Chapitre 6

Courbes projectives

6.1 Le plan projectif complexe

Soit $\Gamma := \mathcal{V}(f)$, $f := f_0 + \cdots + f_d$ (où $f_i \in \mathbf{C}[X,Y]$ est homogène de degré i et où $f_d \neq 0$) une courbe plane. Pour étudier les "points à l'infini" (ou, ce qui revient au même, les directions aymptotiques) de Γ, on peut poser $x := X/T$, $y := Y/T$ puis faire tendre T vers 0. Contrairement aux apparences, il s'agit en fait d'un processus purement algébrique (et que l'on peut donc étendre à tout corps de base). En effet :

$$f(X/T,Y/T) = T^{-d}F(X,Y,T), \text{ où } F(X,Y,T) := T^d f_0 + T^{d-1} f_1 + \cdots + f_d \in \mathbf{C}[X,Y,T]$$

est un polynome homogène de degré d en X,Y,T, appelé *homogénéisé* de f. On le note f^h, voici sa définition générale :

$$f^h(X,Y,T) := T^{\deg f} f(X/T,Y/T).$$

Avec ces notations, on obtient la dichotomie [1] suivante :

1. Pour $T \neq 0$:
$$f^h(X,Y,T) = 0 \Longleftrightarrow (X/T,Y/T) \in \Gamma.$$
2. Pour $T = 0$, $(X,Y) \neq (0,0)$:
$$f^h(X,Y,T) = 0 \Longleftrightarrow [X:Y] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \text{ est une direction asymptotique de } \Gamma.$$

De plus, si $\lambda \in \mathbf{C}^*$, les triplets (X,Y,T) et $(\lambda X, \lambda Y, \lambda T)$ annulent (ou pas) f^h simultanément et de plus définissent (selon le cas) le même point $(X/T,Y/T) \in \mathbf{C}^2$ ou la même direction asymptotique $[X:Y] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de Γ.

Définition 6.1.1 Le *plan projectif complexe* $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est le quotient de $\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par l'action du groupe $\mathbf{C}^*$ définie par $\big(\lambda,(X,Y,T)\big) \mapsto (\lambda X, \lambda Y, \lambda T)$:

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) := \frac{\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{\mathbf{C}^*}.$$

1. Il manque un terme à cette dichotomie, le cas où $(X,Y,T) = (0,0,0)$, mais un instant de réflexion convaincra le lecteur que ce cas n'admet aucune interprétation géométrique.

La classe d'un élément $(X,Y,T) \in \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est notée $[X:Y:T]$ et l'on dit que X,Y,T sont les *coordonnées projectives* du point $[X:Y:T] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Comme dans le cas de la droite projective, on prendra garde que "les" coordonnées projectives d'un point ne sont définies qu'à un facteur non nul près :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}^* \text{ , } \forall (X,Y,T) \in \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \text{ , } [X:Y:T] = [\lambda X : \lambda Y : \lambda T].$$

Une conséquence importante de cette définition est que, pour tout point $M \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et pour tout polynome homogène $F \in \mathbf{C}[X,Y,T]$, bien que la valeur $F(M)$ ne soit pas définie, la condition $F(M) = 0$ l'est : elle équivaut à $F(X,Y,T) = 0$ pour un choix arbitraire des coordonnées projectives X,Y,T.

Notons $p : \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la projection canonique $(X,Y,T) \mapsto [X:Y:T]$. On munit alors le plan projectif de la topologie quotient de l'ouvert $\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ de $\mathbf{C}^3$: pour que $U \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ soit un ouvert, il faut, et il suffit, que $p^{-1}(U) \subset \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ le soit. Il s'agit ici de la *topologie transcendante* sur l'espace projectif. (Il est également possible de définir la topologie de Zariski, qui garde un sens sur un corps infini arbitraire ; nous ne le ferons pas, mais le lecteur peut s'y essayer.)

