

# INITIATION AUX SURFACES DE RIEMANN

(COURS DE M1, DEUXIÈME SEMESTRE 2010/2011)

J. Sauloy<sup>1</sup>

5 avril 2011

1. Institut mathématique de Toulouse et U.F.R. M.I.G., Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 4



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Etudes globales de fonctions : prolongement analytique et monodromie</b>	<b>6</b>
1.1	Racine carrée . . . . .	6
1.1.1	Etude locale . . . . .	7
1.1.2	Etude globale . . . . .	10
1.2	“Caractères” . . . . .	12
1.2.1	Etude locale . . . . .	14
1.2.2	Etude globale . . . . .	15
1.3	Logarithme . . . . .	16
1.3.1	Etude locale . . . . .	16
1.3.2	Etude globale . . . . .	17
1.4	La fonction $\sqrt{1-z^2}$ . . . . .	18
1.4.1	Etude locale . . . . .	18
1.4.2	Etude globale . . . . .	18
1.5	Points à l’infini, points de ramification . . . . .	19
1.5.1	La fonction $\sqrt{z}$ . . . . .	20
1.5.2	La fonction $\sqrt{1-z^2}$ . . . . .	20
1.6	Une fonction algébrique qui n’est pas définie par une formule . . . . .	21
1.6.1	Etude locale . . . . .	21
1.6.2	Etude globale . . . . .	22
1.7	En guise de conclusion . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Construction “à la main” des surfaces de Riemann de quelques fonctions</b>	<b>24</b>
2.1	Surface de Riemann du logarithme . . . . .	24
2.1.1	La méthode des piles d’assiettes . . . . .	24
2.1.2	La méthode du parking . . . . .	25
2.1.3	La méthode des coupures . . . . .	26
2.1.4	Réalisation de la surface de Riemann du logarithme . . . . .	26
2.2	Surface de Riemann de $\sqrt{z}$ . . . . .	28
2.2.1	Description informelle . . . . .	28
2.2.2	La surface étalée au dessus de $\mathbf{C}^*$ . . . . .	29
2.2.3	Bouchage de trous . . . . .	31
2.3	La sphère de Riemann . . . . .	33
2.4	La surface de Riemann de $\sqrt{z}$ à l’infini et partout . . . . .	34
2.5	Quelques exemples succincts . . . . .	36
2.5.1	Surface de Riemann de $\sqrt{1-z^2}$ . . . . .	36

2.5.2	Surface de Riemann de $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ . . . . .	37
2.5.3	Surface de Riemann de $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ . . . . .	38
2.6	Illustrations . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Surface de Riemann “abstraites”</b>	<b>40</b>
3.1	Définitions et premiers exemples . . . . .	40
3.1.1	Quelques aspects pratiques . . . . .	41
3.1.2	Quelques exemples simples . . . . .	42
3.1.3	Un exemple plus riche : les tores complexes . . . . .	43
3.1.4	Aspects topologiques et différentiels (lien avec le cours de topologie) . . . . .	45
3.2	Fonctions holomorphes sur une surface de Riemann . . . . .	47
3.2.1	Les principales définitions . . . . .	47
3.2.2	Les principaux théorèmes . . . . .	48
3.3	Surface de Riemann d’une fonction “multiforme” . . . . .	50
3.3.1	Eléments fonctionnels et germes analytiques . . . . .	50
3.3.2	Prolongement analytique le long d’un chemin . . . . .	51
3.3.3	La surface de Riemann . . . . .	53
3.4	Le cas particulier des fonctions algébriques . . . . .	55
3.4.1	Cas général . . . . .	55
3.4.2	Exemple “hyperelliptique” . . . . .	56
3.5	Courbes algébriques affines . . . . .	56
3.5.1	Rappels sur le discriminant . . . . .	57
3.5.2	Où l’on invoque le théorème des fonctions implicites . . . . .	58
3.5.3	Où l’on invoque une autre forme du théorème des fonctions implicites . . . . .	58
3.5.4	Points singuliers, lieu régulier . . . . .	59
3.6	Courbes algébriques projectives . . . . .	60
3.6.1	Le plan projectif complexe . . . . .	60
3.6.2	Courbes dans le plan projectif . . . . .	61
3.6.3	Points singuliers et points réguliers . . . . .	62
3.6.4	Courbes projectives non singulières comme surfaces de Riemann compactes . . . . .	63
<b>4</b>	<b>La boîte à outils</b>	<b>64</b>
4.1	Formes différentielles holomorphes . . . . .	64
4.1.1	Rappels : formes différentielles holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ . . . . .	64
4.1.2	Formes différentielles sur une surface de Riemann . . . . .	67
4.1.3	Exemples . . . . .	69
4.2	Intégrale d’une forme différentielle holomorphe . . . . .	72
4.2.1	Prolongement analytique sur une surface de Riemann . . . . .	72
4.2.2	Intégration d’une forme différentielle le long d’un chemin . . . . .	73
4.3	Périodes d’une forme différentielle . . . . .	76
4.3.1	Le groupe des périodes d’une forme différentielle . . . . .	76
4.3.2	Exemples . . . . .	79
4.4	Morphismes de surfaces de Riemann . . . . .	80
4.4.1	Définition et exemples élémentaires . . . . .	80
4.4.2	Le yoga de base . . . . .	81
4.4.3	Extension aux morphismes des théorèmes sur les fonctions . . . . .	83

4.4.4	Forme locale des morphismes et conséquences . . . . .	84
4.5	Fonctions méromorphes . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Cubiques non singulières, périodes des intégrales elliptiques</b>	<b>87</b>
5.1	Retour sur les intégrales circulaires . . . . .	87
5.2	Intégrales elliptiques “de première espèce” . . . . .	87
5.3	Le théorème d’addition d’Abel . . . . .	87
5.4	Le groupe des périodes . . . . .	87
5.5	L’inversion . . . . .	87
5.6	Fonctions méromorphes sur une cubique non singulière . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Tores complexes et fonctions elliptiques, l’invariant modulaire</b>	<b>88</b>
6.1	Tores complexes . . . . .	88
6.2	Fonctions elliptiques : théorèmes de Liouville et d’Abel . . . . .	88
6.3	Fonctions elliptiques : fonctions de Weierstraß . . . . .	88
6.4	Classification des tores complexes . . . . .	88
6.5	Classification des réseaux de $\mathbf{C}$ . . . . .	88
6.6	Multiplication complexe, multiplication réelle . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Revêtements étales et revêtements ramifiés, courbes algébriques</b>	<b>89</b>
7.1	Revêtements de surfaces de Riemann . . . . .	89
7.2	Triangulations et genre . . . . .	89
7.3	Diviseurs . . . . .	89
7.4	Formes différentielles méromorphes . . . . .	89
7.5	Courbes algébriques . . . . .	89
7.6	Surfaces de Riemann compactes . . . . .	89

---

# Conventions et notations générales

**Conventions.** La notation  $A := B$  signifiera que le terme  $A$  est défini par la formule  $B$ . Les expressions nouvelles sont écrites en *italiques* au moment de la définition. Noter qu'une définition peut apparaître au cours d'un théorème, d'un exemple, d'un exercice, etc.

**Exemple 0.0.1** L'espace vectoriel  $E^* := \text{Hom}_K(E, K)$  est appelé *dual* de  $E$ .

**Notations.** Voici les plus courantes (parmi celles qui ne sont pas totalement standardisées et ne sont pas introduites dans le cours) :

- $\overset{\circ}{D}(a, r)$ ,  $\bar{D}(a, r)$ ,  $\partial D(a, r)$  désignent respectivement le disque ouvert, le disque fermé, le cercle de centre  $a \in \mathbf{C}$  et de rayon  $r > 0$ .
- $O(U)$  désigne la  $\mathbf{C}$ -algèbre des fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$ .
- Si  $\gamma$  est un chemin, on note  $\bar{\gamma}$  le chemin opposé ; si  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux chemins tels que  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ , on note  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  le chemin composé.
- $I(a, \lambda)$  désigne l'indice de  $a \in \mathbf{C}$  par rapport au lacet  $\lambda$ .
- 
- 
- 
- 
-

# Chapitre 1

## Etudes globales de fonctions : prolongement analytique et monodromie

Le thème de ce chapitre est le suivant : de nombreuses fonctions holomorphes importantes s'étudient sans problème *localement* à l'aide de l'analyse complexe élémentaire, mais ont un comportement *global* mystérieux et intéressant que l'on peut comprendre géométriquement.

Lectures conseillées :

1. "Complex Analysis" de L. V. Ahlfors, chapitre 8, §1
2. "Topics in Complex Functions, vol. I" de C. L. Siegel, chapitre 1, §1,2,3
3. "Abrégé d'histoire des mathématiques, vol. II" sous la direction de J. Dieudonné, chapitre VII, première partie

On pourra également consulter le chapitre I, §1 de mon cours de M2 "Equations fonctionnelles analytiques dans le champ complexe", accessible en ligne :

<http://www.math.univ-toulouse.fr/~sauLOY/PAPIERS/dea04-05.pdf>

Pour une référence facilement accessible à certains faits de base, nous renverrons parfois au manuel "Mathématiques, Tout-en-un pour la Licence, niveau L1" et "niveau L2", sous la direction de J.-P. Ramis et A. Warusfel, Dunod (respectivement abrégés en RW1 et RW2) ; et au "Cours de mathématiques pures et appliquées, vol. 1, Algèbre et géométrie", sous la direction de J.-P. Ramis et A. Warusfel, De Boeck (abrégé en RW3.1).

### 1.1 Racine carrée

On connaît bien la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_+$  : elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x.$$

De plus,  $\forall a, b \in \mathbf{R}_+, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ . Sa définition est sans mystère en tant que réciproque de la fonction  $x \mapsto x^2$  de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_+$ , qui est bijective.

Pour définir la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  de  $\mathbf{C}$  dans lui-même, on serait tenté de poser  $\sqrt{re^{i\theta}} := \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ . Malheureusement, cela donne lieu à des paradoxes :

$$\begin{aligned}\sqrt{1} &= \sqrt{1 \cdot e^{i0}} = \sqrt{1} e^{i0/2} = 1, \\ \sqrt{1} &= \sqrt{1 \cdot e^{i(2\pi)}} = \sqrt{1} e^{i(2\pi)/2} = -1.\end{aligned}$$

Pour éviter les contradictions, il faut donc restreindre l'argument  $\theta$  à un "domaine fondamental" : par exemple,  $[0, 2\pi[$  ou  $]-\pi, \pi]$ . Pour chacun de ces deux choix (que l'on appelle *déterminations* de la racine carrée), on a  $\sqrt{1} = 1$ ,  $\sqrt{-1} = i$ ,  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  ; mais le calcul de  $\sqrt{-i}$  donne  $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  pour la première détermination,  $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$  pour la deuxième.

Autre inconvénient : dans l'un et l'autre cas, la fonction obtenue n'est pas continue sur  $\mathbf{C}$ . Par exemple, dans le premier cas,  $\lim_{z \rightarrow 1} \sqrt{z}$  vaut 1 ou  $-1$  selon que  $z$  tend vers 1 par dessus (argument  $\theta \rightarrow 0+$ ) ou par dessous (argument  $\theta \rightarrow 2\pi-$ ) ; dans le second cas, c'est le calcul de  $\lim_{z \rightarrow -1} \sqrt{z}$  qui donne un résultat ambigu.

**Exercice 1.1.1** Dans le premier cas, la fonction est continue sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+^*$  ; dans le second cas, elle est continue sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-^*$ .

Enfin, aucune des deux déterminations ne vérifie la propriété algébrique  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$  : dans les deux cas,  $\sqrt{(-1)(-1)} \neq (\sqrt{-1})(\sqrt{-1})$ . Ces propriétés négatives ne sont pas dues à notre maladresse :

**Théorème 1.1.2** (i) Il n'existe pas de fonction  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,  $(f(z))^2 = z$  et qui soit continue.

