Chapitre 5

Courbes affines

À partir de la section 5.2 et jusqu'à la fin du cours, le corps de base sera **C**. Dans la section 5.1, on suppose seulement le corps K infini (afin de pouvoir identifier polynomes et fonctions polynomiales).

5.1 Hypersurfaces affines

Soit $A \subset K[E]$ un ensemble quelconque de fonctions polynomiales sur le K-espace affine E. On pose :

$$\mathcal{V}(A) := \{x \in E \mid \forall f \in A \ , \ f(x) = 0\}.$$

C'est donc le *lieu des zéros* de l'ensemble d'équations polynomiales A. Il est clair que si l'on ajoute des équations, le lieu des zéros décroît :

$$A \subset B \Longrightarrow \mathcal{V}(A) \supset \mathcal{V}(B).$$

Si l'on ajoute à A des combinaisons linéaires d'éléments de A, le lieu des zéros ne change pas :

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(< A >),$$

où $< A >$ est l'idéal de $K[E]$ engendré par A. Comme $K[E] \simeq K[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau noetherien, l'idéal $< A >$ est de type fini : $< A > = < f_1, \ldots, f_m >$, et :

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m) := \mathcal{V}(\{f_1, \ldots, f_m\}) = \mathcal{V}(< f_1, \ldots, f_m >).$$

Définition 5.1.1 Une *partie algébrique* de E est un sous-ensemble de la forme $\mathcal{V}(I)$, où I est un idéal de $K[E]$. On dit également *fermé algébrique* ou *fermé de Zariski* en vertu de la proposition suivante.

Proposition 5.1.2 *Les parties algébriques de E sont les fermés d'une topologie, appelée* topologie de Zariski.

Preuve. - Cela découle immédiatement des faits suivants :

1. $E = \mathcal{V}(\{0\})$;
2. $\emptyset = \mathcal{V}(K[E])$;

3. $\bigcap \mathcal{V}(I_k) = \mathcal{V}(\sum I_k)$;
4. $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$.

À titre d'exemple, nous prouverons le dernier ; la vérification (facile) des trois premiers est laissée au lecteur.
Puisque $IJ \subset I \cap J \subset I, J$, on a $\mathcal{V}(IJ) \supset \mathcal{V}(I \cap J) \supset \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$. Pour démontrer l'inclusion réciproque, on choisit $x \in E \setminus (\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J))$. Il existe donc $f \in I$ et $g \in J$ tels que $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, d'où $(fg)(x) \neq 0$ d'où $x \in E \setminus \mathcal{V}(IJ)$ puisque $fg \in IJ$. □

On peut préciser le premier fait en remarquant que, pour tout idéal I :

$$\mathcal{V}(I) = E \Longleftrightarrow I = \{0\}.$$

En effet, K étant supposé infini, $f \in K[E]$ ne peut s'annuler sur E que si $f = 0$.

Remarque 5.1.3 On peut également préciser le deuxième fait en montrant que, si K est algébriquement clos, on a une équivalence :

$$\emptyset = \mathcal{V}(I) \Leftrightarrow I = K[E].$$

Sous la forme $I \neq K[E] \Rightarrow \mathcal{V}(I) \neq \emptyset$, c'est en effet l'un formes du célèbre *nullstellensatz* ou *théorème des zéros* de Hilbert. Nous ne le démontrerons (*cf.* l'exercice 5.5.1) qu'en dimension 2 ; voir Lang, RW3 ou Briançon-Maisonobe pour le cas général.

Corollaire 5.1.4 *Les parties Zariski-denses (voir définition 4.3.5) E sont les parties denses pour la topologie de Zariski.*

Preuve. - Rappelons qu'une partie $F \subset E$ est Zariski-dense au sens de *loc. cit.* si, et seulement si, $F \subset \mathcal{V}(f) \Rightarrow f = 0$.
Supposons donc d'abord F Zariski-dense (au sens du chapitre précédent) et soit $\mathcal{V}(I)$ un fermé contenant F. Pour tout $f \in I$, on a $F \subset \mathcal{V}(f)$, donc $f = 0$. Cela entraine que $I = \{0\}$, donc $\mathcal{V}(I) = E$, et F est bien dense pour la topologie de Zariski.
Supposons réciproquement F dense pour la topologie de Zariski. Si $F \subset \mathcal{V}(f)$, on a alors $\mathcal{V}(f) = E$, donc $f = 0$ et F est bien Zariski-dense. □

Nous considérerons dorénavant E comme muni de la topologie de Zariski, donc comme espace topologique.

Définition 5.1.5 (i) Un espace topologique E est dit *irréductible* s'il n'est pas la réunion de deux sous-ensembles fermés stricts, *i.e.* si $E = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés entraîne $E = F_1$ ou $E = F_2$.
(ii) Un fermé F d'un espace topologique E est dit *irréductible* si la topologie induite en fait un espace irréductible, *i.e.* si $F \subset F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de E entraîne $F \subset F_1$ ou $F \subset F_2$.

Exercice 5.1.6 Un espace topologique E est irréductible si, et seulement si, tout ouvert non vide de E est dense.

Corollaire 5.1.7 *L'espace topologique E est irréductible.*

Preuve. - Tout ouvert non vide est de la forme $E \setminus \mathcal{V}(I)$ où $I \neq \{0\}$, et contient donc $E \setminus \mathcal{V}(f)$ pour tout $f \in I \setminus \{0\}$. Mais ce dernier ensemble est Zariski-dense d'après le principe de prolongement des identités algébriques (proposition 4.3.7). □

Remarque 5.1.8 Il est immédiat que l'irréductibilité est une propriété plus forte que la connexité. Elle est en fait strictement plus forte (voir l'exercice 5.5.5).