Proposition 6.1.2 *Le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est localement homéomorphe à $\mathbf{C}^2$, séparé, compact et connexe.*

Preuve. - Soit $L(X,Y,T)$ une forme linéaire qui ne s'annule pas en $M_0 \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. (On peut toujours choisir L parmi X, Y ou T, mais ce n'est pas nécessaire.) Alors l'application :

$$\phi_L : [X:Y:T] \mapsto \big(X/L(X,Y,T), Y/L(X,Y,T), T/L(X,Y,T)\big)$$

est bien définie sur l'ouvert $U_L := \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus H \ni M_0$, où $H := \{[X:Y:T] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid L(X,Y,T) = 0\}$; et c'est un homéomorphisme de U sur le plan $L(X,Y,T) = 1$ de $\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Ceci entraîne la première assertion, la deuxième en est conséquence immédiate.
Les deux autres assertions sont conséquences de ce que p est surjective du compact connexe $\{(X,Y,T) \in \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mid |X| + |Y| + |T| = 1\}$ sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. $\square$

Exercice 6.1.3 Vérifier soigneusement toutes les affirmations topologiques contenues dans cette démonstration.

Les ouverts de la forme U_L sont donc des cartes au sens de la géométrie différentielle et $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est (au moins) une variété topologique (en fait analytique, voir plus loin). Comme les cartes U_X, U_Y, U_T recouvrent $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, elles en forment un atlas topologique (toutes les cartes U_L sont d'ailleurs compatibles avec cet atlas). On en déduit un critère commode :

Corollaire 6.1.4 *Le sous-ensemble $U \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est ouvert si, et seulement si, $U \cap U_X$, $U \cap U_Y$ et $U \cap U_T$ le sont.*

Pratiquement, on identifie chacune de ces trois cartes à $\mathbf{C}^2$ par l'homéomorphisme ci-dessus suivi de l'oubli de la coordonnée 1, d'où une réalisation canonique de la carte correspondante :

$$[X:Y:T] \mapsto \begin{cases} \psi_X([X:Y:T]) := (Y/X, T/X) \text{ sur } U_X, \\ \psi_Y([X:Y:T]) := (X/Y, T/Y) \text{ sur } U_Y, \\ \psi_T([X:Y:T]) := (X/T, Y/T) \text{ sur } U_T. \end{cases}$$

À titre d'exemple, calculons un changement de carte. Les applications ψ_X et ψ_Y induisent toutes deux des homéomorphismes de l'ouvert $U_X \cap U_Y$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sur l'ouvert $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ de $\mathbf{C}^2$. Les homéomorphismes réciproques sont $(y,t) \mapsto [1 : y : t]$ et $(x,t) \mapsto [x : 1 : t]$. Par composition, on obtient les applications de changement de cartes (réciproques l'une de l'autre) :

$$(x,t) \mapsto (1/x, t/x) \quad \text{et} \quad (y,t) \mapsto (1/y, t/y).$$

On voit ainsi que les applications de changement de cartes sont biholomorphes et que $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est une variété analytique complexe, en particulier une variété $\mathcal{C}^\infty$.

On appellera *cartes affines* sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ les cartes (U_L, ϕ_L). Dans le cas particulier des "cartes affines standard" sur U_X, U_Y, U_T, on considèrera plutot les réalisations canoniques (U_X, ψ_X), etc. (Il n'y a pas de telle réalisation canonique pour les autres formes linéaires L.)

6.2 Courbes projectives planes

Définition 6.2.1 Une *courbe projective plane* est un lieu d'annulation :

$$\overline{\mathcal{V}}(F) := \{[X : Y : T] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid F(X,Y,T) = 0\},$$

où $F \in \mathbf{C}[X,Y,T]$ est un polynôme homogène de degré $d \geq 1$. Une courbe $\overline{\Gamma} := \overline{\mathcal{V}}(F)$ telle que F est irréductible est elle-même dite *irréductible*.

Pour comprendre ce qu'est une courbe projective $\overline{\Gamma} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, on va la couper avec l'ouvert affine standard U_T, et aussi avec le complémentaire Δ_T de U_T. À titre d'exercice, le lecteur est chaudement encouragé à étudier l'intersection de $\overline{\Gamma}$ avec un ouvert affine quelconque U_L et avec son complémentaire. On écrit $F(X,Y,T) := T^d f_0 + T^{d-1} f_1 + \cdots + f_d$ où chaque $f_i \in \mathbf{C}[X,Y]$ est homogène de degré i. Alors, si $[X : Y : T] \in U_T$, *i.e.* si $T \neq 0$:

$$F(X,Y,T) = 0 \Longleftrightarrow f(X/T, Y/T) = 0,$$

où $f := F^a$ est le *déshomogénéisé* de F, défini par l'équation :

$$F^a(x,y) := F(x,y,1).$$

On est conduit à une dichotomie :