(ii) Il n'existe pas de fonction  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,  $(f(z))^2 = z$  et qui vérifie de plus  $\forall a, b \in \mathbf{C}$ ,  $f(ab) = f(a)f(b)$ .

*Preuve.* - (i) Posons  $\varepsilon(t) := f(e^{it})e^{-it/2}$  pour  $t \in \mathbf{R}$ . La fonction  $\varepsilon$  est continue et a pour carré la constante 1. Elle est donc constante de valeur  $\alpha = \pm 1$ , et  $f(e^{it}) = \alpha e^{it/2}$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Mézalor  $f(1) = \alpha$  (prendre  $t = 0$ ) et  $f(1) = -\alpha$  (prendre  $t = 2\pi$ ), contradiction.

(ii) On a bien entendu  $f(1) = \pm 1 \neq 0$ . La deuxième contrainte entraîne  $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$ , donc  $f(1) = 1$ . Cela implique alors  $f(-1)^2 = f((-1)^2) = 1$ , ce qui contredit la première contrainte.  $\square$

### 1.1.1 Etude locale

On va chercher à définir  $\sqrt{z}$  sur un "petit" ouvert  $U$ , par exemple un disque. On posera :

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ est continue et } \forall z \in U, (f(z))^2 = z\}.$$

(On verra qu'en fait toutes les solutions continues sont holomorphes.) Si  $0 \in U$ , c'est impossible (autrement dit,  $\mathcal{F}(U) = \emptyset$ ) par le même argument que dans le théorème : fixer  $r > 0$  tel que le disque ouvert  $\mathcal{D}(0, r)$  soit inclus dans  $U$  et considérer la fonction  $t \mapsto f(re^{it})e^{-it/2}$  (détails laissés au lecteur).

Soit donc  $U \subset \mathbf{C}^*$ . On le suppose non vide (sinon, aucun intérêt !) et *connexe* ; on peut en effet se ramener à cette situation en vertu de l'exercice qui suit.

**Exercice 1.1.3** Si  $U = U_1 \cup U_2$ , les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  étant disjoints, l'application  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2)$  qui à  $f$  associe  $(f|_{U_1}, f|_{U_2})$  est une bijection.

L'ouvert  $U \subset \mathbf{C}^*$  étant connexe non vide, soient  $f, g \in \mathcal{F}(U)$ . Alors  $f^2 = g^2 \Rightarrow g = \pm f$  (c'est ici qu'intervient la connexité de  $U$ ) et l'on conclut que  $\mathcal{F}(U)$ , s'il n'est pas vide, a exactement deux éléments opposés. Dans ce cas, si l'on choisit arbitrairement  $z_0 \in U$  et  $w_0 \in \mathbf{C}$  tel que  $w_0^2 = z_0$ , chacune des deux déterminations de la racine carrée sur  $U$  est uniquement spécifiée par la condition initiale  $f(z_0) = w_0$ , resp.  $f(z_0) = -w_0$ .

**Remarque 1.1.4** L'ensemble  $\mathcal{F}(U)$  peut être vide même si  $0 \notin U$  : il suffit par exemple que  $U$  contienne un cercle  $\partial D(0, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = r\}$ ,  $r > 0$  (même argument que précédemment). On peut démontrer (et le lecteur y est vivement encouragé) que, pour que  $\mathcal{F}(U)$  soit vide, il faut, et il suffit, que  $U$  contienne l'image d'un lacet  $\lambda$  tel que l'indice<sup>1</sup>  $I(0, \lambda)$  de 0 par rapport à  $\lambda$  soit non nul. Cela découlera, au choix, de l'étude qui suit ; ou bien de la propriété analogue de la fonction logarithme<sup>2</sup> (voir le cours de fonctions de variables complexes de L3 ou la section 1.3).

### Au voisinage de 1

Prenons  $z_0 = 1$ , d'où  $w_0 = \pm 1$  ; et choisissons  $w_0 = 1$ . On ne prescrit pas l'ouvert  $U$ , et l'on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ (f(z))^2 = z, \end{cases}$$

**Développement en série entière.** On cherche d'abord  $f$  sous forme de série entière au voisinage de 1 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-1)^n \implies f(1+u) = g(u) = \sum_{n \geq 0} a_n u^n.$$

Les conditions sur  $g$  s'écrivent :

$$\begin{cases} g(0) = 1, \\ (g(u))^2 = 1+u. \end{cases}$$

Parce que cela rend les calculs beaucoup plus faciles, on remplace ce système algébrique par le système différentiel équivalent :

$$\begin{cases} g(0) = 1, \\ 2(1+u)g' = g. \end{cases}$$

(Le lecteur est invité à vérifier que les deux systèmes sont en effet équivalents : ici encore, la connexité de  $U$  intervient.) Les conditions correspondantes sur les coefficients s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ 2(na_n + (n+1)a_{n+1}) = a_n. \end{cases}$$

---

1. Dieudonné, Calcul infinitésimal, VII.6 p. 207.  
2. RW2 p. 820.

On en déduit que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-n+1/2}{n+1}$ , d'où :

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-k+1/2}{k+1} = \binom{1/2}{n},$$

et enfin :

$$(1.1.4.1) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (z-1)^n.$$

Le rayon de convergence de cette série est 1 (car  $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$ ) et l'on a donc obtenu une solution holomorphe sur le disque ouvert  $U = \overset{\circ}{D}(1, 1)$ . On ne pouvait pas espérer un plus grand rayon de convergence puisque, pour  $r > 1$ , le disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(1, r)$  contient 0.

**Calcul avec le module et l'argument.** La fonction définie par  $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  pour  $r > 0$  et  $-\pi < \theta < \pi$  est une détermination de la racine carrée, continue sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$  (ce que le lecteur vérifiera) : sa restriction à  $\overset{\circ}{D}(1, 1)$  (qui est bien inclus dans  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ ) est donc égale à la série trouvée précédemment, ou bien à son opposée, en vertu de ce qui a été dit sur  $\mathcal{F}(U)$ . En comparant leurs valeurs en  $z = 1$ , on voit qu'il y a égalité.

**Définition 1.1.5** L'unique détermination de la racine carrée continue sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$  et telle que  $1 \mapsto 1$  est appelée *détermination principale*.

**Exercice 1.1.6** (i) A quelle condition sur  $\theta_0 \in \mathbf{R}$  a-t-on l'inclusion  $\overset{\circ}{D}(1, 1) \subset V := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\theta_0}$  ? (Il est recommandé, bien que pas indispensable, de faire un dessin.)

(ii) Montrer que l'on obtient alors une détermination de la racine carrée continue sur  $V$  en posant  $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  pour  $r > 0$  et  $\theta_0 - \pi < \theta < \theta_0 + \pi$ .

#### Au voisinage d'un autre point de $\mathbf{C}^*$

Soit  $z_0 \in \mathbf{C}^*$  et soit  $w_0$  tel que  $w_0^2 = z_0$ . On ramène facilement le système au voisinage de  $z_0$  :  $f(z_0) = w_0$ ,  $(f(z))^2 = z$ , au système au voisinage de 1 en posant  $f(z) = w_0 \phi(z/z_0)$  : le système ci-dessus est alors équivalent à  $\phi(1) = 1$ ,  $(\phi(z))^2 = z$ , que l'on a déjà résolu.

**Développement en série entière.** On en déduit la solution holomorphe sur  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$  :

$$f(z) = w_0 \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (z/z_0 - 1)^n.$$

**Calcul avec le module et l'argument.** Pour tout choix de  $\theta_0$  tel que  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|) \subset V := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\theta_0}$ , la fonction définie par  $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  pour  $r > 0$  et  $\theta_0 - \pi < \theta < \theta_0 + \pi$  est une détermination de la racine carrée continue sur  $V$  dont la restriction à  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$  admet le développement en série entière ci-dessus ou son opposé.

**Exercice 1.1.7** Comment trancher ?

## 1.1.2 Etude globale

Puisque l'on sait définir *localement* des déterminations continues (et même holomorphes) de la racine carrée, on peut tenter d'en construire *globalement* en "recollant" les petits morceaux locaux. Mais nous savons d'avance que c'est impossible (théorème 1.1.2). Pour comprendre pourquoi, on va propager les informations locales et voir à quel moment on ne peut plus. Il s'agit donc au fond de la question du prolongement analytique.

**La promenade.** On va partir du point  $1 \in \mathbf{C}$  et tourner autour de 0 le long du cercle unité  $\partial D(0, 1)$ , parcouru dans le sens positif. Le cercle unité est recouvert par les disques ouverts  $U_k := \overset{\circ}{D}(e^{i\pi k/2}, 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  (bien entendu,  $U_{k+4} = U_k$ ); noter que  $U_k \subset \mathbf{C}^*$ . On note  $f_0$  la détermination principale de la racine carrée sur le disque ouvert  $U_0 = \overset{\circ}{D}(1, 1)$  *i.e.* la restriction de cette détermination (*cf.* la définition 1.1.5) à  $U_0$ , *i.e.* la fonction définie par la série entière (1.1.4.1). Pour prolonger au disque  $U_1 = \overset{\circ}{D}(i, 1)$ , on commence par restreindre  $f_0$  à l'ouvert  $U_{01} := U_0 \cap U_1$ . On note  $f_{01} \in \mathcal{F}(U_{01})$  la fonction obtenue. Comme  $U_{01}$  est non vide (il contient par exemple  $\frac{1+i}{2}$ ), convexe (car intersection de deux convexes) donc connexe, il y a exactement deux déterminations  $\pm f_{01}$  de la racine carrée sur  $U_{01}$ .

On a déjà vu qu'il y a exactement deux déterminations de la racine carrée sur  $U_1$  : puisque les racines carrées de  $i$  sont  $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , ce sont les fonctions  $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} f_0(z/i)$ . L'une de ces deux fonctions admet pour restriction à  $U_{01}$  la fonction  $f_{01}$  ci-dessus. Notons  $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$  cette fonction, qui a donc été obtenue par restriction suivie de prolongement.

L'argument se synthétise ainsi : les applications naturelles de restriction  $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_{01})$  et  $\mathcal{F}(U_1) \rightarrow \mathcal{F}(U_{01})$  sont bijectives ; en composant l'une avec la réciproque de l'autre, on définit une bijection  $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_1)$  ; l'image de  $f_0$  par cette bijection est  $f_1$ .

On continue la promenade le long de  $U_2 = \overset{\circ}{D}(-1, 1)$ ,  $U_3 = \overset{\circ}{D}(-i, 1)$  pour finir en  $U_4 = \overset{\circ}{D}(1, 1) = U_0$  en répétant le mécanisme de restriction suivie de prolongement, *i.e.* en composant les bijections

$$\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_1) \rightarrow \mathcal{F}(U_2) \rightarrow \mathcal{F}(U_3) \rightarrow \mathcal{F}(U_4), \quad f_0 \mapsto f_1 \mapsto f_2 \mapsto f_3 \mapsto f_4.$$

Noter que tous nos choix de restriction-prolongement sont totalement contraints par la condition de continuité. A la fin, on a nécessairement  $f_4 = \pm f_0$  (deux déterminations continues de la racine carrée sur le même disque). Plus ou moins ?

**Calculs explicites.** Ils se font le plus aisément sous la forme trigonométrique. On a *a priori*  $f_k(re^{i\theta}) = \varepsilon_k \sqrt{r} e^{i\theta/2}$  pour  $r > 0$  et  $\theta \in ]k\pi/2 - \pi, k\pi/2 + \pi[$ , où  $\varepsilon_k = \pm 1$  est une certaine constante à déterminer de proche en proche. Par définition de  $f_0$ , on a  $\varepsilon_0 = +1$ . Puis :

1. En comparant  $f_0$  et  $f_1$  en  $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , on trouve  $\varepsilon_1 = 1$ .
2. En comparant  $f_1$  et  $f_2$  en  $e^{3i\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ , on trouve  $\varepsilon_2 = 1$ .
3. En comparant  $f_2$  et  $f_3$  en  $e^{5i\pi/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ , on trouve  $\varepsilon_3 = 1$ .
4. En comparant  $f_3$  et  $f_4$  en  $e^{7i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ , on trouve  $\varepsilon_4 = 1$ .