Pour toute partie $F \subset E$, notons :

$$\mathfrak{I}(F) := \{f \in K[E] \mid \forall x \in F \ , \ f(x) = 0\}.$$

Exemple 5.1.9 Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in E = K^n$. L'idéal dans $K[E] = K[X_1, \ldots, X_n]$ de ce singleton est :

$$\mathfrak{I}(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) = < X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n > .$$

En effet, il est évident que $< X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n >$. Réciproquement, pour tout $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$, on démontre par divisions euclidiennes successives que $P = \sum (X_i - a_i) Q_i + R$, où $Q_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ et où $R \in K$. Il est alors immédiat que, si $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, alors $R = 0$, ce qui implique l'inclusion réciproque.

Proposition 5.1.10 *Pour $F \subset E$ et $A \subset K[E]$, on a :*

$$A \subset \mathfrak{I}(F) \iff F \subset \mathcal{V}(A).$$

Preuve. - Les deux relations sont équivalentes à : $\forall f \in A \ , \ \forall x \in F \ , \ f(x) = 0$. □

Corollaire 5.1.11 *Pour toute partie $F \subset E$, l'adhérence (de Zariski) est donnée par la formule :*

$$\overline{F} = \mathcal{V}(\mathfrak{I}(F)).$$

□

Exercice 5.1.12 Notant $\sqrt{I} := \{f \in K[E] \mid \exists n \in \mathbf{N} \ : \ f^n \in I\}$ le radical de I, montrer que $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) \supset \sqrt{I}$ pour tout idéal I de $K[E]$.

Remarque 5.1.13 Si K est algébriquement clos, on a même égalité : c'est encore une des formes du nullstellensatz de Hilbert.

"Dans la pratique", on choisira presque toujours un repère affine sur E, et donc un système de coordonnées, ce qui permettra d'identifier E à K^n, les fonctions polynomiales de $K[E]$ à des polynômes de $K[X_1, \ldots, X_n]$, etc. Dans ce contexte, on s'autorisera des changements de coordonnées affines $X' = AX + B$, *i.e.* :

$$x'_i = \sum a_{i,j} x_j + b_i, \quad (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(K),$$

chaque fois que ce sera nécessaire, par exemple pour simplifier la forme des équations. Il est utile de noter qu'une telle transformation ne change pas le degré total d'un polynôme de $K[X_1, \ldots, X_n]$, ce qui permet de définir de manière non ambigüe le *degré de $f \in K[E]$* comme le degré total de l'une quelconque de ses écritures dans $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Définition 5.1.14 Une *hypersurface affine* de E est un sous-ensemble algébrique de la forme $\mathcal{V}(f)$, où $f \in K[E]$ n'est pas constant.

Bien entendu, on n'autorise pas les cas dégénérés $f = 0$ (qui définirait le fermé $\mathcal{V}(f) = E$) et $f \in K^*$ (qui définirait le fermé $\mathcal{V}(f) = \emptyset$). La proposition suivante montre que ces restrictions suffisent pour obtenir un objet naturel.

Proposition 5.1.15 *On suppose E de dimension n. Soit H une hypersurface de E. Alors H (si $n \geq 2$) et $E \setminus H$ (si $n \geq 1$) sont des ensembles infinis.*

Preuve. - Le fait que $E \setminus H$ est infini est démontré dans l'exercice 5.5.4 du TD.
On identifie E à K^n en choisissant les coordonnées telles que l'indéterminée X_n intervienne effectivement dans f (c'est possible puisque $f \notin K$) ; on écrit donc :

$$f = a_0(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^d + \cdots + a_n(X_1, \dots, X_{n-1}),$$

avec $d \geq 1$ et $a_0 \neq 0$. On projette H sur K^{n-1} par la projection $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$. Comme K est algébriquement clos et $d \geq 1$, tout point de $K^{n-1} \setminus \mathcal{V}(a_0)$ est dans l'image. Comme $n - 1 \geq 1$, l'ensemble $K^{n-1} \setminus \mathcal{V}(a_0)$ est infini. $\square$

Notons d'autre part que, $K[E]$ étant noetherien, tout fermé algébrique de E est intersection finie d'hypersurfaces.

5.2 Courbes planes complexes

Dorénavant, nous nous plaçons en dimension $n = 2$ et le corps de base est $\mathbf{C}$. Nous laissons au lecteur de vérifier que la plupart des résultats s'étendent à tout corps algébriquement clos (dans certains cas, il faut supposer que la caractéritique est nulle.)

Une hypersurface du plan affine complexe E est appelée *courbe (algébrique) plane*. On appelle alors *équation de la courbe* Γ toute fonction polynomiale $f \in \mathbf{C}[E]$ telle que $\Gamma = \mathcal{V}(f)$. La courbe Γ est dite *irréductible* si elle admet une équation qui est un élément irréductible de l'anneau factoriel $\mathbf{C}[E] \simeq \mathbf{C}[X,Y]$ (*cf.* le cours de L3), *i.e.* si l'on peut écrire $\Gamma = \mathcal{V}(f)$ avec $f \in \mathbf{C}[E]$ irréductible.

Remarque 5.2.1 On a alors évidemment $\Gamma = \mathcal{V}(f^n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, autrement dit une courbe irréductible admet de nombreuses équations réductibles.