1. Si F est de la forme λT^d, alors $\overline{\mathcal{V}}(F)$ est égal à :

$$\Delta_T := \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus U_T = \{[X : Y : 0] \mid (X,Y) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

   Le fermé $\Delta_T = \overline{\mathcal{V}}(T)$ est en bijection avec la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par l'application $[X : Y : 0] \mapsto [X : Y]$. Il est appelé *droite (projective) à l'infini* de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

2. Sinon, $f := F^a$ n'est pas constant et l'intersection $\overline{\mathcal{V}}(F) \cap U_T$ s'identifie, via l'homéomorphisme ψ_T à la courbe affine $\mathcal{V}(f)$ de $\mathbf{C}^2$.
   De plus, dans ce cas, l'intersection $\overline{\mathcal{V}}(F) \cap \Delta_T = \overline{\mathcal{V}}(F) \setminus U_T$ de $\overline{\mathcal{V}}(F)$ avec la droite à l'infini Δ_T s'identifie, via la bijection ci-dessus de Δ_T avec $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, au lieu $f_d = 0$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, c'est à dire à l'ensemble des directions asymptotiques de $\mathcal{V}(f)$.

Exercice 6.2.2 Dans le deuxième cas, $\overline{\Gamma} := \overline{\mathcal{V}}(F)$ est l'adhérence (pour la topologie transcendante) de $\Gamma := \mathcal{V}(f)$ identifiée à $\overline{\Gamma} \cap U_T$. C'est même son adhérence pour la topologie de Zariski dans le sens suivant : $\overline{\Gamma}$ est la plus petite courbe projective contenant Γ. On dit que c'est la *complétion projective* de Γ.

Pour étudier une courbe affine $\Gamma := \mathcal{V}(f) \subset \mathbf{C}^2$, $f \in \mathbf{C}[X,Y]$, on pourra donc passer à sa complétion projective $\overline{\Gamma} := \overline{\mathcal{V}}(F) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, $F := f^h \in \mathbf{C}[X,Y,T]$. Pour étudier cette dernière, on regarde sa trace dans chacun des ouverts affines $U_L \simeq \mathbf{C}^2$: cette trace est une courbe affine plane (ou peut-etre l'ensemble vide dans le cas exceptionnel où Γ est une droite). Si L n'est pas X ou Y ou T, l'isomorphisme de U_L avec $\mathbf{C}^2$ n'est pas canonique, il faut choisir des coordonnées affines sur le plan $L^{-1}(1)$ de $\mathbf{C}^3$. On sait que ce choix, pour étudier une courbe affine, est anodin ; mais il n'est pas *a priori* clair que le choix de l'ouvert affine U_L le soit : en effet, le passage d'une carte affine à une autre est codé par une application de changement de carte qui n'est pas une application affine ! (Ces applications sont des “homographies généralisées”.) On devra considérer comme “propriété géométrique” (au sens de la géométrie projective) une propriété qui ne dépend pas de ces choix.

Points singuliers en géométrie projective. Le *lieu singulier* de la courbe $\overline{\Gamma} := \overline{\mathcal{V}}(F)$ est défini par la formule :

$$\overline{\Gamma}_{sing} := \{[X:Y:T] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid F'_X(X,Y,T) = 0, F'_Y(X,Y,T) = 0, F'_T(X,Y,T) = 0\}.$$

(Ces conditions ont bien un sens car ces dérivées partielles sont des polynômes homogènes.) La relation d'Euler $XF'_X + YF'_Y + TF'_T = dF$ montre que $\overline{\Gamma}_{sing} \subset \overline{\Gamma}$. On peut alors démontrer (*cf.* par exemple RW3) que $\overline{\Gamma}_{sing} \cap U_L$ est le lieu singulier de la courbe plane $\Gamma_L := \overline{\Gamma} \cap U_L$ (on exclut ici le cas où $\overline{\Gamma}$ est une droite). Comme ce dernier est indépendant du choix des coordonnées, la définition du lieu singulier (et donc celle de ses éléments, les *points singuliers*) a bien un sens géométrique.