Finalement, on voit que  $f_4$  est la fonction sur  $\overset{\circ}{D}(1, 1)$  définie par  $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  pour  $r > 0$  et  $\theta \in ]\pi, 3\pi[$ . Ce n'est pas la même détermination qu'au départ :  $f_4 = -f_0$ , comme on le vérifie en  $z_0 = 1 = e^{i \cdot 0} = e^{i \cdot 2\pi}$ .

**Remarque 1.1.8** La promenade suggère une interprétation dynamique de l'impossibilité d'un prolongement analytique global : lorsque l'argument de  $z$  fait un tour complet sur le cercle des directions, l'argument de sa racine carrée, qui va deux fois moins vite, ne fait qu'un demi-tour et ne revient pas au point de départ. Comme dans "Les neuf princes d'Ambre", en faisant un tour complet, on ne se retrouve pas nécessairement à son point de départ, mais peut-être sur un plan différent de la réalité.

**Quelle est la règle générale ?** Comment prolonge-t-on une détermination locale de la racine carrée ? Autrement dit, étant donné  $a \in \mathbf{C}^*$  et une fonction  $f(z)$  de carré  $z$  continue au voisinage de  $a$ , comment "propage-t-on" l'information jusqu'en un point  $b$  en lequel  $f$  n'est pas définie au départ ? La réponse est le *prolongement analytique le long d'un chemin*. Les données de départ en sont : le point  $a$ , la fonction  $f$ , le point  $b$  et un chemin dans  $\mathbf{C}^*$  d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$ , autrement dit, une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$  telle que  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ . La procédure est la suivante :

1. On recouvre le compact  $\text{Im } \gamma$  par un nombre fini de disques ouverts  $U_i = \overset{\circ}{D}(z_i, r_i) \subset \mathbf{C}^*$ ,  $z_i = \gamma(t_i)$ ,  $r_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, k$ , choisis de telle sorte que :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \mapsto z_0 = a, & t_k = 1 \mapsto z_k = b, \\ t_0 < t_1 < \dots < t_k, \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}, U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Le lecteur consciencieux vérifiera qu'un tel choix est en effet possible.

2. On définit  $f_0$  comme l'unique élément de  $\mathcal{F}(U_0)$  qui coïncide avec  $f$  au voisinage de  $a$  ; il suffit d'ailleurs pour cela d'imposer  $f_0(a) = f(a)$  d'après l'étude locale.
3. On appelle  $f_1, \dots, f_k$  les images successives de  $f_0$  dans  $\mathcal{F}(U_1), \dots, \mathcal{F}(U_k)$  par les bijections de "restriction-prolongement"  $\mathcal{F}(U_{i-1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_{i-1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .
4. Le résultat du *prolongement analytique de  $f$  le long de  $\gamma$*  est la fonction  $f_k$  sur  $U_k$ .

On a donc en fait défini une bijection  $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_k)$ . Il faut noter que les rayons de définition  $r_0, r_k$  de  $f_0, f_k$  n'ont pas vraiment un sens intrinsèque ; ce qui est réellement en jeu, ce sont des fonctions définies dans "un certain voisinage" (ouvert non vide) non spécifié de  $a$ , resp.  $b$ . En effet, si deux déterminations de la racine carrée coïncident en un point, elles coïncident sur tout disque centré en ce point où elles sont toutes les deux définies (cela découle encore de l'étude locale). Notre procédure opère donc en fait sur des *germes de fonctions holomorphes* (on y reviendra).

On peut démontrer que le résultat du prolongement analytique le long d'un chemin ne dépend pas du choix des disques  $U_i$  (c'est un cas particulier du *théorème de monodromie* qui sera énoncé plus loin). On peut cependant se demander si ce résultat dépend du choix du chemin. La réponse est malheureusement oui. En effet, on peut vérifier que, si l'on prolonge la détermination principale  $f$  de  $a = 1$  à  $b = 1$  le long du chemin  $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ , le résultat est  $-f$  (cf. la promenade) ; alors que si l'on prolonge  $f$  de  $a = 1$  à  $b = 1$  le long du chemin constant  $\gamma(t) = 1$ , le résultat est  $f$  (c'est trivial).

**Exercice 1.1.9** Comparer les résultats du prolongement de la détermination principale de  $a = 1$  à  $b = -1$  le long du chemin  $\gamma(t) = e^{i\pi t}$ , resp. le long du chemin  $\gamma(t) = e^{-i\pi t}$ .

Cependant, le théorème de monodromie<sup>3</sup> implique que, l'origine  $a$  et l'extrémité  $b$  étant fixées, le résultat du prolongement analytique ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin dans  $\mathbf{C}^*$ . Autrement dit, si deux chemins de  $a$  à  $b$  peuvent être continument déformés l'un en l'autre sans passer par 0, ils définissent le même prolongement analytique de la fonction  $f$ .

Reste à connaître l'effet de la non-homotopie. On raisonne comme suit : si les prolongements analytiques le long de deux chemins  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $a$  à  $b$  dans  $\mathbf{C}^*$  transforment respectivement le germe  $f$  en les germes  $f_1, f_2$ , alors le prolongement analytique le long du lacet  $\lambda := \overline{\gamma_1} \cdot \gamma_2$  transforme  $f_1$  en  $f_2$ . Rappelons que  $\lambda$  est le lacet basé en  $b$  défini par le parcours de  $\gamma_1$  à l'envers et deux fois plus vite, suivi du parcours de  $\gamma_2$  à l'endroit et deux fois plus vite. Nous sommes donc ramenés à étudier l'effet des (classes d'homotopie de) lacets. Un raisonnement du même genre (laissé au lecteur) permet même de ne considérer que les lacets de base (c'est-à-dire origine et extrémité) 1.

Comme on l'a vu dans le cours d'analyse complexe de L3, et comme on va le revoir dans le cours de topologie de M1, tout lacet  $\lambda$  de base 1 dans  $\mathbf{C}^*$  est homotope à un lacet de la forme  $t \mapsto e^{2i\pi kt}$ , où  $k \in \mathbf{Z}$  est bien déterminé par la classe d'homotopie<sup>4</sup> de  $\lambda$  : c'est l'indice de 0 par rapport à  $\lambda$ , que nous noterons  $I(0, \lambda)$ . On peut alors résumer nos conclusions :

**Proposition 1.1.10** Soit  $f$  une détermination de la racine carrée au voisinage de  $1 \in \mathbf{C}^*$  et soit  $\lambda$  un lacet de base 1 dans  $\mathbf{C}^*$ . Alors le résultat du prolongement analytique de  $f$  le long de  $\lambda$  est  $(-1)^{I(0, \lambda)} f$ .

**Exercice 1.1.11** En déduire l'énoncé analogue pour un point-base  $a \in \mathbf{C}^*$  arbitraire.

**Exercice 1.1.12** En déduire un morphisme du groupe fondamental  $\pi_1(\mathbf{C}^*, a)$  dans le groupe des permutations de  $\mathcal{F} \left( \overset{\circ}{\mathbb{D}}(a, |a|) \right)$ .

## 1.2 “Caractères”

Il s'agit des fonctions  $z \mapsto z^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Si  $\alpha \in \mathbf{Z}$ , elles se définissent sans problème (holomorphes sur  $\mathbf{C}$  si  $\alpha \in \mathbf{N}$ , holomorphes sur  $\mathbf{C}^*$  et admettant un pôle en 0 si  $\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ ; mais, dans tous les cas, uniformes). Si  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ , on trouve des fonctions algébriques qui étendent la fonction  $x \mapsto \sqrt[q]{p}$  de  $\mathbf{R}_+^*$  dans lui-même. En général, il s'agit de prolonger la fonction  $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$  qui est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , à valeurs dans  $\mathbf{C}$ .

**Lemme 1.2.1** Soit  $f$  un prolongement analytique de la fonction  $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$  sur un ouvert connexe non vide  $V$  de  $\mathbf{C}$ .

(i) Si  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$ , la fonction  $f$  vérifie l'équation algébrique :  $\forall z \in V, (f(z))^q = z^p$ .

(ii) Quel que soit  $\alpha \in \mathbf{C}$ , la fonction  $f$  vérifie l'équation différentielle :  $\forall z \in V, z f'(z) = \alpha f(z)$ .

3. Ahlfors, “Complex Analysis”, chap. 8, §1.5

4. Dieudonné, *loc. cit.*

*Preuve.* - Précisons d'abord ce que nous entendons ici par prolongement analytique : on suppose donné  $a \in \mathbf{R}_+^*$ , un disque ouvert non vide  $U_0$  de centre  $a$  et une fonction  $f_0$  holomorphe sur  $U_0$  dont la restriction à  $U_0 \cap \mathbf{R}_+^*$  est la fonction  $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ . On prolonge analytiquement  $f_0$  le long d'un chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b \in \mathbf{C}$ , et le résultat est la fonction  $f$  sur le voisinage  $V$  de  $b$ . Puisque ce sont les germes de  $f_0$  et  $f$  qui nous intéressent, on peut aussi bien supposer que  $U_0$  et  $V$  sont des disques ouverts. Nous noterons  $U_0, U_1, \dots, U_k = V$  les disques ouverts successifs de prolongement et  $f_0, f_1, \dots, f_k = f$  les prolongements successifs de  $f_0$ . Nous noterons  $f_{i,i+1}$  la restriction commune de  $f_i$  et  $f_{i+1}$  à l'ouvert connexe non vide  $U_i \cap U_{i+1}$ .

(i) Si  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$  on a  $(f(x))^q - x^p = 0$  sur l'intervalle ouvert non vide  $U_0 \cap \mathbf{R}_+^*$  centré en  $a$  donc, en vertu du principe de prolongement analytique, sur  $U_0$  (car les zéros de la fonction analytique  $(f(z))^q - z^p$  sur l'ouvert connexe  $U_0$  admettent des points d'accumulation). Comme restriction de  $f_0$  à  $U_0 \cap U_1$ , la fonction  $f_{0,1}$  vérifie la même identité. La fonction analytique  $(f_1(z))^q - z^p$  sur l'ouvert connexe  $U_1$  admet donc une restriction triviale à  $U_0 \cap U_1$ , donc elle est triviale sur  $U_1$  en vertu du principe de prolongement analytique. On a donc  $(f_1(z))^q = z^p$  identiquement sur  $U_1$ . En itérant cet argument (preuve par récurrence), on arrive ainsi jusqu'à  $f_k = f$ .

(ii) Si  $\alpha \in \mathbf{C}$  on a  $xf'(x) = \alpha f(x)$  sur  $U_0 \cap \mathbf{R}_+^*$  donc, en vertu du principe de prolongement analytique, sur  $U_0$  (car les zéros de la fonction analytique  $zf'(z) - \alpha f(z)$  sur l'ouvert connexe  $U_0$  admettent des points d'accumulation). Comme restriction de  $f_0$  à  $U_0 \cap U_1$ , la fonction  $f_{0,1}$  vérifie la même équation différentielle. La fonction analytique  $zf_1'(z) - \alpha f_1(z)$  sur l'ouvert connexe  $U_1$  admet donc une restriction triviale à  $U_0 \cap U_1$ , donc elle est triviale sur  $U_1$  (principe de prolongement analytique), *i.e.*  $zf_1'(z) = \alpha f_1(z)$  identiquement sur  $U_1$ . On conclut comme ci-dessus.  $\square$

Le principe sous-jacent aux deux démonstrations se formule ainsi : *Les relations algébriques et différentielles sont préservées par un prolongement analytique.*

Bien que toute solution de l'équation différentielle  $zf'(z) = \alpha f(z)$  ne soit pas un prolongement analytique de la fonction  $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$  (ce n'est vrai qu'à un facteur près), il sera commode d'utiliser cette équation différentielle comme critère. On posera donc, pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  :

$$\mathcal{F}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) \mid zf' - \alpha f = 0 \text{ sur } U\}.$$

(On note  $\mathcal{O}(U)$  la  $\mathbf{C}$ -algèbre des fonctions holomorphes sur  $U$ .)