Lemme 5.2.2 *Soient $\Gamma, \Gamma' \subset E$ deux courbes planes ; on suppose Γ irréductible. Alors :*
- *soit $\Gamma \subset \Gamma'$ et toute équation irréductible de Γ divise toute équation de Γ' ;*
- *soit $\Gamma \cap \Gamma'$ est un ensemble fini.*

Preuve. - Soient f une équation irréductible de Γ et f' (aucun rapport avec la dérivation !) une équation quelconque de Γ'. Supposons que f ne divise pas f'. On va prouver que $\Gamma \cap \Gamma'$ est un ensemble fini, et tous les cas du théorème en découleront.
On identifie E à $\mathbf{C}^2$ et $\mathbf{C}[E]$ à $\mathbf{C}[X,Y]$, donc f et f' à des polynômes en X, Y (à coefficients comlexes). On introduit les deux polynômes résultants $A(X) := \mathrm{Res}_Y(f, f')$ et $B(Y) := \mathrm{Res}_X(f, f')$. Ces deux polynômes sont non nuls car f et f' sont premiers entre eux. D'autre part, si $(x,y) \in$

$\Gamma \cap \Gamma'$, alors $A(x) = B(y) = 0$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour x, resp. pour y, d'où la conclusion. On a même démontré la majoration :

$$\text{card}(\Gamma \cap \Gamma') \leq (\deg \text{Res}_X(f, f'))(\deg \text{Res}_Y(f, f')).$$

□

L'anneau $\mathbf{C}[E]$ étant factoriel, on fait le choix d'un ensemble P de représentants parmi les éléments irréductibles : autrement dit, tout irréductible de $\mathbf{C}[E]$ est associé à un unique élément de P. Ainsi, le "théorème fondamental de l'arithmétique" dans $\mathbf{C}[E]$ dit que tout $f \in \mathbf{C}[E]$ non nul admet une écriture unique (à l'ordre près) $f = \lambda f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, les $f_i \in P$, les $r_i \in \mathbf{N}^*$.

Théorème 5.2.3 *Soit $f = \lambda f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}$ la décomposition de $f \notin \mathbf{C}$. Alors :*
(i) Toute courbe irréductible incluse dans la courbe $\Gamma := \mathcal{V}(f)$ est l'une des courbes $\Gamma_i := \mathcal{V}(f_i)$.
(ii) Toute équation de Γ est de la forme $\mu f_1^{s_1} \cdots f_k^{s_k}$, $\mu \in \mathbf{C}^*$, les $s_i \in \mathbf{N}^*$.

Preuve. - C'est immédiat avec le lemme. □

Corollaire 5.2.4 *La courbe Γ possède une équation quadratfrei*[1] *unique à un facteur constant près.*

Preuve. - C'est évidemment l'équation $f_1 \cdots f_k$ ou l'un quelconque de ses multiples par un facteur constant. □

Une telle équation est appelée *équation réduite* de Γ. Son degré (qui est uniquement déterminé) est appelé *degré de* Γ.

Corollaire 5.2.5 *La courbe Γ possède une unique écriture comme réunion de courbes irréductibles.*

Preuve. - C'est évidemment l'écriture $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$. □

Les Γ_i sont appelées les *composantes irréductibles* de Γ.

Corollaire 5.2.6 *Soient Γ, Γ' deux courbes planes. Alors $\Gamma \subset \Gamma'$ si, et seulement si, toute composante irréductible de Γ est une composante irréductible de Γ'.*

□

Corollaire 5.2.7 *Soient Γ, Γ' deux courbes planes. Alors $\Gamma \cap \Gamma'$ est un ensemble fini si, et seulement si, Γ et Γ' n'ont aucune composante irréductible commune.*

□

Corollaire 5.2.8 *Tout fermé algébrique propre du plan est une union finie de courbes irréductibles et de points.*

1. Rappelons (cours de L3) qu'un élément d'un anneau factoriel est dit quadratfrei s'il n'est divisible par aucun carré non inversible ; de manière équivalente, a est quadratfrei si $v_p(a) \in \{0, 1\}$ pour tout irréductible p.

□

Les composantes irréductibles admettent une définition purement topologique, voir l'exercice 5.5.12. Pour bien comprendre la différence avec la connexité, il faut penser à l'exemple suivant : le fermé $\mathcal{V}(XY)$ du plan $\mathbf{C}^2$ est connexe (exercice 5.5.5) mais pas irréductible puisqu'union des deux droites $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{V}(Y)$.

Remarque 5.2.9 Il ne faut pas confondre la topologie de Zariski sur le plan affine $\mathbf{C}^2$ avec la topologie usuelle, dite "transcendante". Tout fermé de Zariski est un fermé au sens transcendant (donc idem pour les ouverts) mais pas réciproquement. On peut alors démontrer, mais c'est loin d'être trivial, que toute courbe irréductible est connexe pour la topologie transcendante (voir cours sur les surfaces de Riemann ; ou bien le livre de Shafarevich).

Exercice 5.2.10 Comparer la densité au sens de Zariski et au sens transcendant.

5.3 Intersection d'une courbe et d'une droite

En vue d'étudier d'une part l'intersection de deux courbes (théorème de Bézout), d'autre part les tangentes en un point (étude locale), nous allons ici examiner l'intersection d'une courbe et d'une droite. Soient donc $E := \mathbf{C}^2$ (pour simplifier), $P \in \mathbf{C}[X,Y]$ non constant et irréductible et $\Gamma := \mathcal{V}(P)$: donc P est une équation réduite de Γ et $\deg \Gamma = \deg P$. Soit $D := M_0 + \mathbf{C}u$ la droite affine passant par $M_0 \in E$ et de vecteur directeur $u \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nous voulons étudier l'intersection :

$$\Gamma \cap D = \{M_0 + \lambda u \mid \lambda \in \mathbf{C}, F(\lambda) = 0\}, \text{ où } F(\lambda) := P(M_0 + \lambda u).$$

On écrit pour cela $P = P_0 + \cdots + P_d$, où chaque P_k est homogène de degré k (autrement dit, combinaison linéaire des monômes $X^i Y^{k-i}$, $i = 0, \ldots, k$) ; on suppose $P_d \neq 0$, *i.e.* $\deg \Gamma = \deg P = d$. Ainsi :

$$F(\lambda) = P_d(u)\lambda^d + \text{ des termes de degré } \leq d-1.$$

On suppose $D \not\subset \Gamma$, autrement dit que le polynôme F n'est pas identiquement nul. Son degré est évidemment inférieur ou égal à d, d'où l'inégalité :

$$\operatorname{card}(\Gamma \cap D) \leq d = \deg \Gamma.$$

Il y a deux causes possibles d'inégalité stricte : soit $\deg F < d$, *i.e.* $P_d(u) = 0$; soit F a des racines multiples. Chacune de ces situations admet une interprétation géométrique.

