de M' avec M_1 et g induise un isomorphisme de M_2 avec M''. Toute suite exacte scindée est donc (exercice 1.5.11) isomorphe à une suite de la forme :

$$0 \to N \to N \times P \to P \to 0$$

définie avec les morphismes $x \mapsto (x, 0)$ et $(x, y) \mapsto y$. On voit alors qu'il existe :
- Un morphisme $r : M \to M'$ tel que $r \circ f = \mathrm{Id}_{M'}$ (on dit que r est une *rétraction* de f) : prendre pour r la réciproque de l'isomorphisme de M' avec M_1 déduit de f.
- Un morphisme $s : M'' \to M$ tel que $g \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$ (on dit alors que s est une *section* de g) : prendre pour s la réciproque de l'isomorphisme de M_2 avec M'' déduit de g.

D'après l'exercice 2.5.2, l'existence d'une rétraction ou d'une section prouve réciproquement que la suite est scindée.

Exercice 2.1.6 Montrer que si A est un corps, toute suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est scindée.

2.2 Modules de type fini

Définition 2.2.1 Le A-module M est dit *de type fini* s'il admet un système générateur fini, autrement dit, s'il existe $x_1, \ldots, x_n \in M$ tels que $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$.

Lorsque A est un corps, on sait que cela revient à dire que M est un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas, tout sous-espace vectoriel est de dimension finie. Cette propriété tombe en défaut dans le cas général, et c'est cette anomalie qui est à l'origine de la théorie exposée dans ce chapitre.

Exemple 2.2.2 Le A-module A est évidemment de type fini (puisque monogène). Cependant ses sous-modules, c'est-à-dire ses idéaux, ne le sont pas nécessairement. Prenons $A := \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (anneau des fonctions continues). L'idéal I des fonctions nulles en 0 n'est pas de type fini. En effet, quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_n \in I$, la fonction $g := \sqrt{h}$, où $h := |f_1| + \cdots + |f_n|$, est dans I mais pas dans $J := Af_1 + \cdots + Af_n$ (car toutes les fonctions de J sont des $O(g)$ u voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas de g). L'idéal I n'est donc pas de type fini.

Il apparaitra à la section suivante que le fait que les idéaux soient de type fini est le critère décisif.

Proposition 2.2.3 *Soit* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *une suite exacte de* A*-modules.*
(i) Si M *est de type fini,* M'' *l'est également.*
(ii) Si M' *et* M'' *sont de type fini,* M *l'est également.*

Preuve. - (i) Si $x_1, \ldots, x_n$ engendrent M, alors, g étant surjectif, $g(x_1), \ldots, g(x_n)$ engendrent M''.
(ii) Soient $x'_1, \ldots, x'_m$ des générateurs de M' et $x''_1, \ldots, x''_p$ des générateurs de M''. Soient $x_i := f(x'_i) \in M$, $i = 1, \ldots, m$ et $y_j \in M$ des antécédents des x''_j, $j = 1, \ldots, p$. Nous allons montrer que $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p$ engendrent M. Soit en effet $x \in M$. Alors $g(x) \in M''$ est combinaison linéaire des x''_j :

$$g(x) = b_1x''_1 + \cdots + b_px''_p = g(b_1y_1 + \cdots + b_py_p) \Longrightarrow x - (b_1y_1 + \cdots + b_py_p) \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f.$$

On écrit donc :

$$x - (b_1y_1 + \cdots + b_py_p) = f(x') = f(a_1x'_1 + \cdots + a_mx'_m) = a_1f(x'_1) + \cdots + a_mf(x'_m) = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$$
$$\Longrightarrow x = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + b_1y_1 + \cdots + b_py_p.$$

□

Soit M un module de type fini et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système générateur fini de M. On en déduit un morphisme surjectif $A^n \to M$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ et une suite exacte :

$$0 \to R \to A^n \to M \to 0.$$

Les éléments de R sont les $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tels que $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$: on dit que R est le *module des relations des* x_i. (Réciproquement, tout module M qui apparaît dans une telle suite exacte est de type fini.)