**Lemme 1.2.2** (i)  $\mathcal{F}(U)$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{O}(U)$ .

(ii) Si  $U$  est connexe non vide,  $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(U) \leq 1$ .

(iii) Si  $U$  est connexe et  $U' \subset U$  est ouvert non vide, alors l'application de restriction  $f \mapsto f|_{U'}$ ,  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  est linéaire et injective.

*Preuve.* - (i) est évident (solutions d'une équation différentielle linéaire homogène).

(ii) Soit  $f_0 \in \mathcal{F}(U)$  non triviale (s'il en existe) et soit  $f \in \mathcal{F}(U)$  arbitraire. La dérivée de la fonction méromorphe  $f/f_0$  est nulle :

$$(f/f_0)' = (f'f_0 - ff_0')/f_0^2 = (zf'f_0 - fzf_0')/(zf_0^2) = (\alpha ff_0 - f\alpha f_0)/(zf_0^2) = 0.$$

Donc,  $U$  étant connexe, cette fonction est constante : donc  $\mathcal{F}(U) = \mathbf{C}f_0$  dans ce cas. (L'autre cas est celui où il n'existe pas de telle  $f_0$ , la dimension est alors nulle.)

(iii) La linéarité est évidente, l'injectivité découle directement du principe de prolongement analytique.  $\square$

Pour le moment, on n'a pas dit grand chose sur l'existence (locale ou globale) de solutions non triviales. Si  $\alpha \in \mathbf{Z}$ , il existe une solution globale non triviale sur  $\mathbf{C}$  (si  $\alpha \in \mathbf{N}$ ) ou  $\mathbf{C}^*$  (si  $\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ ). *La réciproque est vraie.* Soit en effet  $f$  une solution de l'équation différentielle  $zf' = \alpha f$  sur un voisinage ouvert épointé  $\dot{U}$  de 0 dans  $\mathbf{C}$ , autrement dit,  $\dot{U} := U \setminus \{0\}$ , où  $U$  est un voisinage ouvert de 0. Si  $f$  est non triviale, quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $f$  ne s'annule pas dans  $\dot{U}$  (principe des zéros isolés). Considérons alors un lacet circulaire simple  $\lambda(t) := re^{2i\pi t}$ , où  $r > 0$  est assez petit pour que  $\text{Im } \lambda \subset U$  et donc tel que  $f$  ne s'annule pas sur  $\text{Im } \lambda$ . Le théorème de Cauchy garantit alors que le complexe :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} \frac{\alpha}{z} dz = \alpha$$

est égal au nombre des zéros et des pôles de  $f$  (comptés avec leurs multiplicités) dans  $\overset{\circ}{D}(0, r)$ , donc à un entier.

Nous supposons désormais que  $\alpha \notin \mathbf{Z}$ . Comme dans le cas de la racine carrée, sans espoir de trouver une solution globale, nous commencerons par une recherche de solutions locales, qui sera suivie d'une étude globale.

### 1.2.1 Etude locale

Pour trouver une solution non triviale au voisinage de 1, nous considérons le système avec condition initiale :

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ zf' - \alpha f = 0. \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires complexes nous garantit l'existence d'une solution holomorphe unique sur tout disque centré en 1 et assez petit<sup>5</sup>. Mais ici, le calcul est très facile à la main. On pose  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-1)^n$  et l'on est ramené aux relations :

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ na_n + (n+1)a_{n+1} = \alpha a_n, \end{cases}$$

dont la solution unique est  $a_n = \binom{\alpha}{n}$  d'où enfin :

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(1, 1), f_0(z) := \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} (z-1)^n.$$

Si  $U = \overset{\circ}{D}(1, 1)$ , on en conclut que  $\mathcal{F}(U) = \mathbf{C}f_0$  est de dimension 1. Nous considérerons la fonction ci-dessus comme détermination principale et nous la noterons  $z^\alpha$ . On vérifiera après l'étude similaire du logarithme que  $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$  pour la détermination principale du logarithme complexe.

5. Ahlfors, "Complex Analysis", ch. 8 §4.1, th. 6, p. 300 ; Dieudonné, "Calcul infinitésimal", ch. XII §5, p. 391 ; Cartan, "Théorie élémentaire des fonctions analytiques", ch. VII §1.

Pour tout  $z_0 \neq 0$ , on vérifie alors immédiatement que la fonction  $z \mapsto (z/z_0)^\alpha$  est holomorphe sur  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$  et y satisfait l'équation différentielle, d'où la conclusion :

$$\mathcal{F}\left(\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)\right) = \mathbf{C}(z/z_0)^\alpha$$

est de dimension 1. Plus généralement, si  $V \subset U := \overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$  est un ouvert connexe non vide, du fait que  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  est linéaire injective et que  $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(V) \leq 1 = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(U)$ , on voit que  $\mathcal{F}(V)$  est de dimension 1 et engendré par la restriction à  $V$  de la fonction  $(z/z_0)^\alpha$ .

## 1.2.2 Etude globale

Pour prolonger notre détermination principale  $f_0 = z^\alpha \in \mathcal{F}(U_0)$ ,  $U_0 := \overset{\circ}{D}(1, 1)$ , le long d'un chemin  $\gamma$  de  $\gamma(0) = 1$  à  $\gamma(1) = a \in \mathbf{C}^*$ , nous supposons, par commodité, que  $\gamma$  est de classe  $C^1$  par morceaux, *i.e.* que  $\gamma$  est continue sur  $[0, 1]$  et que  $[0, 1]$  est une réunion finie de segments  $[\alpha_i, \beta_i]$  tels que  $\gamma$  soit de classe  $C^1$  sur chaque intervalle ouvert  $] \alpha_i, \beta_i [$ . (L'intérêt est de pouvoir calculer certaines intégrales.)

Comme précédemment, on sait qu'il existe une *subdivision*  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  de  $[0, 1]$  et des disques ouverts non vides  $U_i = \overset{\circ}{D}(z_i, r_i)$ ,  $z_i = \gamma(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , tels que : les  $U_i$  recouvrent  $\text{Im } \gamma$ ; pour  $i = 1, \dots, k$ , l'ouvert connexe  $U_i \cap U_{i-1}$  est non vide. Les applications de restriction  $\mathcal{F}(U_{i-1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i-1}) \cap \mathcal{F}(U_i)$  et  $\mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i-1}) \cap \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sont alors bijectives. En effet, chacune est linéaire injective, sa source est de dimension 1 et son image est de dimension au plus 1. On peut donc définir les applications de prolongement (des isomorphismes)  $\mathcal{F}(U_{i-1}) \cap \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$  puis les isomorphismes composés  $\mathcal{F}(U_{i-1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$  puis, par composition de tous ces isomorphismes, l'isomorphisme  $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_k)$  de prolongement analytique le long de  $\gamma$ . Notons  $f_1, \dots, f_k$  les prolongements successifs de  $f_0$  sur  $U_1, \dots, U_k$ . Avant de préciser ces calculs, il faut noter que chacune des fonctions  $f_i$  ne s'annule en aucun point de  $U_i$ . On peut le déduire de l'assertion d'unicité dans le théorème de Cauchy sur les équations différentielles holomorphes, ou bien de l'exercice suivant appliqué au cas  $\beta = -\alpha$ .

**Exercice 1.2.3** Soient  $f, g, h$  les fonctions obtenues par prolongement analytique de  $z^\alpha, z^\beta, z^{\alpha+\beta}$  le long de  $\gamma$ . Alors  $h = fg$ . [*Indication.* Cette relation vraie sur  $U_0$  est préservée à chaque étape du prolongement analytique.]

On considère alors les fonctions  $\phi_i(t) := f_i(\gamma(t))$ ; elles coïncident sur leurs domaines de définition communs, donc se recollent en une fonction  $\phi$  sur  $[0, 1]$ , qui est de classe  $C^1$  par morceaux et vérifie l'équation différentielle :  $\phi'(t)/\phi(t) = \alpha\gamma'(t)/\gamma(t)$ ; cela découle en effet de l'équation différentielle vérifiée par chaque  $f_i$  :

$$\phi_i'(t)/\phi_i(t) = f_i'(\gamma(t))\gamma'(t)/f_i(\gamma(t)) = (\alpha f_i(\gamma(t))/\gamma(t)) (\gamma'(t)/f_i(\gamma(t))) = \alpha\gamma'(t)/\gamma(t).$$

On en déduit la formule suivante pour  $f_k(a)$  :

$$f_k(a) = \phi(1) = \frac{\phi(1)}{\phi(0)} = \exp \int_0^1 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt = \exp \alpha \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

Notant  $C$  cette constante, on voit donc que  $f_k(z) = C(z/a)^\alpha$ . Le cas intéressant est celui où  $a = 1$ , on a donc un lacet  $\gamma$  basé en 1 et  $C = e^{2i\pi I(0, \gamma)}$ .

**Théorème 1.2.4** L'image par prolongement analytique le long d'un lacet  $\gamma$  de base 1 de la fonction  $z^\alpha$  est la fonction  $e^{2i\pi I(0,\gamma)} z^\alpha$ .

**Exercice 1.2.5** Montrer que le prolongement analytique le long des lacets de base 1 permet de définir un morphisme de groupes (que l'on décrira explicitement) :

$$\begin{cases} [\gamma] \mapsto e^{2i\pi I(0,\gamma)}, \\ \pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(\mathring{D}(1,1))). \end{cases}$$

On a noté  $[\gamma]$  la classe d'homotopie du lacet  $\gamma$ .

### 1.3 Logarithme

Il y a plusieurs approches possibles pour définir les logarithmes complexes : prolongement analytique de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , réciproque de l'exponentielle complexe (dont la définition par série entière ne pose aucun problème global), primitive de  $1/z \dots$

**Exercice 1.3.1** Démontrer que ces définitions sont essentiellement équivalentes. [*Indication.* Procéder comme dans la preuve du lemme 1.2.1.]

La condition  $\exp \log z = z$  montre que les déterminations du logarithme seront définies, au pire, à un multiple entier de  $2i\pi$  près. Autrement dit, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un ouvert connexe telles que  $\exp f(z) = \exp g(z) = z$ , alors il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que  $g(z) = f(z) + 2i\pi k$  sur  $U$ . (On peut aussi le voir en définissant les logarithmes par des intégrales le long de chemins, cf. l'exercice 1.3.4.)

**Impossibilité globale.** Dans tous les cas, il n'est pas question de définir le logarithme au voisinage (même épointé) de 0. L'impossibilité de prolonger le logarithme réel en une fonction continue sur  $\mathbf{C}^*$  découlera de l'étude globale ci-dessous. L'impossibilité d'une primitive uniforme  $f$  de  $1/z$  sur  $\mathbf{C}^*$  découle du théorème de Cauchy ; notant  $\lambda$  le lacet  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ , on aurait en effet :

$$\int_{\lambda} f'(z) dz = \begin{cases} f(1) - f(1) = 0, \\ \int_{\lambda} \frac{dz}{z} = 2i\pi. \end{cases}$$

L'impossibilité d'une fonction  $f$  continue telle que  $\exp(f(z)) = z$  sur  $\mathbf{C}^*$  peut se déduire de la section 1.1 car la fonction  $\exp(f(z)/2)$  serait une détermination globale de la racine carrée. On peut aussi raisonner directement comme suit. La fonction  $k(t) := \frac{f(e^{it}) - it}{2i\pi}$  serait continue sur  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , donc constante ; mais le calcul en  $t = 0$  et en  $t = 2\pi$  conduirait alors à une contradiction.