5.3.1 Étude à l'infini : directions asymptotiques

Puisque P_d est homogène, la condition $\deg F < d$, *i.e.* $P_d(u) = 0$ ne dépend que de la droite vectorielle $\mathbf{C}u$ et non du vecteur directeur particulier u. Cette condition caractérise donc certaines directions du plan [2]. Ces directions sont appelées *directions asymptotiques*. Nous verrons au chapitre 6 qu'elles correspondent bijectivement aux "points à l'infini" de D. En voici une justification intuitivement facile à visualiser. Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de Γ qui tend vers l'infini. Autrement dit, une norme arbitraire sur $\mathbf{C}^2$ ayant été choisie, si l'on pose $\rho_n := \|(x_n, y_n)\|$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = +\infty$. On écrit $(x_n, y_n) = \rho_n u_n$ où u_n est un vecteur de norme 1. La suite des u_n représente

2. Rappelons qu'une direction d'un plan affine est une droite vectorielle du plan vectoriel sous-jacent.

les directions delon lesquelles s'éloignent les points (x_n, y_n). De l'égalité $P(x_n, y_n) = 0$, on déduit facilement :

$$P_d(u_n) = O(\rho_n^{-1}) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Les vecteurs u_n appartiennent au compact $\|u\| = 1$, donc leur suite admet des points d'accumulation ; et il découle de la relation ci-dessus que ces points d'accumulation sont des zéros de P_d, donc des directions asymptotiques.

Exercice 5.3.1 Prouver que $P_d(u_n) = O(\rho_n^{-1})$.

Définition 5.3.2 L'ensemble $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) := \dfrac{\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\mathbf{C}^*}$ des directions du plan affine complexe $\mathbf{C}^2$ est appelé *droite projective complexe*. La classe dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la direction $(x,y) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est notée $[x : y]$.

On dit que couple (x,y) est formé des *coordonnées projectives* du point $[x : y] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, mais il faut prendre garde que $[x : y] = [\lambda x : \lambda y]$ pour tout $\lambda \neq 0$: les coordonnées projectives ne sont définies qu'à un facteur non nul près.

Par conséquent, la valeur $P_d(x : y)$ n'a aucun sens, mais la condition $P_d(x : y) = 0$ a un sens (puisque P_d est homogène). Elle définit un sous-ensemble de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, l'ensemble des directions asymptotiques (ou "points à l'infini"). C'est un ensemble fini. Pour le voir, on factorise le polynôme $P_d(X,1) \in \mathbf{C}[X]$, qui est de degré $d' \leq d$:

$$P_d(X,1) = C \prod_{i=1}^{d'} (X - \lambda_i).$$

On voit alors que :

$$P_d(X,Y) = C Y^{d-d'} \prod_{i=1}^{d'} (X - \lambda_i Y),$$

d'où l'on déduit que les directions asymptotiques sont les $[\lambda_i : 1]$ et, si $d' < d$, la direction $[1 : 0]$. Il y en a donc au plus d.

Si l'on veut faire jouer un rôle plus symétrique à X et Y, on observe que tout polynôme homogène est un produit de formes linéaires :

$$P_d(X,Y) = \prod_{i=1}^{d} (\lambda_i X + \mu_i Y),$$

et l'on voit que les directions asymptotiques sont les $[-\mu_i : \lambda_i]$.

5.3.2 Étude locale : couper (secare) et toucher (tangere)

On se place maintenant en un point particulier de $\Gamma \cap D$, qui est donc de la forme $M = M_0 + \lambda u$ avec $F(\lambda) = 0$. On regarde si la racine λ de F est simple ou multiple. On peut tout aussi bien supposer (pourquoi ?) que $M = M_0 = (0,0)$, *i.e.* que l'on a placé l'origine en ce point et que l'on a paramétré la droite à partir de ce point. Alors :

$$P = P_m + \cdots + P_d, \text{ où } 1 \leq m \leq d \text{ et } P_m, P_d \neq 0.$$

(Chaque P_i, $i = m, \ldots, d$, est homogène de degré i.) Par conséquent :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= P_m(u)\lambda^m + \cdots + P_d(u)\lambda^d \\ &= \lambda^m (P_m(u) + \cdots + P_d(u)\lambda^{d-m}). \end{aligned}$$

Dans le “cas général”, $P_m(u) \neq 0$ et la racine $\lambda = 0$ correspondant au point d'intersection $M = M_0$ est de multiplicité m. Pour un nombre fini de droites, celles de direction u telle que $P_m(u) = 0$, la racine est de multiplicité $m' > m$. Tout changement de coordonnées qui conserve la condition $M_0 = M = (0,0)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $X' = AX$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et l'on voit que la définition suivante est intrinsèque (indépendante du système de coordonnées) :

Définition 5.3.3 (i) L'entier m est l'*ordre* ou la *multiplicité* de Γ en $M \in \Gamma$; il est noté $\nu_M(\Gamma)$. Le point $M \in \Gamma$ est dit *simple*, ou *ordinaire* si $\nu_M(\Gamma) = 1$ et *multiple* ou *singulier* si $\nu_M(\Gamma) > 1$.
(ii) L'entier m' est l'*ordre de contact* ou la *multiplicité d'intersection* de D et Γ en M ; il est noté $\mu_M(\Gamma, D)$. Une droite $D \ni M$ telle que $\mu_M(\Gamma, D) > \nu_M(\Gamma)$ est dite *tangente* à Γ en M (on dit aussi qu'elle *touche* Γ en M). Une droite $D \ni M$ telle que $\mu_M(\Gamma, D) = \nu_M(\Gamma)$ est dite *sécante* à Γ en M (on dit aussi qu'elle *coupe* Γ en M).
(iii) La réunion des (droites) tangentes à Γ en M est appelée *cône tangent* à Γ en M.