Exercice 6.2.3 Démontrer que $\overline{\Gamma}_{sing} \cap U_L = (\Gamma_L)_{sing}$.

Exemple 6.2.4 La courbe affine plane Γ d'équation $f := y^2 - x(x-1)^2$ admet en $(1,0)$ un point singulier de type “point double ordinaire” (son cône tangent est formé de deux droites distinctes). La complétion projective $\overline{\Gamma}$ de Γ a pour équation $F := f^h = Y^2T - X(X-T)^2$. Le point singulier affine $(1,0)$ a pour image dans la carte U_T le point projectif $[1:0:1]$ en lequel les trois dérivées partielles $F'_X = -(X-T)(3X-T)$, $F'_Y = 2YT$ et $F'_T = Y^2 + 2X(X-T)$ s'annulent, et qui est donc un point singulier au sens de la définition ci-dessus. On peut également se placer dans la carte U_X et choisir pour coordonnées affines $u := Y/X$, $v := T/X$. L'équation affine de Γ_X est alors $u^2v - (1-v)^2$, et le point $(0,1)$ qui correspond à $[1:0:1]$ annule en effet les dérivées partielles $2uv$ et $u^2 + 2(1-v)$.

Exercice 6.2.5 Calculer $\overline{\Gamma}_{sing}$.

6.3 Le théorème de Bézout projectif

Notre but est maintenant de donner un sens géométrique (au sens de la géométrie projective) à la multiplicité d'intersection de deux courbes en un point, afin d'énoncer et d'établir une version projective du théorème de Bézout.

6.3.1 Fonctions rationnelles

On a précédemment posé $\mu_M(\Gamma,\Gamma') := \dim_{\mathbf{C}} \left(\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{<f,g>}\right)_{\overline{\mathfrak{M}}}$, où "l'anneau local d'intersection" $\left(\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{<f,g>}\right)_{\overline{\mathfrak{M}}}$ est le localisé de "l'anneau (global) d'intersection" $\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{<f,g>}$ au point M, c'est-à-dire en l'idéal maximal correspondant $\overline{\mathfrak{M}}$. Pour obtenir une définition de l'anneau local d'intersection qui ait un sens en géométrie projective, on est conduit à généraliser la notion de fonction.

Définition 6.3.1 Une *fonction rationnelle* sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est une fraction rationnelle $R \in \mathbf{C}(X,Y,T)$ homogène de degré 0 (*i.e.* quotient de deux polynômes homogènes de même degré).

En vertu de la factorialité de $\mathbf{C}[X,Y,T]$ et des propriétés particulières des polynômes homogènes (exercice 6.4.1), on peut toujours écrire une telle fonction rationnelle sous la forme $R = F/G$ où F et G sont homogènes et premiers entre eux ; F,G sont alors uniques à un facteur constant non nul près. Le *lieu de définition* de R est l'ouvert $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \overline{\mathcal{V}}(G)$; et la *valeur* $R(M)$ de R en un point $M := [a:b:c]$ du lieu de définition est $F(a,b,c)/G(a,b,c)$, qui est bien défini en fonction du point M (et non d'un choix particulier des coordonnées projectives a,b,c).

Les fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ forment un sous-corps de $\mathbf{C}(X,Y,T)$ contenant $\mathbf{C}$, et que nous noterons K.

Exercice 6.3.2 Démontrer que K est engendrée sur $\mathbf{C}$ par X/T et Y/T, qui sont algébriquement indépendants ; c'est donc une extension transcendante pure de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance 2.

Proposition 6.3.3 *L'anneau $O(U_L)$ des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui sont définies en tout point de U_L a pour éléments non nuls les F/L^d, où $d \in \mathbf{N}$ et où F est homogène de degré d.*

Preuve. - Il est clair que $O(U_L)$ est un anneau et que ces fractions rationnelles en sont bien éléments. Il reste à voir que si G est homogène de degré d et ne s'annule en aucun point de U_L, alors G est de la forme λL^d. (C'est d'ailleurs un cas particulier du nullstellensatz !) L'assertion à démontrer est invariante par l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^3$ et sur $\mathbf{C}[X,Y,T]$. On peut donc supposer que $L = T$, et l'on doit prouver que si G^a ne s'annule pas sur $\mathbf{C}^2$ alors G est de la forme λT^d : mais cela découle de l'exercice 6.4.1. $\square$

Corollaire 6.3.4 *L'application $f(x,y) \mapsto f(X/T,Y/T)$ est un isomorphisme de $\mathbf{C}[x,y]$ sur $O(U_T)$.*

Exercice 6.3.5 Donner une description similaire de tous les $O(U_L)$.