Exercice 2.2.4 On dit que M est *de présentation finie* s'il admet un système générateur fini dont le module des relations est lui-même de type fini. Montrer que cela équivaut à l'existence d'une suite exacte $A^p \to A^n \to M \to 0$.

2.3 Modules noetheriens

Proposition 2.3.1 *Soit M un A-module. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire.
(i') Toute famille non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.
(ii) Tout sous-module de M est de type fini.

Preuve. - L'équivalence de (i) est (i') n'a rien à voir avec l'algèbre, c'est une propriété générale (et facile à démontrer) des ensembles ordonnés (exercice 2.5.5).
Supposons (i) vérifiée et soit M' un sous-module de M ; on veut prouver que M' est de type fini. Si $M' = \{0\}$, c'est terminé. Sinon, soit $x_1 \in M'$ non nul. Si $M' = Ax_1$, c'est terminé. Sinon, soit $x_2 \in M' \setminus Ax_1$. Si $M' = Ax_1 + Ax_2$, c'est terminé, etc. La suite $\{0\} \subset Ax_1 \subset Ax_1 + Ax_2 \subset \cdots$ est une suite strictement croissante de sous-modules, donc une suite finie : on a donc $M' = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ pour un certain n.
Supposons (ii) vérifiée et soit $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-modules de M. On vérifie alors facilement que $M' := \bigcup M_i$ est un sous-module de M. (Bien entendu, cela ne marcherait pas avec une suite quelconque de sous-modules.) Le sous-module M' est de type fini par l'hypothèse (ii) : on peut donc écrire $M' = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. Puisque $x_1, \ldots, x_n \in \bigcup M_i$, on a $x_1 \in M_{i_1}, \ldots, x_n \in M_{i_n}$. Soit $k := \max(i_1, \ldots, i_n)$. Alors $x_1, \ldots, x_n \in M_k$, donc $M' \subset M_k$, donc la suite stationne en M_k. $\square$

Définition 2.3.2 On dit que M est un module *noetherien* s'il vérifie ces propriétés.

Théorème 2.3.3 *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Alors, pour que M soit noetherien, il faut, et il suffit, que M' et M'' le soient.*

Preuve. - On peut aussi bien supposer que M' est un sous-module de M et que $M'' = M/M'$. Notons $p : M \to M''$ la projection canonique.
Supposons M noetherien. Tout sous-module de M' est un sous-module de M, donc il est de type fini. Tout sous-module de M'' est l'image par g d'un sous-module de M (son image réciproque par p), donc il est de type fini.
Supposons M' et M'' noetheriens. Soit $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-modules de M. Soient $M'_i := M_i \cap M'$ et $M''_i := p(M_i)$. La suite (M'_i) de sous-modules de M' est croissante, donc stationnaire en un indice n'. La suite (M''_i) de sous-modules de M'' est croissante, donc stationnaire en un indice n''. Si l'on pose $n := \max(n', n'')$, on a donc :

$$\forall m \geq n \ , \ (M_n \subset M_m) \wedge (M_n \cap M' = M_m \cap M') \wedge ((p(M_n) = p(M_m)),$$

d'où l'on tire l'égalité $M_n = M_m$ d'après l'exercice 1.5.4. La suite (M_i) est donc stationnaire. $\square$

Corollaire 2.3.4 *L'image d'un module noetherien par un morphisme est un module noetherien.*

Preuve. - Utiliser la suite exacte $0 \to M' \cap \mathrm{Ker} f \to M' \to f(M') \to 0$. $\square$

Corollaire 2.3.5 *Si M_1 et M_2 sont deux modules noetheriens. Alors $M_1 \times M_2$ est noetherien.*