Le cône tangent en $M_0 \in \Gamma$ est donc la réunion des droites $M_0 + \mathbf{C}u$ telles que $P_m(u) = 0$. Il y a au plus $m = \nu_M(\Gamma)$ telles droites. En particulier, si M_0 est un point simple, le cône tangent se réduit à une droite, la *tangente à* Γ *en* M_0.

Utilisation du calcul différentiel. On se place dans un système de coordonnées quelconques d'origine le point $M_0 \in \Gamma$. Si $u = (a, b)$, la formule de Taylor donne (puisque $P(M_0) = 0$) :

$$P(M_0 + \lambda u) = \left(\frac{\partial P}{\partial X}(M_0)a + \frac{\partial P}{\partial Y}(M_0)b \right) \lambda + \text{ termes de degré supérieur en } \lambda.$$

On voit donc que, pour que M_0 soit un point singulier, il faut, et il suffit, que :

$$\frac{\partial P}{\partial X}(M_0) = \frac{\partial P}{\partial Y}(M_0) = 0.$$

De plus, cette condition ne change pas si l'on prend un système de coordonnées d'origine arbitraire.
Par ailleurs, si M_0 est un point simple, l'une des deux dérivées partielles est non nulle et le théorème des fonctions implicites (holomorphes) nous dit que Γ est *lisse* en M_0 : au voisinage de M_0, la courbe est localement isomorphe à une droite (ici l'isomorphisme est un difféomorphisme holomorphe).

Utilisation de l'algèbre. Si l'on n'utilise pas d'équation réduite, il peut y avoir des points singuliers artificiels ; par exemple si tous les facteurs irréductibles de P ont un exposant ≥ 2, tous les points sont singuliers. Plus généralement, si la décomposition en facteurs irréductibles est $P = \prod P_i^{r_i}$, pour chaque i tel que $r_i \geq 2$, tous les points de $\mathcal{V}(P_i)$ annuleront les dérivées partielles de P (exercice : le démontrer). On prendra donc une équation réduite (P quadratfrei) : il est visible que les propriétés décrites sont alors intrinsèques. Si $P = P_1 \cdots P_k$, on vérifie (c'est encore un exercice pour le lecteur) que tous les points d'intersection de deux composantes irréductibles distinctes $\mathcal{V}(P_i)$, $\mathcal{V}(P_j)$, $i \neq j$, sont des points singuliers de la courbe $\Gamma = \mathcal{V}(P_1) \cup \cdots \cup \mathcal{V}(P_k)$. On vérifie de même les points singuliers de Γ sont d'une part les points ci-dessus, d'autre part les points singuliers des $\mathcal{V}(P_i)$ (il n'y en a pas d'autres). (Pour toutes ces assertions, voir l'exercice 5.5.14.)

Remarque 5.3.4 Le *lieu singulier* (ensemble des points singuliers de $\mathcal{V}(P)$, P quadratfrei) est fini : voir l'exercice 5.5.13.

5.4 Le théorème de Bézout affine

Le théorème de Bézout en géométrie algébrique dit que l'intersection de deux courbes de degrés d et e se compose de de points. Il faut évidemment supposer que les courbes n'ont pas de composante irréductible commune (sinon leur intersection ne serait même pas finie), mais cela ne suffit pas comme l'a montré l'étude à la section précédente de l'intersection d'une droite et d'une courbe :

- Il peut manquer des "points à l'infini" (cas de deux droites parallèles).
- Il peut y avoir des points d'intersection "multiples" (cas de points singuliers, ou de courbes tangentes).

Nous allons nous placer dans le cas raisonnable de deux courbes sans composante commune, décrites par des équations réduites. Nous prouverons d'abord la forme la plus faible (mais déjà non triviale et très utile) du théorème de Bézout, qui est une majoration : le nombre de points d'intersection est inférieur ou égal au produit des degrés.

Pour améliorer cette forme faible, nous introduirons les "multiplicités d'intersection". Cela exige une étude locale améliorée et justifie l'introduction d'un peu d' l'algèbre commutative [3]. Nous obtiendrons alors un théorème exact (avec égalité) mais sous condition restrictive (pas de points d'intersection à l'infini).

Le traitement du dernier cas "dégénéré" (présence de points d'intersection à l'infini) exigera l'introduction de la géométrie projective au chapitre suivant, où nous énoncerons et démontrerons le théorème de Bézout complet.

5.4.1 Forme faible

Théorème 5.4.1 (Forme faible du théorème de Bézout) *Si les courbes Γ et Γ' n'ont pas de composante commune, alors :*

$$\mathit{card}(\Gamma \cap \Gamma') \leq (\deg \Gamma)(\deg \Gamma').$$

Preuve. - On choisit des équations réduites f, g de Γ, Γ' et l'on note $d := \deg f = \deg \Gamma$ et $e := \deg g = \deg \Gamma'$. On suppose les coordonnées choisies de telle sorte que $(0,1)$ ne soit une direction asymptotique ni de Γ ni de Γ' : autrement dit, $f_d(0,1) \neq 0$ et $g_e(0,1) \neq 0$. On peut donc écrire $f_d = a_0(X)Y^d + \cdots + a_d(X)$ et $g_e = b_0(X)Y^e + \cdots + b_e(X)$ avec $a_0, b_0 \neq 0$. De plus, comme $d = \deg f$ et $e = \deg g$ sont les degrés totaux, on a $\deg a_i \leq i$ pour $i = 0, \ldots, d$ et $\deg b_j \leq j$ pour $j = 0, \ldots, e$.