#### 1.3.1 Etude locale

On spécifiera le(s) logarithme(s) complexe(s) comme primitive(s) de  $1/z$ . Au voisinage de 1, on ajoute la condition initiale  $f(1) = 0$ . Posant  $z = 1 + u$ , on peut intégrer le développement en

série de  $1 + u$  et obtenir :

$$(1.3.1.1) \quad \log z = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

C'est la *détermination principale du logarithme sur  $\mathring{D}(1, 1)$* . Au voisinage d'un point arbitraire  $z_0 \in \mathbf{C}^*$ , on impose la condition initiale  $f(z_0) = w_0$ , où  $w_0 \in \mathbf{C}$  est tel que  $\exp(w_0) = z_0$ . Une solution du problème est alors donnée par la série :

$$(1.3.1.2) \quad f(z) = w_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z/z_0 - 1)^n.$$

On obtient ainsi une détermination holomorphe du logarithme sur  $\mathring{D}(z_0, |z_0|)$ .

**Calcul avec le module et l'argument.** On écrit  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$  (on a donc *choisi* un argument de  $z_0$ ) et  $w_0 = \ln r_0 + i\theta_0$ . Une détermination du logarithme compatible avec ces conditions initiales est :

$$(1.3.1.3) \quad r e^{i\theta} \mapsto \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in ]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[.$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\theta_0}$ . Sa restriction à  $\mathring{D}(z_0, |z_0|)$  est la fonction définie par la série (1.3.1.2). En particulier, pour  $r_0 = 1$  et  $\theta_0 = 0$ , on obtient la *détermination principale du logarithme sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$* , dont la restriction à  $\mathring{D}(1, 1)$  coïncide avec la fonction définie par la série (1.3.1.1).

**Exercice 1.3.2** Justifier cette affirmation.

## 1.3.2 Etude globale

On reprend la promenade telle que décrite pour la racine carrée. Si  $f_0$  désigne la détermination principale du logarithme sur  $\mathring{D}(1, 1)$  et  $f_1, f_2, f_3, f_4$  ses prolongements successifs, on sait d'avance que chaque  $f_k$  est égal à la fonction (1.3.1.3) évaluée en  $z_0 i^k$ , à une constante près de  $2i\pi\mathbf{Z}$ . Le calcul de cette constante se fait en comparant deux fonctions successives sur leur domaine commun.

**Exercice 1.3.3** Vérifier que  $f_4 = f_0 + 2i\pi$  et en déduire l'action du groupe fondamental  $\pi_1(\mathbf{C}^*, 1)$  sur l'ensemble des déterminations du logarithme en 1.

**Exercice 1.3.4** Etudier la possibilité de définir le logarithme comme intégrale le long d'un chemin  $\gamma$  de classe  $C^1$  par morceaux :

$$\log z := \int_{\gamma} \frac{du}{u}, \quad \gamma(0) = 1, \gamma(1) = z.$$

Comment cette définition dépend-elle du chemin ? Comment se recolle-t-elle avec les définitions données ci-dessus ?

**Exercice 1.3.5** Retrouver les propriétés de la racine carrée et des caractères à partir de l'étude du logarithme complexe. Par exemple, les déterminations principales du logarithme et des caractères sont reliées par la formule  $\exp(\alpha \log z) = z^\alpha$ , etc.

## 1.4 La fonction $\sqrt{1-z^2}$

Au départ, c'est une fonction définie continue sur  $[-1, 1]$  et de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ . Elle y vérifie  $w^2 + z^2 = 1$ , où  $w = f(z)$ ; cette relation sera donc encore satisfaite par tous ses prolongements analytiques. Nous recherchons donc les "déterminations de la fonction  $\sqrt{1-z^2}$ ". On sait *a priori* que, sur tout ouvert connexe non vide, il y aura 0 ou deux telles déterminations.

**Exercice 1.4.1** Justifier l'impossibilité suivante : il n'y a aucune détermination continue sur un ouvert contenant 1 ou  $-1$ .

### 1.4.1 Etude locale

Posons  $P(z, w) := w^2 + z^2 - 1$ . Le théorème des fonctions implicites complexe<sup>6</sup> nous garantit, pour tout  $(z_0, w_0) \in \mathbf{C}^2$  tel que  $P(z_0, w_0) = 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$ , l'existence d'une solution locale du système avec condition initiale :

$$\begin{cases} f(z_0) = w_0, \\ P(z, f(z)) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, si  $z_0 \neq \pm 1$  et si  $w_0$  est l'une des deux racines carrées de  $1 - z_0^2$ , il existe, dans un voisinage ouvert convenable de  $z_0$ , une unique détermination de la fonction  $\sqrt{1-z^2}$  dont la valeur en  $z_0$  soit  $w_0$ . (Naturellement, sur le même voisinage, l'unique autre détermination est l'opposée de la première.) Pratiquement, on a deux manières de calculer :

1. La composée de  $z \mapsto 1 - z^2$  et d'une détermination adéquate de la fonction racine carrée est donnée par la série  $\sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} \left( \frac{1-z^2}{1-z_0^2} - 1 \right)^n$ . Cette fonction est définie sur l'image réciproque par  $z \mapsto 1 - z^2$  du disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$ , autrement dit sur l'ouvert défini par l'inéquation  $|z^2 - z_0^2| < |1 - z_0^2|$ .
2. On choisit une détermination de  $\sqrt{1+z}$  et une détermination de  $\sqrt{1-z}$ , et on les multiplie. Les quatre couples de choix possibles ne donnent quand même que deux produits !

**Exercice 1.4.2** L'ouvert  $|z^2 - z_0^2| < |1 - z_0^2|$  est-il connexe ? (Il y a une discussion selon la valeur de  $z_0$ .)

### 1.4.2 Etude globale

Pour étudier l'ambiguïté introduite par la "monodromie", on part d'un point  $z_0 \neq \pm 1$  et d'une détermination de  $\sqrt{1-z^2}$  sur un disque ouvert de centre  $z_0$ , que l'on prolonge analytiquement le long d'un lacet  $\lambda$  de base  $z_0$  dans  $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ . Il y a (au moins) deux manières de calculer l'effet du prolongement analytique :

6. Ahlfors, "Complex Analysis", ch. 8, §2.2, lemma 1 p. 293 (sous cette forme, il jouera un rôle important dans ce cours); Cartan, "Théorie élémentaire des fonctions analytiques", prop. 6.1 du ch. IV, §5.6 et exercice 2 du ch. VII; Dieudonné, "Éléments d'analyse", vol. I, ch. X, §2; Dolbeault, "Analyse complexe", ch. 7, §2.3, prop. 2.3.4 p. 186; RW3.1, p. 645.

1. La fonction  $t \mapsto 1 - \lambda^2(t)$  est un lacet  $\mu$  de base  $1 - z_0^2$  dans  $\mathbf{C}$ . Soit  $k := I(0, \mu)$  : le prolongement analytique le long de  $\lambda$  multiplie  $\sqrt{1 - z^2}$  par  $(-1)^k$ .
2. Chaque facteur  $\sqrt{1+z}$ ,  $\sqrt{1-z}$ , n'est affecté que par les tours autour de  $-1$ , resp. de  $+1$ . Si  $k' := I(1, \lambda)$  et  $k'' := I(-1, \lambda)$ , le prolongement analytique le long de  $\lambda$  multiplie  $\sqrt{1 - z^2}$  par  $(-1)^{k'+k''}$ .

**Exercice 1.4.3** Ecrire cette conclusion sous forme d'un morphisme du groupe fondamental dans le groupe linéaire.

**Interprétation géométrique.** On peut décrire géométriquement les conclusions de notre étude globale. Si l'on évite les points de ramification  $z = \pm 1$ , le "cercle" d'équation  $z^2 + w^2 = 1$  peut être *localement* considéré comme le graphe d'une fonction  $\sqrt{1 - z^2}$  et, pour tout  $z$ , il y a, dans un petit voisinage connexe  $U$  de  $z$ , deux graphes disjoints qui composent la partie du cercle formée des points tels que  $z \in U$ .

Mais, les variables  $z, w$  étant complexes, la *courbe algébrique complexe*  $z^2 + w^2 = 1$  ne se comporte pas comme la courbe algébrique réelle  $x^2 + y^2 = 1$ , que l'on coupe en deux composantes connexes en enlevant les deux points  $(\pm 1, 0)$ . Le cercle complexe privé de ces deux points reste connexe (voir l'exercice ci-dessous). Il n'y a donc aucun espoir de le décrire globalement comme réunion de deux graphes disjoints. En fait, une courbe algébrique complexe est, en tant que variété différentielle, une surface : enlever un nombre fini de points ne peut la déconnecter. C'est ici que la topologie permet de comprendre le comportement étrange des fonctions multiformes.

**Exercice 1.4.4** Montrer que l'application suivante réalise un homéomorphisme de  $\mathbf{C}^*$  sur le cercle complexe  $z^2 + w^2 = 1$  :

$$u \mapsto (z, w) := \left( \frac{u + u^{-1}}{2}, \frac{u - u^{-1}}{2i} \right).$$

[Indication. Poser  $u := z + iw$ .]

## 1.5 Points à l'infini, points de ramification

Les *points de ramification* d'une fonction multiforme sont ceux autour desquels il y a "de la monodromie" : le prolongement analytique le long d'un lacet entourant un tel point *modifie* la détermination. Par ailleurs, l'étude globale d'une fonction (même uniforme) doit prendre en compte ses "branches infinies" ; par exemple un développement asymptotique à l'infini peut souvent s'exprimer comme un développement en série en  $1/z$ .

Riemann a découvert que le comportement à l'infini et aux points de ramification des fonctions multiformes *algébriques* était susceptible d'une description géométrique<sup>7</sup>. Nous n'examinerons donc ici que deux des quatre exemples précédents (mais il y en aura un autre à la section suivante).

**Exercice 1.5.1** Après lecture de cette section, tenter une étude analogue du logarithme au voisinage de 0 et au voisinage de  $\infty$ .

7. On peut comprendre *posteriori* le rôle privilégié des fonctions algébriques grâce à un théorème qui dit que toute surface de Riemann compacte provient d'une courbe algébrique ; voir le cours "Surfaces de Riemann compactes" de M2.

### 1.5.1 La fonction $\sqrt{z}$

Quelle que soit la détermination de  $\sqrt{z}$  sur un ouvert  $U$ , on a  $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$ , donc, si 0 est adhérent à  $U$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{z} = 0$ , et l'on peut prolonger cette détermination par continuité en 0.

De la même manière,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{z} = \infty$ . Ici il y a cependant un problème : doit-on prendre en compte les arguments, *i.e.* la direction selon laquelle  $z$  tend vers l'infini ? Suivant Riemann, on prendra le point de vue de la géométrie projective complexe, selon lequel on *compactifie* la droite complexe  $\mathbf{C}$  en lui adjoignant un point à l'infini, noté  $\infty$ . L'ensemble  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  ainsi obtenu est appelé *droite projective complexe* et noté  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ; mais on l'appelle également *sphère de Riemann* et on le note alors  $\mathbf{S}$ . Nous décrirons plus précisément l'espace topologique (et même la variété complexe)  $\mathbf{S}$  en 2.3. La méthode sera celle de la géométrie différentielle : on utilise la coordonnée  $z$  pour repérer les points d'un ouvert de  $\mathbf{C}$ , mais on devra recourir à d'autres coordonnées pour repérer les points de domaines qui contiennent  $\infty$ . Le langage des cartes et atlas se transpose très bien dans le cadre analytique (chapitre 3).