Preuve. - Utiliser la suite exacte scindée $0 \to M_1 \to M_1 \times M_2 \to M_2 \to 0$. $\square$

Corollaire 2.3.6 *La somme de deux sous-modules noetheriens est un sous-module noetherien.*

Preuve. - $M_1 + M_2$ est l'image de l'application linéaire $M_1 \times M_2 \to M$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. $\square$

2.4 Anneaux noetheriens

Définition 2.4.1 L'anneau A est dit *noetherien* si c'est un A-module noetherien. De manière équivalente : tout idéal de A est de type fini. De manière encore équivalente : toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.

Le but de la théorie est l'étude des anneaux dans lesquels tout idéal est de type fini (résultats de Hilbert sur la théorie des invariants, théorie algébrique des nombres, géométrie algébrique ...) et la notion de module noetherien a été dégagée dans ce but : c'est un exemple du long processus de linéarisation de l'algèbre (et même d'une bonne partie de l'analyse et de la géométrie) au XXème siècle.

Exemples 2.4.2 Tout corps, tout anneau principal, tout anneau fini, sont des anneaux noetheriens. Si A est noetherien, tout anneau quotient A/I et tout anneau de fractions $S^{-1}A$ sont noetheriens.

Théorème 2.4.3 *Soit A un anneau noetherien. Alors tout A-module de type fini est noetherien.*

Preuve. - Si M est de type fini, il existe un morphisme surjectif $A^n \to M$ et l'on peut appliquer les résultats de la section 2.3. $\square$

Corollaire 2.4.4 *Sur un anneau noetherien, tout module de type fini est de présentation finie.*

Théorème 2.4.5 *Soit A un anneau noetherien. Alors l'anneau $A[X]$ est noetherien.*

Preuve. - Soit I un idéal de $A[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n := \{\mathrm{cd}(P) \mid P \in I\} = \{a \in A \mid \exists aX^n + \cdots \in I\}.$$

Dans la deuxième écriture, "$\cdots$" signifie "termes de degré inférieur". On vérifie facilement (exercice laissé au lecteur) que les I_n forment une suite croissante d'idéaux de A. Cette suite stationne donc en un indice p, *i.e.* $I_p = I_{p+1} = \cdots$. Pour chaque $k = 0, \ldots, p$, on introduit un système générateur fini $a_{k,1}, \ldots, a_{k,n_k}$ de I_k. Il existe donc pour $k = 0, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, n_k$, des polynômes $P_{k,l} \in I$ tels que $\mathrm{cd}(P_{k,l}) = a_{k,l}$. Nous allons prouver que les $P_{k,l}$ engendrent l'idéal I, qui sera donc bien de type fini. Soit donc $P = aX^d + \cdots \in I$ On distingue deux cas :
$\underline{d > p}$: on a donc $a \in I_d = I_p$. On écrit $a = \lambda_1 a_{p,1} + \cdots + \lambda_{n_p} a_{p,n_p}$. Le polynôme $Q := P - X^{d-p}(\lambda_1 P_{p,1} + \cdots + \lambda_{n_p} P_{p,n_p})$ est tel que $\deg Q < \deg P$ et que $P \equiv Q \pmod J$, où J désigne l'idéal engendré par les $P_{k,l}$. On recommence le processus avec Q jusqu'à arriver au deuxième cas.
$\underline{d \leq p}$: on a donc $a \in I_d$. On écrit $a = \lambda_1 a_{d,1} + \cdots + \lambda_{n_d} a_{d,n_d}$. Le polynôme $Q := P - (\lambda_1 P_{d,1} + \cdots + \lambda_{n_d} P_{d,n_d})$ est tel que $\deg Q < \deg P$ et que $P \equiv Q \pmod J$. On recommence le processus avec Q jusqu'à arriver au polynôme nul. $\square$

Remarque 2.4.6 La théorie des bases de Gröbner fournit des algorithmes efficaces pour ce genre de "division euclidienne par une famille de polynômes" (voir RW3 et sa bibliographie).