3. La théorie de l'intersection a été un des grands moteurs de développement de l'algèbre commutative et même de l'algèbre "homologique", voir le livre de Jean-Pierre Serre "Algèbre locale et multiplicités".

On suppose en outre que $(0,1)$ n'est la direction d'aucune des droites reliant deux points d'intersection distincts (ces derniers sont en nombre fini, donc c'est possible). Cela entraîne que la projection $(x,y) \mapsto x$ de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}$ est injective sur $\Gamma \cap \Gamma'$. Il en découle que $\mathrm{card}(\Gamma \cap \Gamma')$ est inférieur au nombre total des abcisses possibles pour les points d'intersection.
Notons $R(X) := \mathrm{Res}_Y(f,g) \in \mathbf{C}[X]$. Ce polynôme est non nul puisque f et g sont premiers entre eux et que $a_0 b_0 \neq 0$. La théorie de l'élimination garantit que $(x,y) \in \Gamma \cap \Gamma' \Rightarrow R(x) = 0$. Vu l'argument précédent, nous sommes donc ramenés à démontrer que $\deg R \leq de$.
On a $R(X) = \det(s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d+e}$ (déterminant de la matrice de Sylvester), où :

$$s_{i,j} = \begin{cases} a_{d+j-i} \text{ si } 1 \leq j \leq e, \\ b_{j-i} \text{ si } e+1 \leq j \leq e+d. \end{cases}$$

Dans le développement standard du déterminant, chaque terme est de la forme $\pm \prod_{i=1}^{d+e} s_{i,\sigma(i)}$, où σ est une permutation de $\{1, \ldots, d+e\}$. Le degré d'un tel terme (qui est un polynôme en X) est :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d+e} \deg s_{i,\sigma(i)} &= \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e} \deg s_{i,\sigma(i)} + \sum_{e+1 \leq \sigma(i) \leq e+d} \deg s_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e} \deg a_{d+\sigma(i)-i} + \sum_{e+1 \leq \sigma(i) \leq e+d} \deg b_{\sigma(i)-i} \\
&\leq \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e} (d + \sigma(i) - i) + \sum_{e+1 \leq \sigma(i) \leq e+d} (\sigma(i) - i) \\
&= \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e} d + \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e} (\sigma(i) - i) + \sum_{e+1 \leq \sigma(i) \leq e+d} (\sigma(i) - i) \\
&= ed + \sum_{1 \leq \sigma(i) \leq e+d} (\sigma(i) - i) \\
&= ed,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Le dernier calcul peut être précisé en vue d'une amélioration ultérieure. Notons $\overline{a}_i$ le monôme de degré i dans a_i et $\overline{b}_j$ le monôme de degré j dans b_j (ce sont donc leurs termes dominants s'ils ont le degré maximum possible, et 0 autrement). Le terme de degré de de $\prod_{i=1}^{d+e} s_{i,\sigma(i)}$ est donc, avec des notations évidentes, $\prod_{i=1}^{d+e} \overline{s}_{i,\sigma(i)}$. Le terme $\overline{R}(X)$ de degré de est $\mathrm{Res}_Y(\overline{f}, \overline{g})$, toujours avec des notations évidentes. Mais :

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \overline{a_0}(X) Y^d + \cdots + \overline{a_d}(X) = f_d, \\
\overline{g} &= \overline{b_0}(X) Y^e + \cdots + \overline{b_e}(X) = g_e.
\end{aligned}$$

Corollaire 5.4.2 *Le terme de degré de de $\mathrm{Res}_Y(f,g)$ est $\mathrm{Res}_Y(f_d, g_e)$, qui est un monôme de la forme CX^{de}. Les autres termes de $\mathrm{Res}_Y(f,g)$ sont de degrés $< de$.*

Notons que le terme $\mathrm{Res}_Y(f_d, g_e)$ ne s'annule que si f_d et g_e ont un facteur commun non trivial ; mais les facteurs linéaires de ces polynômes homogènes définissent les directions asymptotiques de Γ et Γ'.

Corollaire 5.4.3 *Le degré de* $\mathrm{Res}_Y(f,g)$ *est* de *si, et seulement si* Γ *et* Γ' *n'ont pas de direction asymptotique commune.*

5.4.2 Multiplicités d'intersection

On garde les notations de la sous-section précédente. La $\mathbf{C}$-algèbre $A := \mathbf{C}[X,Y]/ < f,g >$ ne dépend (à isomorphisme près) que de Γ et Γ' : en effet, tout changement affine de coordonnées induit un automorphisme de $\mathbf{C}[X,Y]$ et un isomorphisme des algèbres associées.

On sait que l'intersection est finie ; notons :

$$\Gamma \cap \Gamma' = \{(a_i,b_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Les idéaux maximaux de A sont les images $\overline{\mathfrak{M}}_i$ dans A des idéaux maximaux $\mathfrak{M}_i :=< X-a_i, Y-b_i >$, $i = 1,\dots,n$ de $\mathbf{C}[X,Y]$. De plus, A n'a pas d'autres idéaux premiers : ces derniers seraient en effet les images d'idéaux $< h >\subset \mathbf{C}[X,Y]$ avec h irréductible et $< f,g >\subset< h >$, ce qui n'est pas possible puisque f et g sont premiers entre eux (hypothèse "pas de composante commune"). Les idéaux $\overline{\mathfrak{M}}_i$ sont deux à deux étrangers, le radical de A est donc $\bigcap \overline{\mathfrak{M}}_i = \prod \overline{\mathfrak{M}}_i$. L'anneau A étant noetherien, ce radical est de type fini, donc nilpotent (comme tout idéal de type fini dont tous les éléments sont nilpotents). Soit donc $\mu \in \mathbf{N}$ tel que $\prod \overline{\mathfrak{M}}_i^\mu = \{0\}$. D'après le lemme chinois :

$$A \simeq (A/\overline{\mathfrak{M}}_1^\mu) \times \cdots \times (A/\overline{\mathfrak{M}}_n^\mu).$$

Définition 5.4.4 La *multiplicité d'intersection de* Γ, Γ' *en le point* (a_i,b_i) est :

$$\mu_{M_i}(\Gamma,\Gamma') := \dim_{\mathbf{C}} A/\overline{\mathfrak{M}}_i^\mu.$$

En fait, $A/\overline{\mathfrak{M}}_n^\mu$ est le localisé de A en l'idéal maximal associé au point M_i, de sorte que la définition ci-dessus est intrinsèque.