Définition 6.3.6 L'*anneau local* de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en M est l'anneau O_M des fonctions rationnelles définies en M :

$$O_M := \{R \in K \mid R \text{ est définie en } M\}.$$

La terminologie est justifiée par le fait que l'anneau O_M est un anneau local, son unique idéal maximal étant :

$$\mathfrak{M}_M := \{R \in O_M \mid R(M) = 0\}.$$

Les éléments de O_M sont les F/G, F,G homogènes de même degré, telles que $G(M) \neq 0$. Les éléments de $\mathfrak{M}_M$ sont les F/G, F,G homogènes de même degré, telles que $G(M) \neq 0$ et $F(M) = 0$. Le groupe des unités O_M^* est donc formé des F/G, F,G homogènes de même degré, telles que

$F(M), G(M) \neq 0$.

Proposition 6.3.7 *Soit $L(X,Y,T)$ une forme linéaire qui ne s'annule pas en M. Alors $O(U_L) \subset O_M$ et O_M est le localisé de $O(U_L)$ en l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{L,M} := \mathfrak{M}_M \cap O(U_L)$.*

Preuve. - Il est évident que $O(U_L) \subset O_M$ et que $\mathfrak{M}_{L,M}$, noyau du morphisme surjectif $R \mapsto R(M)$ de $O(U_L)$ dans $\mathbf{C}$, est un idéal maximal de $O(U_L)$. Les élements du localisé de $O(U_L)$ en cet idéal maximal sont, d'après la proposition 6.3.3, les $(F/L^d)/(G/L^e)$, où F et G sont homogènes de degrés d, e et où $G(M) \neq 0$; on peut même supposer que $d = e$, quitte à remplacer (selon le cas) F par FL^{e-d} ou G par GL^{d-e} : ce sont exactement les éléments de O_M. $\square$

Corollaire 6.3.8 *Identifions $M(a,b) \in \mathbf{C}^2$ à $M[a:b:1] \in U_T \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Alors O_M s'identifie au localisé de $\mathbf{C}[x,y]$ en l'idéal maximal $< x-a, y-b >= \mathit{Id}(\{(a,b)\})$. Un élément f/g de ce localisé correspond à la fraction rationnelle $\frac{f(X/T,Y/T)}{g(X/T,Y/T)}$ de O_M.*

Notons d'ailleurs que, si $F := f^h$ et $G := g^h$, ont pour degrés respectifs d, e :

$$\frac{f(X/T,Y/T)}{g(X/T,Y/T)} = \frac{F/T^d}{G/T^e}.$$

6.3.2 Multiplicités d'intersection

Pour démarrer la prochaine étape, rappelons que nous sommes à la recherche d'une définition "géométrique" ou "intrinsèque" de l'anneau local d'intersection $\left(\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{<f,g>}\right)_{\overline{\mathfrak{M}}}$. Mais $\overline{\mathfrak{M}}$ est l'image de $\mathfrak{M}$ modulo l'idéal $< f, g >$ et l'on a affaire au localisé d'un anneau quotient : on peut donc appliquer la formule $\overline{S}^{-1}(A/I) = (S^{-1}A)/(S^{-1}I)$, où $\overline{S}$ désigne l'image modulo I de la partie multiplicative A ; l'égalité entre les deux anneaux signifiant, selon l'usage, qu'un isomorphisme canonique explicite les relie.

On applique la formule à $A := \mathbf{C}[x,y]$, $I :=< f, g >$ et $S := \mathbf{C}[x,y] \setminus < x-a, y-b >$. Invoquant de plus l'identification du corollaire ci-dessus, on obtient l'isomorphisme :

$$\left(\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{< f,g >}\right)_{\overline{\mathfrak{M}}} \simeq O_M/J,$$

où l'idéal J est engendré par F/T^d et G/T^e (notations introduites à la suite du corollaire). Il nous reste à décrire J d'une manière qui ne fasse pas jouer un rôle particulier à T.