Ici, on s'en tient à une règle simple : le point à l'infini  $z = \infty$  est celui en lequel la coordonnée  $Z = 1/z$  s'annule. Comme l'image  $w = \sqrt{z}$  devient infinie en  $z = \infty$ , on va également utiliser la coordonnée  $W = 1/w$ . Il est clair que  $w^2 = z \Leftrightarrow W^2 = Z$ , donc que  $W$  est une détermination de  $\sqrt{Z}$ . De l'étude déjà faite, on peut alors conclure :

1. Il n'y a aucune détermination de  $\sqrt{z}$  continue dans un voisinage du point à l'infini.
2. Une détermination continue de  $\sqrt{z}$  dans un ouvert non borné (*i.e.* auquel  $\infty$  est adhérent) admet un prolongement continu à l'infini (de valeur  $\sqrt{\infty} := \infty$ ).

**Exercice 1.5.2** Décrire le "disque"  $|Z - 1| < 1$  de  $\mathbf{S}$  et la détermination principale sur ce disque.

### 1.5.2 La fonction $\sqrt{1 - z^2}$

Pour  $z \rightarrow \pm 1$ , on voit comme ci-dessus que  $\sqrt{1 - z^2} \rightarrow 0$  et l'on peut donc prolonger en 0 par continuité toute détermination de  $\sqrt{1 - z^2}$  sur un ouvert auquel 0 est adhérent.

De l'égalité  $|\sqrt{1 - z^2}| = |z| \sqrt{|1 - z^{-2}|}$ , on déduit que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{1 - z^2} = \infty$ . On pose donc  $Z = 1/z$ ,  $W = 1/w$ , et l'on a :

$$z^2 + w^2 = 1 \iff Z^2 + W^2 = Z^2 W^2 \iff W^2 = \frac{Z^2}{Z^2 - 1},$$

la dernière égalité ayant un sens au voisinage de  $Z = 0$  (point à l'infini). On voit alors que, pour  $|Z| < 1$ , nous avons deux déterminations opposées :

$$W = \pm iZ \sqrt{1 - Z^2} = \pm iZ(1 - Z^2/2 + \dots),$$

où les coefficients peuvent être calculés par la formule du binôme généralisé (celle là même que nous avons redécouverte aux sections 1.1 et 1.2). Puisque chacune de ces deux déterminations est holomorphe uniforme sur l'ouvert connexe  $|Z| < 1$ , qui est un voisinage de  $\infty$ , on en déduit qu'il n'y a pas de monodromie autour de  $\infty$  : le point à l'infini n'est pas un point de ramification, les deux branches sont séparées et ne se permutent pas.

## 1.6 Une fonction algébrique qui n'est pas définie par une formule

Considérons, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , l'équation d'inconnue  $w$  :

$$P(z, w) := w^3 - 3w + 2z = 0.$$

Quelles fonctions continues  $w(z)$  en sont solution ? Il s'agit encore de décrire une courbe algébrique  $P(z, w) = 0$  comme un graphe, localement ou globalement. Comme dans l'exemple traité au 1.4 du cercle complexe, un argument de connexité (exercice ci-dessous) permet de deviner l'impossibilité d'une description globale.

**Exercice 1.6.1** Montrer que  $\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$  est homéomorphe à  $\mathbf{C}$ . [*Indication.* Utiliser la bijection  $(z, w) \mapsto w$ .]

### 1.6.1 Etude locale

On invoque à nouveau le théorème des fonctions implicites utilisé au début de 1.4. Comme  $\partial P / \partial w = 3(w^2 - 1)$ , les conditions initiales  $(z_0, w_0)$  sont celles telles que  $w_0 = \pm 1$ , ce qui correspond aux points  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . En tout autre point, il y a un disque  $U$  centré en  $z_0$  et trois fonctions holomorphes  $w_i(z)$   $i = 1, 2, 3$ , telles que, pour tout  $z \in U$  :

1. les  $w_i(z)$  sont deux à deux distincts ;
2.  $P(z, w) = 0 \Leftrightarrow w \in \{w_1(z), w_2(z), w_3(z)\}$ .

Il y a donc sur  $U$  trois déterminations distinctes de  $w(z)$ . On pourrait les calculer explicitement à l'aide des formules de Cardan<sup>8</sup> mais cela ne sert pas à grand chose pour les étudier en tant que fonctions ; de plus, dans le cas général, il n'y a aucun analogue de ces formules<sup>9</sup>.

Lorsque  $z_0 = 1$ , l'équation s'écrit  $(w + 2)(w - 1)^2 = 0$  et l'on peut définir une détermination continue  $w(z)$  telle que  $w(1) = -2$  : la valeur  $z = 1$  est un point de ramification pour certaines déterminations (voir plus loin) mais pas pour celle-là. Pour étudier cette détermination au voisinage de  $z = 1$ , le plus simple est de poser  $z = 1 + u$ ,  $w = -2 + v$ , d'où l'équation  $P(1 + u, -2 + v) = v(v - 3)^2 + 2u = 0$ . Un peu d'analyse complexe élémentaire garantit l'existence d'une unique solution série entière  $v(u)$  telle que  $v(0) = 0$  et le calcul usuel sur les développements limités permet de calculer les premiers termes :

$$v = -\frac{2}{9}u + \frac{4}{243}u^2 + \dots$$

(Il suffit en fait d'itérer l'équation  $v = \frac{-2u}{9}(1 - v/3)^2$ .)

**Exercice 1.6.2** Préciser le résultat analogue en  $z = -1$ . [*Indication.* Utiliser l'imparité de  $P$ .]

---

8. RW1, p. 280.

9. E. Artin, "Galois Theory", II.E, th. 6 ; RW3.1, p. 121.

## 1.6.2 Etude globale

La question est : que se passe-t-il lorsque l'on tourne autour de l'un des points de ramification ? Tout lacet de  $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ , mettons basé en 0, est homotope à une composition de lacets dont chacun tourne seulement autour de  $+1$  ou seulement autour de  $-1$ .

Nous allons donc étudier le cas d'un tour positif autour de  $+1$  (le cas de  $-1$  s'en déduisant facilement par symétrie centrale). De plus, toujours pour des raisons topologiques<sup>10</sup>, on peut considérer le prolongement analytique le long d'un cercle centré en 1 et de petit rayon.

On pose donc  $z = 1 + u$ , où  $u$  a vocation à tourner sur un petit cercle de centre 0 ; et  $w = 1 + v$ , où  $v$  est donc une petite solution de l'équation :

$$P(1 + u, 1 + v) = v^2(v + 3) + 2u = 0.$$

On voit alors que, pour  $u$  proche de 0 :

$$v \sim i\sqrt{2}\sqrt{u},$$

où  $\sqrt{u}$  est une détermination de la racine carrée. On ne peut donc pas définir  $w(z)$  de manière continue près de  $z = +1$ , avec  $w(1) = 1$ . On doit donc introduire de petits ouverts connexes auquel adhère 1 : par exemple  $\mathring{D}(1, 1) \setminus \mathbf{R}_- e^{i\theta_0}$  (disque fendu). Sur un tel ouvert, il y a deux déterminations  $w_1(z)$  et  $w_2(z)$  qui tendent vers 1 quand  $z \rightarrow 1$ , et elles s'échangent par prolongement analytique le long d'un petit lacet autour de 1.

**Interprétation géométrique.** Nous n'avons pas totalement réglé la question : étant donnée une détermination dans un voisinage ouvert de 0, que devient son prolongement le long d'un lacet quelconque de base 0 dans  $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$  ? On y reviendra avec l'outillage des surfaces de Riemann et des revêtements. On peut déjà formuler l'image suivante. Notons  $p : (z, w) \mapsto z$  la projection de la courbe algébrique complexe  $\Gamma := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$  sur le plan des abscisses  $\mathbf{C}$ . Soit  $S_0 := \mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$  et soit  $\Gamma_0 := p^{-1}(S_0)$ . Alors la restriction  $p_0 : \Gamma_0 \rightarrow S_0$  est un *revêtement étale*<sup>11</sup> de degré 3. Cela signifie la chose suivante :

Tout point  $z \in S_0$  admet un voisinage ouvert  $U$  tel que  $p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ , les  $V_i$  étant des ouverts disjoints tels que la restriction de  $p_0$  à chaque  $V_i$  soit un homéomorphisme de  $V_i$  sur  $U$ . On dit alors que  $U$  *trivialise*  $p_0$ .

Le lien entre le prolongement analytique et ce revêtement est le suivant :

1. Chaque  $V_i$  est le graphe  $w = w_i(z)$  de l'une des trois déterminations.
2. Comme  $\Gamma_0$  est connexe (car homéomorphe à  $\mathbf{C}$  privé d'un ensemble fini, d'après l'exercice donné plus haut), le revêtement  $p_0$  n'est pas globalement trivial, *i.e.* on ne peut pas prendre  $U = S_0$  dans la définition ci-dessus : et donc on ne peut pas trouver de détermination globale de  $w(z)$ .

10. Nous renvoyons au cours de topologie de M1 pour la justification rigoureuse des arguments topologiques invoqués ici ; pour des exemples similaires traités en grand détail, voir les TD associés à ce cours ainsi que Cartan, "Théorie élémentaire des fonctions analytiques", Ch. VI §5.2.

11. C'est tout simplement un revêtement dans la terminologie du cours de topologie, mais nous introduirons une notion plus générale de "revêtement éventuellement ramifié" et nous préciserons parfois "étale" pour un revêtement qui n'est pas ramifié.

3. Comprendre comment les déterminations s'échangent par prolongement analytique revient à comprendre comment les trivialisations se recollent en un revêtement non trivial ; et la topologie de ce revêtement se lit aux points de ramification. C'est l'idée fondamentale, dûe à Riemann, selon laquelle *la géométrie globale est déterminée par les singularités*.

**Points à l'infini.** Pour toute détermination de  $w(z)$  sur un ouvert  $U$  non borné, il est clair que  $w(z) \rightarrow \infty$  lorsque  $z \rightarrow \infty$  (car si  $w$  est borné,  $z = (3w - w^3)/2$  l'est aussi). Pour étudier l'allure de la courbe à l'infini, on pose donc  $Z := 1/z$  et  $W := 1/w$ , d'où l'équation :  $Z - 3W^2Z + 2W^3 = 0$ , que l'on doit étudier au voisinage de  $Z = 0$ .

Pour  $Z = 0$ , l'équation admet une racine triple  $W = 0$ . L'étude analytique locale montre que  $W \sim \alpha \sqrt[3]{Z/2}$ , où  $\alpha^3 = 1$ . Il n'y a donc aucune détermination continue au voisinage du point à l'infini, et les trois déterminations distinctes qui existent dans un voisinage non borné s'échangent par prolongement analytique.

## 1.7 En guise de conclusion

D'abord, nous avons un *phénomène* : lorsque l'on prolonge analytiquement certaines fonctions aussi loin que possible dans le plan complexe, elles présentent "de la monodromie", c'est-à-dire des modifications qui sont fonction de la classe d'homotopie des chemins choisis pour prolonger. Il y a d'ailleurs un paradoxe à utiliser le mot "monodromie", avec son préfixe *mono* (unique) pour décrire le l'apparence multiforme de ces fonctions. En fait, le *théorème de monodromie* est bien un théorème d'unicité (du résultat du prolongement analytique, la classe d'homotopie du chemin - ou *dromos* - étant fixée) ; et l'on a gardé ce terme pour parler du comportement de telles fonctions lorsque l'on change de classe d'homotopie.

Pour comprendre le phénomène de monodromie et en prédire les conséquences, nous avons ensuite la méthode léguée par Riemann : *géométriser* la situation. On dit que le véritable lieu où vit une fonction algébrique multiforme<sup>12</sup> (sa niche écologique) n'est pas le plan complexe, mais une certaine surface "étalée" au dessus de  $\mathbf{C}$  et dont la topologie et la géométrie jouent un rôle essentiel.

Enfin, il faut noter que le véritable traitement des points à l'infini n'est pas celui que nous avons esquissé à la section 1.5, mais celui de la géométrie projective, que nous aborderons à la section 3.6 du chapitre 3.