Théorème 5.4.5 (Forme affine du théorème de Bézout) *On a la majoration :*

$$\sum_{M \in \Gamma \cap \Gamma'} \mu_M(\Gamma,\Gamma') \leq (\deg \Gamma)(\deg \Gamma'),$$

avec égalité si, et seulement si, les courbes Γ *et* Γ' *n'ont pas de "point d'intersection à l'infini", c'est-à-dire de direction asymptotique commune.*

Preuve. - D'après l'application ci-dessus du lemme chinois, on a :

$$\sum_{M \in \Gamma \cap \Gamma'} \mu_M(\Gamma,\Gamma') = \dim_{\mathbf{C}} A = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[X,Y]/ < f,g > .$$

On va prouver que $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[X,Y]/ < f,g >= \deg \mathrm{Res}_Y(f,g)$, en supposant que f et g sont sous la forme normalisée utilisée pour démontrer la forme faible du théorème de Bézout (voir ci-après) ; d'après le calcul du degré du résultant dans la preuve du théorème 5.4.1, et d'après les deux corollaires de ce théorème, cette égalité suffira à établir notre théorème (y compris le cas d'égalité). Notant encore $d = \deg f = \deg \Gamma$ et $e = \deg g = \deg \Gamma'$, nous supposons donc que $f_d = a_0(X)Y^d + \cdots + a_d(X)$ et $g_e = b_0(X)Y^e + \cdots + b_e(X)$ avec $a_0, b_0 \neq 0$ et $\deg a_i \leq i$ pour $i = 0,\dots,d$ et $\deg b_j \leq j$ pour $j = 0,\dots,e$. On peut même supposer que $a_0 = b_0 = 1$ (car multiplier f et g par des constantes

ne change rien).
Soit $R := \mathbf{C}[X]$, donc un anneau principal. On présente le R-module $A = R[Y]/ < f,g >$ par la suite exacte :

$$R[Y]/ < g > \xrightarrow{\Phi} R[Y]/ < g > \to A \to 0,$$

où Φ est l'endomorphisme $u \mapsto u \times \overline{f}$ du R-module $R[Y]/ < g >$. Puisque $g = Y^e + b_1 Y^{e-1} + \cdots + b_e$, ce R-module est libre de rang e (avec la base "canonique" formée des classes de $1, \ldots, Y^{e-1}$). On va montrer que le déterminant de l'endomorphisme Φ est égal au résultant $\mathrm{Res}_Y(f,g) \in R$. D'après le théorème des facteurs invariants (chapitre 3), on en déduit que le R-module A est de torsion, isomorphe à un produit $\prod(R/ < \phi_i >)$ avec $\prod \phi_i = \det \Phi = \mathrm{Res}_Y(f,g)$, d'où l'égalité voulue $\dim_{\mathbf{C}} A = \deg \mathrm{Res}_Y(f,g)$.

Pour prouver (enfin) que $\det \Phi = \mathrm{Res}_Y(f,g)$, on invoque le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
R[Y]_{e-1} \times R[Y]_{d-1} \arrow[r, "Syl"] \arrow[d, "pr_1"'] & R[Y]_{e+d-1} \arrow[r, "div"] & R[Y]_{e-1} \times R[Y]_{d-1} \arrow[d, "pr_1"] \\
R[Y]_{e-1} \arrow[d, "can"'] & & R[Y]_{e-1} \arrow[d, "can"] \\
R[Y]/ < g > \arrow[rr, "\Phi"] & & R[Y]/ < g >
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales *Syl* et *div* correspondent respectivement à l'application linéaire dont la matrice est la matrice de Sylvester et à la division euclidienne par g. Les flèches verticales pr_1 sont les premières projections. Les flèches verticales *can* sont les isomorphismes canoniques. Il ne nous reste plus qu'à observer que, dans les bases canoniques, la matrice de la flèche *div* est de la forme $\begin{pmatrix} I_d & * \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où la matrice U est formée des écritures des restes des Y^i modulo g, donc est triangulaire supérieure unipotente. $\square$

Exercice 5.4.6 Décrire précisément la matrice U.

5.5 Exercices sur le chapitre 5

Exercice 5.5.1 1) Vérifier que les idéaux $< X-a, Y-b >$, $a,b \in \mathbf{C}$, sont maximaux dans $\mathbf{C}[X,Y]$. Vérifier que les idéaux $< h >$, $h \in \mathbf{C}[X,Y]$ irréductible, sont premiers et non maximaux dans $\mathbf{C}[X,Y]$.
2) Montrer que tout idéal premier non nul $\mathfrak{P}$ de $\mathbf{C}[X,Y]$ contient au moins un élément h irréductible. (Utiliser la factorialité de $\mathbf{C}[X,Y]$.)
3) Montrer que, si $\mathfrak{P}$ ne contient pas d'autres irréductibles que ceux associés à h, il est égal à $< h >$. Dans le cas contraire, montrer qu'il est de la forme $< X-a, Y-b >$, $a,b \in \mathbf{C}$.