Lemme 6.3.9 *Soient $F \in \mathbf{C}[X,Y,T]$ homogène de degré $d \geq 1$ et $M \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ tel que $F(M) = 0$. Alors, quelles que soient les formes linéaires L_1 et L_2 en X,Y,T telles que $L_1(M), L_2(M) \neq 0$, les éléments F/L_1^d et F/L_2^d de O_M engendrent le même idéal.*

Preuve. - Il est d'abord clair que $F/L_1^d, F/L_2^d \in O_M$; et leur quotient $(L_1/L_2)^d$ est un élément de O_M^*. $\square$

Cet idéal sera noté $\mathrm{Id}_M(F)$.

Proposition 6.3.10 *Soit $M \in U_T$ et soient F, G homogènes. Alors, notant $f := F^a$ et $g := G^a$:*

$$\left(\frac{\mathbf{C}[X,Y]}{< f,g >}\right)_{\mathfrak{M}} \simeq \frac{O_M}{Id_M(F)+Id_M(G)}.$$

Preuve. - L'isomorphisme du localisé $\mathbf{C}[x,y]_{<x-a,y-b>}$ sur O_M envoie f sur F/T^d et g sur G/T^e (d, e dénotant les degrés de F, G) et permet de reconnaître l'idéal J comme $\mathrm{Id}_M(F)+\mathrm{Id}_M(G)$. □

Définition 6.3.11 La *multiplicité d'intersection* de $\overline{\Gamma} := \overline{\mathcal{V}}(F)$ et $\overline{\Gamma}' := \overline{\mathcal{V}}(G)$, où F et G sont quadratfrei (donc des équations réduites, donc uniquement définies à un facteur constant près) est la dimension sur $\mathbf{C}$ de l'*anneau local d'intersection* :

$$\mu_M(\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}') := \dim_{\mathbf{C}} \frac{O_M}{\mathrm{Id}_M(F)+\mathrm{Id}_M(G)}.$$

Remarque 6.3.12 On utilise ici expressément la structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel de l'anneau local d'intersection, donc on le considère en réalité comme une $\mathbf{C}$-algèbre. Il faudrait, pour être rigoureux, reprendre toutes les preuves d'isomorphisme d'anneaux de ce chapitre et montrer que tous ces anneaux contiennent $\mathbf{C}$ et que tous ces isomorphismes induisent l'identité sur $\mathbf{C}$: ce sont sonc des isomorphismes de $\mathbf{C}$-algèbres. Nous laissons ce soin au lecteur.

Corollaire 6.3.13 *(i) Lorsque $M \in U_T$, cette définition coincide avec celle donnée dans le cas affine pour les courbes $\Gamma := \overline{\Gamma} \cap U_T$ et $\Gamma' := \overline{\Gamma}' \cap U_T$.*
(ii) Plus généralement, si $M \in U_L$, et si Γ,Γ' sont les courbes de $\mathbf{C}^2$ correspondant à $\overline{\Gamma} \cap U_L$ et $\overline{\Gamma}' \cap U_L$ par n'importe quelle identification de U_L avec $\mathbf{C}^2$, alors $\mu_M(\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}')$ est égale à la multiplicité d'intersection de Γ,Γ' en le point correspondant à M.

Théorème 6.3.14 (Bézout) *Soient $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}'$ deux courbes projectives n'ayant pas de composante commune ; et F, G des équations réduites de ces courbes. Alors :*

$$\sum_{M \in \overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma}'} \mu_M(\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}') = (\deg F)(\deg G).$$

Preuve. - On sait d'avance que l'intersection $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma}'$ est finie (A). Il existe donc une forme linéaire L telle que $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma}' \subset U_L$ (B). Quitte à choisir les coordonnées telles que $T = L$, ce qui est possible (C), on est donc ramené au cas d'égalité du théorème de Bézout affine 5.4.5 (pas de point d'intersection à l'infini). □

Exercice 6.3.15 Justifier les assertions A,B,C de la démonstration ci-dessus.