**Exercice 1.7.1** Etudier<sup>13</sup> la fonction  $\sqrt[3]{1 - z^3}$ .

12. Le phénomène de monodromie joue également un rôle essentiel dans l'étude des équations différentielles linéaires complexes, voir par exemple Ahlfors, "Complex Analysis", ch. 8, §4 ; ou bien mon cours en ligne déjà cité.

13. Ou lire l'étude dans Cartan, *loc. cit.*.

## Chapitre 2

# Construction “à la main” des surfaces de Riemann de quelques fonctions

Dans ce chapitre, on commence à géométriser l'étude des fonctions multiformes en associant à chacun des exemples précédents une surface de Riemann. Pour pouvoir parler du comportement à l'infini, on donne une première description de la sphère de Riemann.

L'approche est ici empirique, “avec les mains” et des dessins<sup>1</sup> : la construction formelle de la surface de Riemann d'une fonction algébrique sera effectuée au chapitre 3.

Voici enfin quelques conseils de lecture, pour des approches dans le même esprit et avec de beaux dessins : “Théorie des fonctions algébriques” de Paul Appell et Edouard Goursat, Chelsea (surtout le chapitre I) ; “Algebraic Functions” de G. A. Bliss, Dover (surtout le chapitre IV) ; “Complex Functions” de G. A. Jones et D. Singerman, Cambridge (surtout le chapitre 4).

### 2.1 Surface de Riemann du logarithme

Ce n'est pas la surface de Riemann d'une fonction algébrique, et elle n'apparaîtra pratiquement plus dans la suite de ce cours. Cependant, elle joue un rôle central en mathématiques : en topologie des variétés comme exemple fondamental de revêtement universel (voir le cours de topologie de M1, deuxième semestre) ; et dans l'étude des équations différentielles linéaires dans le champ complexe (voir mon cours de M2 de 2004).

#### 2.1.1 La méthode des piles d'assiettes

L'idée est la suivante. Appelons *branche* ou *détermination* du logarithme en  $z_0 \in \mathbf{C}^*$  un couple  $(f, U)$ , où  $U$  est un petit disque ouvert<sup>2</sup> de centre  $z_0$  et  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$  qui est un prolongement analytique de la détermination principale du logarithme. Une telle fonction vérifie nécessairement  $\exp f(z) = z$  sur  $U$  : comme pour le principe de préservation des relations

---

1. Comme je ne sais pas faire ces dessins en latex, il n'y aura dans la première version de ce polycopié que des ébauches, pour le moment placées en fin de chapitre.

2. La construction peut être entreprise sur la base d'ouverts connexes arbitraires, et même de *germes*, mais pour le moment il est suffisant d'utiliser des disques.

algébriques et différentielles énoncé au début de la section 1.2 du chapitre 1, cela se démontre par récurrence sur l'indice  $i$  des disques  $U_i$  qui relie  $U_0 = \overset{\circ}{D}(1, 1)$  à  $U_k = U$  lors d'un prolongement analytique. Il en découle que, si  $(f, U)$  est une telle branche, alors, pour toutes les branches de la forme  $(g, U)$ , on a  $g - f = 2i\pi k$  pour une constante  $k \in \mathbf{Z}$ . D'après l'exercice qui suit, tous ces couples  $(f + 2i\pi k, U)$  sont bien des branches du logarithme, et l'on peut les considérer comme formant une "pile d'assiettes infinie" (indexée par  $\mathbf{Z}$ ) au dessus de l'ouvert  $U \subset \mathbf{C}$  (fig. 1 (i)).

**Exercice 2.1.1** Vérifier que la relation  $\exp f(z) = z$  sur  $U$  est une condition *suffisante* pour que  $(f, U)$  soit une branche du logarithme (*i.e.*, par définition, un prolongement analytique de la détermination principale). En déduire que, dans ce cas, chaque  $(g, U)$  de la forme indiquée ci-dessus est bien une branche du logarithme.

Tout l'enjeu est alors de former une surface globale à partir de ces éléments de surface. Cette surface sera "étalée au dessus de  $\mathbf{C}$ ", autrement dit munie d'une projection sur  $\mathbf{C}$ ; par exemple, tous les  $(f, U)$  ci-dessus se projettent sur  $U$ . La méthode pour définir cette surface globale est de définir les règles de recollement entre les éléments locaux de surface (les assiettes des différentes piles).

La première règle concerne deux éléments  $(f, U)$  et  $(g, V)$  tels que  $U \cap V \neq \emptyset$ ; noter que,  $U$  et  $V$  étant des disques,  $U \cap V$  est convexe donc automatiquement connexe. Dans ce cas, nous décidons que les éléments  $(f, U)$  et  $(g, V)$  se recollent si, et seulement si,  $g$  est le prolongement analytique direct de  $f$ ; autrement dit, si les restrictions sont égales :  $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$  (fig. 1 (ii)). Soient  $a, b$  les centres de  $U, V$ . Pour tout chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  dans  $U \cup V$ , le prolongement analytique de  $f$  le long de  $\gamma$  a pour résultat  $g$  : cela se traduit géométriquement par l'existence d'un chemin  $\bar{\gamma}$  au dessus de  $\gamma$  reliant le centre de  $(f, U)$  à celui de  $(g, V)$ .

La deuxième règle découle de la première par transitivité. Soit  $f$  une branche du logarithme sur le disque ouvert  $U$  de centre  $a$ , soit  $\gamma$  un chemin de  $a$  à  $b$  dans  $\mathbf{C}^*$  et soit  $g$  une branche du logarithme sur le disque ouvert  $V$  de centre  $b$  obtenue par prolongement analytique de  $f$  le long de  $\gamma$ . Les prolongements intermédiaires  $f_k$  sur les disques  $U_k$  fournissent des éléments de surface  $(f_k, U_k)$  tels que deux éléments consécutifs se recollent, et il y a encore un unique chemin  $\bar{\gamma}$  au dessus de  $\gamma$  reliant le centre de  $(f, U)$  à celui de  $(g, V)$  (fig. 1 (iii)).

La troisième règle est implicite et se voit sur cette figure : il n'y a pas d'autre recollement d'éléments de surface que ceux imposés par les deux premières règles. Cependant, il y a bien des recollements qui ne découlent pas de la première règle seule, autrement dit, qui n'expriment pas des prolongements analytiques directs. En effet, le prolongement de  $f$  le long d'un lacet  $\lambda$  de base  $a$  aura pour résultat une branche  $(g, U)$  au dessus du même ouvert  $U$ , donc une identification avec l'une des branches déjà définies. Si le lacet est homotopiquement trivial dans  $\mathbf{C}^*$ , on retrouve  $(f, U)$  (fig. 1 (iv)); mais si  $I(0, \lambda) \neq 0$ , on aura "changé d'étage" (fig. 1 (v)).

## 2.1.2 La méthode du parking

La méthode des piles d'assiettes est naturelle lorsque l'on prolonge la détermination principale du logarithme sur le disque  $\overset{\circ}{D}(1, 1)$ . Mais on a également défini une détermination principale du logarithme sur le plan fendu  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ . Pour faciliter la visualisation, nous choisirons une solution

intermédiaire et partons du demi-plan ouvert  $U := \mathbf{R}_+^* + \mathbf{R}i$ . De plus, cela simplifiera la définition des prolongements directs, car l'intersection de deux demi-plans est connexe (par convexité) alors que l'intersection de deux plans fendus ne l'est pas (elle est formée de deux secteurs).

Le prolongement le long du lacet fondamental  $\lambda(t) := e^{2i\pi t}$  se fait le plus facilement en quatre étapes, correspondant aux quatre quarts de tour. Les images successives de  $U_0 := U$  sont alors les demi-plans  $U_k := i^k U$ , soit :

$$U_1 = iU_0 = \mathbf{R} + \mathbf{R}_+^*i, \quad U_2 = iU_1 = \mathbf{R}_-^* + \mathbf{R}i, \quad U_3 = iU_2 = \mathbf{R} + \mathbf{R}_-^*i, \quad \text{et } U_4 = iU_3 = U_0 = U.$$

Si l'on note  $f_k$  les prolongements successifs de la détermination principale  $f_0$ , nous avons vu (section 1.3 du chapitre 1) que  $f_4 = f_0 + 2i\pi$ . Les deux éléments de surface  $(U_0, f_0)$  et  $(U_4, f_4)$  sont au dessus de  $U$  mais ils sont disjoints : en faisant un tour, on est monté d'un étage, comme dans un parking hélicoïdal (fig. 2 (i) et (ii)).

### 2.1.3 La méthode des coupures

C'est celle de Riemann. On part de la détermination principale du logarithme, notons-la  $f_0$ , sur le plan fendu  $U := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$  : cela nous donne un (gros) élément de surface  $(f_0, U)$ . Les autres déterminations du logarithme sur  $U$  sont les  $f_k := f_0 + 2i\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , d'où un empilement d'éléments de surface  $(f_k, U)$ , que Riemann appelle les "feuilles" de la surface étalée.

Il reste à préciser les règles de recollement : *chaque fois que l'on franchit une coupure, on change de feuille*. Plus précisément, si l'on part de la feuille  $(f_k, U)$  et que l'on franchit la coupure :

1. si l'on arrive par dessus (valeurs imaginaires tendant vers  $0+$ ), on passe sur la feuille  $(f_{k+1}, U)$  ; en effet, cela revient à tourner autour de 0 dans le sens positif ;
2. si l'on arrive par dessous (valeurs imaginaires tendant vers  $0-$ ), on passe sur la feuille  $(f_{k-1}, U)$  ; en effet, cela revient à tourner autour de 0 dans le sens négatif.

Voir la figure 3 (i), (ii) et (iii).

### 2.1.4 Réalisation de la surface de Riemann du logarithme

La méthode du parking suggère une description globale de notre surface ; c'est un cas exceptionnel, où l'on dispose d'une *réalisation* de la surface de Riemann d'une fonction multiforme sous forme de *surface plongée dans  $\mathbf{R}^3$*  (ici identifié à  $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ ) :

$$\Sigma := \{(re^{it}, t) \mid r > 0, t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}^* \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3.$$

Dans cette réalisation, on voit facilement en quoi la surface de Riemann résout l'ambiguïté du logarithme. On ne peut pas poser  $\log(re^{it}) := \ln r + it$  (on l'a déjà vu) ; mais on peut très bien poser  $\widetilde{\log}(re^{it}, t) := \ln r + it$  pour tout  $(re^{it}, t) \in \Sigma$ . On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widetilde{\log} & \\ \mathbf{C}^* & & \mathbf{C} \\ & \nearrow \log & \end{array}$$

L'application  $\pi$  dans ce diagramme est la projection  $(re^{it}, t) \mapsto re^{it}$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$  sur  $\mathbf{C}$ ; la flèche du log est bizarre parce que  $\log$  n'est pas une vraie fonction. La fonction  $\widetilde{\log}$  est une vraie fonction, elle est uniforme. On va voir plus bas comment faire pour qu'elle soit holomorphe.

### La projection $\pi$ est un revêtement de $\mathbf{C}^*$

Cela signifie que tout  $z_0 \in \mathbf{C}^*$  admet un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k$ , une réunion *disjointe* d'ouverts telle que les restrictions  $\pi|_{V_k} : V_k \rightarrow U$  soient des homéomorphismes. (Un tel ouvert est dit *trivialisant* pour le revêtement.) On le voit en prenant par exemple pour  $U$  le disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$ . Soit  $t_0$  un argument de  $z_0$  : tout élément  $z \in U$  admet alors un unique argument  $t \in ]t_0 - \pi/2, t_0 + \pi/2[$ ; notons temporairement  $\arg z := t$  ce dernier. Alors :

$$V_k = \{(z, \arg z + 2ki\pi) \mid z \in U\}.$$

Les ouverts utilisés dans les trois méthodes de construction de la surface de Riemann (disques de  $\mathbf{C}^*$ , demi-plans, plans fendus) sont trivialisants, de même que tout ouvert connexe inclus dans un ouvert simplement connexe de  $\mathbf{C}^*$ . Les plans fendus sont des ouverts trivialisants maximaux.