Exercice 5.5.2 1) Comparer $\mathrm{Id}(\mathcal{V}(I))$ à $\sqrt{I}$. Traiter en particulier le cas de $I =< X^2+Y^2 >\subset \mathbf{R}[X,Y]$.
2) Montrer que les ensembles finis sont fermés pour la topologie de Zariski.
3) Montrer que toute partie Zariski-dense de $\mathbf{C}^n$ est infinie.
4) Soient I un idéal de $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_n]$ et $f \in \mathrm{Id}(\mathcal{V}(I))$. Montrer que l'idéal J engendré par I et $1-Tf$ dans $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_n,T]$ est tel que $\mathcal{V}(J) = \emptyset$ (lieu des zéros dans $\mathbf{C}^{n+1}$).
5) On *admet* le nullstellensatz faible : pour tout idéal propre J de $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_m]$, on a $\mathcal{V}(J) \neq \emptyset$. En déduire le nullstellensatz fort : pour tout idéal I de $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_n]$, on a $\mathrm{Id}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Exercice 5.5.3 1) Montrer que dans tout espace topologique X, la condition : tout ouvert non vide est dense équivaut à la condition : si deux fermés de X ont pour réunion X, l'un des deux est égal à X. On dit alors que X est *irréductible*. Vérifier que cela entraîne la connexité mais que la réciproque est fausse. Montrer qu'un fermé F de X est irréductible pour la topologie induite si, et seulement si, pour tous fermés F_1 et F_2 de X tels que $F \subset F_1 \cup F_2$, on a $F \subset F_1$ ou $F \subset F_2$.
2) Montrer que l'espace $\mathbf{C}^n$ muni de la topologie de Zariski est irréductible. Sa topologie est-elle séparée ? Montrer que les fermés irréducibles de $\mathbf{C}^n$ muni de la topologie de Zariski sont les $V(\mathfrak{P})$, $\mathfrak{P}$ étant un idéal premier de $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_n]$.
3) Montrer que tout fermé de $\mathbf{C}^n$ admet un nombre fini de fermés irréductibles maximaux, dont il est la réunion ; et que cette réunion est minimale, *i.e.* on ne peut omettre l'un de ces fermés irréductibles. (On les appelle *composantes irréductibles*.) Que devient ce résultat lorsque $n = 2$?

Exercice 5.5.4 Soit H une hypersurface de $\mathbf{C}^n$. Démontrer que $\mathbf{C}^n \setminus H$ est infini et connexe par arcs. (Relier deux points par une droite *complexe*.)

Exercice 5.5.5 Montrer que $\mathcal{V}(XY) \subset \mathbf{C}^2$ est connexe pour la topologie de Zariski, mais pas irréductible.

Exercice 5.5.6 Calculer la multiplicité de l'origine dans $\Gamma := V(f) \subset \mathbf{C}^2$ dans les cas suivants : $f = XY + g$ où g ne contient que des termes d'ordre ≥ 3 ; et $f = Y^2 - Xg(X)$ où g est de degré 2.

Exercice 5.5.7 1) Soient $f,g \in \mathbf{C}[X,Y]$. Démontrer l'équivalence de :
(i) $f \wedge g = 1$;
(ii) $V(f) \cap V(g)$ est fini ;
(iii) $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[X,Y]/ < f,g >< \infty$.
2) Expliciter ces conditions lorsque $\deg g = 1$.

Exercice 5.5.8 1) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des anneaux locaux, d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Démontrer que, dans l'anneau $A := A_1 \times \cdots \times A_n$ les idéaux $\mathfrak{M}_i := A_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_i \times \cdots \times A_n$ sont maximaux.
2) Montrer que le localisé de A en $\mathfrak{M}_i$ est canoniquement isomorphe à A_i.
3) Montrer que les $\mathfrak{M}_i$ sont les seuls idéaux maximaux de A.

Exercice 5.5.9 1) Démontrer que toute $\mathbf{C}$-algèbre de dimension finie intègre est un corps. (Considérer les applications $x \mapsto ax$.)
2) Soit A une $\mathbf{C}$-algèbre de dimension finie. Démontrer que tout idéal premier de A est maximal.
3) Démontrer que A n'admet qu'un nombre fini k d'idéaux maximaux, $k \leq \dim_{\mathbf{C}} A$. (Invoquer le lemme chinois.)
4) En déduire que A est isomorphe au produit de ses k localisés.

Exercice 5.5.10 Démontrer l'inégalité : $\mu_M(\Gamma, \Gamma') \geq \nu_M(\Gamma)\nu_M(\Gamma')$.

Exercice 5.5.11 Démontrer à l'aide du théorème des fonctions implicites complexe qu'au voisinage d'un point simple, toute courbe est difféomorphe à $\mathbf{C}$.

Exercice 5.5.12 Soit X un espace topologique *noetherien*, autrement dit tel que toute suite croissante d'ouverts est stationnaire. Démontrer que tout fermé de F est réunion finie de fermés irréductibles et que, si l'on impose de plus qu'il n'y ait aucune réunion d'inclusion entre ces fermés irréductibles, la décomposition est unique.

Exercice 5.5.13 Soit $P \in \mathbf{C}[X,Y]$ non constant, dont la décomposition en facteurs irréductibles est $P = \prod P_i^{r_i}$. Montrer que les points qui annulent P et ses dérivées partielles sont :

1. pour chaque i tel que $r_i \geq 2$, tous les points de $\mathcal{V}(P_i)$;
2. pour chaque i tel que $r_i = 1$, tous les points de $\mathcal{V}(P_i)$ qui annulent les dérivées partielles de P_i ;
3. pour chaque $i \neq j$, tous les points de $\mathcal{V}(P_i) \cap \mathcal{V}(P_j)$.

Exercice 5.5.14 Les points singuliers doivent vérifier trois conditions :

$$P(M_0) = \frac{\partial P}{\partial X}(M_0) = \frac{\partial P}{\partial Y}(M_0) = 0.$$

Par élimination, en déduire qu'ils sont en nombre fini si P est irréductible, puis en général si P est quadratfrei.