Corollaire 2.4.7 *(i) L'anneau $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est noetherien.*
*(ii) Si K est un corps, l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$ est noetherien (*théorème de la base *de Hilbert).*

Corollaire 2.4.8 *Soit A un sous-anneau noetherien d'un anneau B et soit A' le sous-anneau de B engendré par A et des éléments $b_1, \ldots, b_n \in B$. Alors A' est un anneau noetherien.*

Preuve. - Il y a un morphisme d'anneaux surjectif $A[X_1, \ldots, X_n] \to A'$. $\square$

2.5 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.5.1 On suppose les suites $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ et $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ isomorphes. Démontrer rigoureusement que, si l'une est exacte, l'autre l'est également.

Exercice 2.5.2 (i) Si, dans la suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, le morphisme f admet une rétraction, alors la suite est scindée. Même conclusion si le morphisme g admet une section.
(ii) Montrer que tout morphisme surjectif $M \to L$, L étant libre, admet une section.

Exercice 2.5.3 1) On se donne deux morphismes $f : L \to E$ et $g : F \to E$. On suppose L libre et g surjectif. Définir un morphisme $u : L \to F$ tel que $f = g \circ u$. (Si (e_i) est une base de L, il suffit de prescrire les $u(e_i)$).
2) On se donne deux morphismes $f : L \to M$ et $g : F \to E$. On suppose L libre et g surjectif. Pour tout $v : M \to E$, définir un morphisme $u : L \to M$ tel que $v \circ f = g \circ u$. Vérifier que $u\big(\mathrm{Ker} f\big) \subset \mathrm{Ker} g$.

Exercice 2.5.4 1) On se donne deux suites exactes : $L_2 \xrightarrow{f_2} L_1 \xrightarrow{f_1} E \to 0$ et $E_2 \xrightarrow{g_2} E_1 \xrightarrow{g_1} E \to 0$. On suppose L_1 et L_2 libres de rang fini. Construire successivement $u_1 : L_1 \to E_1$ et $u_2 : L_2 \to E_2$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"] & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"] & 0 \arrow[d] \\
E_2 \arrow[r, "g_2"] & E_1 \arrow[r, "g_1"] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(Appliquer deux fois l'exercice précédent.)
2) Montrer que $E_1 = \mathrm{Im} u_1 + \mathrm{Im} g_2$, et en déduire un morphisme surjectif $\mathrm{Im} g_2 \to E_1/\mathrm{Im} u_1$, dont le noyau est $\mathrm{Im} g_2 \cap \mathrm{Im} u_1$. (Si $x \in E_1$, écrire $g_1(x)$ sous la forme $f_1(y)$ et en déduire que $x - u_1(y) \in \mathrm{Ker} g_1 = \mathrm{Im} g_2$.)
3) Calculer le noyau du morphisme composé $E_2 \to E_1/\mathrm{Im} u_1$. (Par une démarche analogue (« diagram chasing », ou « chasse au lion ») on trouve $\mathrm{Ker} g_2 + \mathrm{Im} u_2$.)
4) On suppose g_2 injectif et E_1 de type fini. Démontrer que E_2 est de type fini.
5) Déduire de ce qui précède que, si E est de présentation finie, le module des relations de *tout* système générateur fini est de type fini.

Exercice 2.5.5 Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (i) toute suite croissante de E est stationnaire ; (ii) toute partie non vide de E admet un élément maximal. Un tel ensemble ordonné est dit *noetherien*.