6.4 Exercices sur le chapitre 6

Exercice 6.4.1 Etablir les règles de calcul suivantes concernant l'homogénéisé f^h de $f \in \mathbf{C}[x,y]$ et le déshomogénéisé F^a de $F \in \mathbf{C}[X,Y,T]$:
1) Soit $F = GH$, $F,G,H \in \mathbf{C}[X,Y,T]$; alors, si F est homogène, G et H sont homogènes.
2) Si $R \in \mathbf{C}(X,Y,T)$ et si $R = F/G$ (écriture réduite), alors F et G sont homogènes.
3) $(f^h)^a = f$; $(fg)^h = f^h g^h$; $(FG)^a = F^a G^a$.
4) f est inversible, resp. irréductible dans $\mathbf{C}[x,y]$ si, et seulement si, f^h l'est dans $\mathbf{C}[X,Y,T]$.
5) Est-ce que $(F^a)^h = F$? Est-ce que F est inversible, resp. irréductible dans $\mathbf{C}[X,Y,T]$ si, et seulement si, F^a l'est dans $\mathbf{C}[x,y]$?

Exercice 6.4.2 Démontrer que $\overline{\mathcal{V}}(f^h) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est l'adhérence de $\mathcal{V}(f) \subset U_T = \mathbf{C}^2$ pour la topologie transcendante de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Exercice 6.4.3 Soit I un idéal de $\mathbf{C}[X,Y,T]$. démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) Pour tout $F \in I$, les composantes homogènes de F sont dans I.
(ii) I est engendré par des polynomes homogènes.
(iii) I est engendré par un nombre fini de polynomes homogènes.
(iv) $I = \bigoplus I_d$, où l'on note $\mathbf{C}[X,Y,T]_d$ l'espace des polynômes homogènes de degré d et $I_d := I \cap \mathbf{C}[X,Y,T]_d$.
On dit alors que I est un *idéal homogène* de $\mathbf{C}[X,Y,T]$.

Exercice 6.4.4 Pour tout idéal homogène I de $\mathbf{C}[X,Y,T]$, on note :

$$\overline{\mathcal{V}}(I) := \{[X:Y:T] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid \forall d \in \mathbf{N}\ ,\ \forall P \in I_d\ ,\ P(X,Y,T) = 0\}.$$

1) Montrer que les $\overline{\mathcal{V}}(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$: on la nomme *topologie de Zariski*.
2) Montrer que $\overline{\mathcal{V}}(f^h)$ est l'adhérence de $\mathcal{V}(f)$ pour la topologie de Zariski.
3) Montrer que $\overline{\mathcal{V}}(I) = \emptyset$ si, et seulement si, I contient $\mathbf{C}[X,Y,T]_d$ pour un certain d (et donc contient tous les $\mathbf{C}[X,Y,T]_e$ pour $e \geq d$).

Exercice 6.4.5 Soit $\overline{\Gamma} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ une courbe algébrique projective plane. Démontrer les égalités :

$$\overline{\Gamma}_{sing} \cap U_X = \left(\overline{\Gamma} \cap U_X\right)_{sing}, \quad \overline{\Gamma}_{sing} \cap U_Y = \left(\overline{\Gamma} \cap U_Y\right)_{sing}, \quad \overline{\Gamma}_{sing} \cap U_T = \left(\overline{\Gamma} \cap U_T\right)_{sing}.$$

Exercice 6.4.6 Soient $p := c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ (c non nul), $f := y^2 - p$ et $\Gamma := \mathcal{V}(f)$. Déterminer la complétion projective $\overline{\Gamma}$ de Γ et le lieu singulier $\overline{\Gamma}_{sing}$ de $\overline{\Gamma}$.

Exercice 6.4.7 1) Montrer que l'équation réduite de $\overline{\Gamma} = \overline{\mathcal{V}}(F)$ est unique à un facteur constant non nul près. Utiliser ce fait pour définir le degré d'une courbe algébrique projective plane.
2) En déduire une action du groupe $GL_3(\mathbf{C})$ sur l'ensemble des courbes algébriques projectives planes de degré d fixé.
3) Décrire toutes les classes d'équivalence de courbes de degré 1 ou 2 pour la relation d'équivalence liée à cette action de groupe.

Exercice 6.4.8 Appliquer le théorème de Bézout projectif à deux courbes dont les degrés sont 1 et $d \geq 1$; resp. à deux courbes de degré 2.