Exercice 2.5.6 On dit qu'un module est *artinien* si toute suite décroissante de sous-modules est stationnaire ; de manière équivalente : toute famille non vide de sous-module admet un élément minimal. On dit qu'un anneau est artinien s'il l'est en tant que module sur lui-même [1] .
1) Donner un exemple d'anneau noetherien non artinien.
2) Soient p un nombre premier et $\mathbf{Z}[1/p] := \bigcup_{n \geq 0} p^{-n}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Vérifier que les sous-modules propres du $\mathbf{Z}$-module $M := \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$ sont les $p^{-n}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ et en déduire que M est artinien non noetherien.
3) Dans une suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, montrer que M est artinien si, et seulement si,

1. On peut démontrer que tout anneau artinien est noetherien, mais ce n'est pas très facile.

M' et M'' le sont. (Même méthode que pour la noetherianité.)
4) Montrer qu'un module est de longueur finie si, et seulement s'il est artinien et noetherien.

Exercice 2.5.7 1) Démontrer que tout anneau artinien intègre est un corps. (Pour $x \in A$ non nul, considérer la suite des idéaux Ax^n).
2) En déduire que, dans un anneau artinien, tout idéal premier est maximal.

Exercice 2.5.8 Démontrer que toute algèbre de dimension finie sur un corps est un anneau noetherien et artinien.

Exercice 2.5.9 1) Montrer que la réunion d'une famille totalement ordonnée d'idéaux qui ne sont pas de type fini (abréviation : INDTF) est un INDTF. En déduire que, dans un anneau non noetherien il existe un INDTF maximal pour l'inclusion. (Invoquer le lemme de Zorn[2].)
2) Montrer que tout INDTF maximal est un idéal premier. (Si $xy \in I$ et $x, y \notin I$, on a $I \cap Ay = yI'$ où I' est un idéal qui contient strictement I donc est de type fini ; appliquer le troisième théorème d'isomorphisme et remarquer que $I + Ay$ est de type fini.)
3) En déduire qu'un anneau dans lequel tout idéal premier est de type fini est noetherien.

Exercice 2.5.10 Démontrer que, si A est noetherien, l'anneau des séries formelles $A[[X]]$ est noetherien. (Introduire les idéaux $I_n := \{a \in A \mid \exists aX^n + \cdots \in J\}$, où $\cdots$ désigne des termes de degrés supérieurs.)

Exercice 2.5.11 1) Montrer que, pour tout A-module M, si la suite $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ est exacte, la suite $0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N'')$ qui s'en déduit est exacte.
2) Il manque la surjectivité à droite de cette suite. La démontrer dans le cas des espaces vectoriels, mais trouver un contre-exemple dans le cas où $A = \mathbf{Z}$. (Utiliser la suite exacte associée à $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$.)
3) Montrer que, pour tout A-module N, si la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte, la suite $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N)$ qui s'en déduit est exacte.
4) Il manque la surjectivité à droite de cette suite. La démontrer dans le cas des espaces vectoriels, mais trouver un contre-exemple dans le cas où $A = \mathbf{Z}$.

Exercice 2.5.12 On note I, resp. S un idéal, resp. une partie multiplicative de l'anneau A et $\overline{A} := A/I$. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules.
1) Discuter l'exactitude de la suite de $\overline{A}$-modules $0 \to \overline{M'} \to \overline{M} \to \overline{M''} \to 0$ qui s'en déduit.
2) Discuter l'exactitude de la suite de $(S^{-1}A)$-modules $0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$.

Exercice 2.5.13 (i) Si le A-module M est de type fini, resp. de présentation finie, alors il en est de même du A/I-module M/IM et du $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$.
(ii) On suppose que A est un anneau noetherien. Les anneaux A/I, $S^{-1}A$, $A[X]$ sont-ils noetheriens ? Les A-modules A/I, $S^{-1}A$, $A[X]$ sont-ils noetheriens ?

Exercice 2.5.14 Dans l'anneau $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, trouver une suite strictement croissante d'idéaux principaux.

---

2. Il dit qu'un ensemble ordonné non vide dans lequel toute famille totalement ordonnée est majorée (ensemble *inductif*) admet un élément maximal.