Une conséquence essentielle du fait que  $\pi$  est un revêtement est la suivante : si  $\gamma$  est un chemin de  $a$  à  $b$  dans  $\mathbf{C}^*$  et si  $x \in \Sigma$  est un antécédent de  $a$  dans  $\Sigma$ , alors il existe un unique *relèvement*  $\bar{\gamma}$  d'origine  $x$  par  $\pi$ . Ce terme signifie que  $\bar{\gamma}$  est un chemin d'origine  $x$  dans  $\Sigma$  qui se projette sur  $\gamma$ , i.e.  $\gamma = \pi \circ \bar{\gamma}$ . Cet énoncé relève du cours de topologie, mais nous le redémontrerons dans un chapitre ultérieur. La conséquence la plus importante pour nous concerne les lacets : si  $b = a$ , donc si  $\gamma$  est un lacet, il n'est pas nécessairement vrai que  $\bar{\gamma}$  soit un lacet : en fait, l'extrémité  $y$  de  $\bar{\gamma}$  est un point de  $\pi^{-1}(b) = \pi^{-1}(a)$  et il correspond à la détermination du logarithme obtenue par prolongement d'une détermination donnée en  $a$ . Il est facile d'en déduire que  $y = x$  si, et seulement si,  $I(0, \gamma) = 0$ .

De manière générale, l'énoncé de topologie ci-dessus se complète comme suit : si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins homotopes de  $a$  à  $b$ , alors leurs relèvements dans  $\Sigma$  sont homotopes et ils ont même extrémité. Le théorème de monodromie évoqué page 12 est une conséquence immédiate.

**Remarque 2.1.2** Dans le cas du revêtement  $\pi$ , la réciproque est vraie : pour que les relèvements  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$  de  $\gamma_1, \gamma_2$  aient même extrémité  $\bar{\gamma}_1(1) = \bar{\gamma}_2(1)$ , il est *nécessaire* que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient homotopes. (A noter que, par définition,  $\bar{\gamma}_1$  et  $\bar{\gamma}_2$  ont même origine  $x$ .) Comme nous le verrons, cette propriété n'est pas vérifiée par tout revêtement. (Par exemple la surface de Riemann de  $\sqrt{z}$  ne la vérifie pas, voir la section 2.4.) Elle tient à ce que  $\Sigma$  est *simplement connexe* (nous le prouvons plus bas), de sorte que  $\pi$  est le *revêtement universel* de  $\mathbf{C}^*$ .

### Les fonctions $\pi$ et $\widetilde{\log}$ sont holomorphes

Si l'on munit  $\Sigma$  de la topologie induite par celle de  $\mathbf{R}^3$ , on en fait un espace séparé et il est clair que les fonctions  $\pi$  et  $\widetilde{\log}$  sont continues sur  $\Sigma$ . Pour prouver qu'elles sont de plus holomorphes, il faut d'abord *définir* ce qu'est une fonction holomorphe (ou analytique, cela revient au même) sur la surface de Riemann  $\Sigma$ .

La méthode est celle de la géométrie différentielle : on munit  $\Sigma$  de *cartes analytiques*, qui sont des couples  $(V, \phi)$  formés d'un ouvert  $V$  de  $\Sigma$  et d'un homéomorphisme  $\phi$  de  $V$  sur un ouvert

$U = \phi(V)$  de  $\mathbf{C}$  ; il faut que les ouverts  $V$  recouvrent  $\Sigma$ . Nous prendrons ici pour cartes de  $\Sigma$  les  $(V_k, \pi|_{V_k})$  obtenus plus haut à partir des ouverts trivialisants.

On dit alors qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\Sigma$  est holomorphe en un point  $x$  de  $\Omega$  si, pour une carte  $(V, \phi)$  en  $x$  (i.e. telle que  $x \in V$ ), la fonction  $f \circ \phi^{-1}$  est holomorphe en  $\phi(x)$ . Cela a bien un sens car  $f \circ \phi^{-1}$  est définie au voisinage de  $\phi(x) \in \mathbf{C}$  et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ .

Par souci de cohérence, on voudrait que la vérification d'holomorphie de  $f$  en  $x$  ne dépende pas du choix de la carte utilisée. On impose donc une condition de compatibilité aux cartes analytiques : si l'on prend une autre carte analytique  $(V', \phi')$  en  $x$ , on exige que l'homéomorphisme  $\psi := \phi' \circ \phi^{-1}$  de  $\phi(V \cap V')$  sur  $\phi'(V \cap V')$  soit *biholomorphe* (bijectif, holomorphe et de réciproque holomorphe). Alors  $g := f \circ \phi^{-1}$  et  $g' := f \circ \phi'^{-1}$  vérifient  $g = g' \circ \psi$ , de sorte que  $g$  est holomorphe en  $\phi(x)$  si, et seulement si,  $g'$  est holomorphe en  $\phi'(x)$ . Sous cette condition, notre définition de l'holomorphie est bien cohérente.

Nos cartes  $(V_k, \pi|_{V_k})$  vérifient-elles cette condition de compatibilité ? Si l'on considère  $U = \pi(V_k)$  d'une part et  $U' = \pi(V'_\ell)$  d'autre part (avec les notations ci-dessus), il est facile de voir que l'homéomorphisme  $\psi$  de compatibilité est tout simplement l'identité de  $\pi(V_k \cap V'_\ell)$ .

Il reste à voir que  $\pi$  et  $\widetilde{\log}$  sont holomorphes. En ce qui concerne  $\pi$  c'est tautologique (mais le lecteur est prié de s'en assurer). En ce qui concerne  $\widetilde{\log}$ , cela revient à vérifier que l'application de  $\mathring{D}(r_0 e^{it_0}, r_0)$  dans  $\mathbf{C}$  définie par  $re^{it} \mapsto \ln r + it$ , avec  $t \in ]t_0 - \pi/2, t_0 + \pi/2[$ , est holomorphe, ce que nous avons déjà vu (exercice 1.3.2 du chapitre 1).

## La surface $\Sigma$ est isomorphe à $\mathbf{C}$

D'abord, l'application  $\widetilde{\log}$  est un homéomorphisme de  $\Sigma$  sur  $\mathbf{C}$ . En effet : elle est de manière évidente continue ; elle est bijective, de réciproque  $w \mapsto (e^w, \text{Im } w)$  ; cette réciproque est-elle même visiblement continue. Puisque la surface  $\Sigma$  est homéomorphe à  $\mathbf{C}$ , elle est simplement connexe et par conséquent  $\pi$  est le revêtement universel de  $\mathbf{C}^*$ .

On a déjà vu plus haut que  $\widetilde{\log}$  est holomorphe. Pour dire que c'est un *isomorphisme* (de surfaces de Riemann ...), il faut pouvoir prouver que sa réciproque  $\varepsilon$  est holomorphe. On peut définir cette propriété comme signifiant : pour toute carte  $(V, \phi)$ , la composée  $\phi \circ \varepsilon$  est holomorphe de  $\widetilde{\log}(V) \subset \mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^*$ . C'est immédiat d'après l'exercice ci-dessous.

**Exercice 2.1.3** L'application  $\phi \circ \varepsilon$  est l'exponentielle  $w \mapsto e^w$ .

## 2.2 Surface de Riemann de $\sqrt{z}$

### 2.2.1 Description informelle

**Par la méthode des piles d'assiettes.** Nous nous plaçons au dessus de  $\mathbf{C}^*$  : sur chaque disque ouvert, il y a deux branches opposées, donc (avec l'image des piles d'assiettes) deux assiettes dans la pile. La surface de Riemann de  $\sqrt{z}$  sera donc étalée au dessus de  $\mathbf{C}^*$  et la projection sera un revêtement étale de degré 2. Pour décrire cette surface, nous reprenons le petit jeu du

prolongement des branches tel qu'on peut le déduire de la section 1.1 du chapitre 1. La règle est la suivante : un tour autour de 0 (mettons dans le sens positif) fait changer de disque (puisque'il transforme une détermination en son opposée) ; un tour de plus ramène donc au premier disque ! Par exemple, en parcourant deux fois le cercle unité de 1 à 1 dans le sens positif, on relie des petits disques de centres  $i^k$  comme illustré sur la figure 4 (i). Si l'on relie de même de manière *continue* des disques de centres tous les points du cercle unité, on obtient une figure hélicoïdale qui se croise elle-même (fig. 4 (ii)). Le "squelette" de cette configuration topologique est représenté par un lacet au dessus du lacet fondamental comme dans la figure 4 (iii).

**Par la méthode du parking.** On trouve un parking hélicoïdal à deux étages, où l'on monte continument : du premier au second, puis du second au premier ... voir la figure 5.

**Par la méthode des coupures.** On pratique une coupure dans le plan ; traditionnellement, on se place sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ . La détermination fondamentale de la racine carrée sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$  correspond à un feuillet, son opposée correspond à un autre feuillet. La règle de franchissement de la coupure est ici simple : quel que soit le sens de franchissement, on change d'étage ! On obtient la figure 6 (i) (ou la figure 6 (ii), qui se rapproche de la figure 5), dans laquelle il faut cependant imaginer que la surface ne se coupe pas elle-même. *Les dessins ne représentent donc pas cette surface comme plongée dans  $\mathbf{R}^3$ .*

**Exercice 2.2.1** Cette surface admet-elle une réalisation dans  $\mathbf{R}^3$  ?

### 2.2.2 La surface étalée au dessus de $\mathbf{C}^*$

Nous noterons  $\Sigma^*$  la surface de Riemann obtenue par l'un quelconque des procédés ci-dessus. Sa projection sur  $\mathbf{C}^*$  est un revêtement (étale) de degré 2, c'est pour cela que l'on parle de "surface étalée au dessus de  $\mathbf{C}^*$ ".

Plus précisément, notant  $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  cette projection : pour tout ouvert  $U \subset \mathbf{C}^*$  "suffisamment petit", l'image réciproque  $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$  est réunion *disjointe* de deux ouverts  $V_1, V_2$  de  $\Sigma^*$  tels que les restrictions  $\pi|_{V_1}, \pi|_{V_2}$  soient des homéomorphismes de  $V_1, V_2$  sur  $U$ . Les ouverts  $U$  en question sont donc *trivialisants* pour le revêtement  $\pi$ . Dans notre cas, les ouverts trivialisants sont tout simplement les ouverts sur lesquels il y a deux déterminations distinctes de  $\sqrt{z}$  : par exemple les disques ouverts  $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$  ou les plans fendus  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\theta_0}$  ; mais, plus généralement, tous les ouverts connexes contenus dans un tel plan fendu, et même tous les ouverts contenus dans un ouvert simplement connexe de  $\mathbf{C}^*$ .

#### Uniformisation

Comme dans le cas du logarithme (section 2.1.4), on exprime le fait que "la racine carrée s'uniformise sur sa surface de Riemann" par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^* & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \sqrt{z} & \\
 \mathbf{C}^* & \xrightarrow{\sqrt{z}} & \mathbf{C}
 \end{array}$$

Nous savons que la “fonction”  $\sqrt{z}$  est “mal définie” (multiforme), il s’agit de la relever en une fonction “bien définie” (uniforme)  $\widetilde{\sqrt{z}}$ . Pour définir cette dernière, nous nous plaçons sur un petit ouvert en forme d’assiette de  $\Sigma^*$ , c’est-à-dire sur un  $(U, f)$  où  $U$  est un disque ouvert non vide de  $\mathbf{C}^*$  et où  $f$  est une détermination de la racine carrée sur  $U$ . Par définition, sur cet ouvert,  $\widetilde{\sqrt{z}}$  coïncide avec  $f$ .

**Une définition plus géométrique de l’uniformisation.** Elle repose sur le revêtement étale  $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ . Commençons par choisir un point  $p_0 \in \pi^{-1}(1)$ . Par exemple, on prend  $U := \mathring{D}(1, 1)$ ; on écrit  $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$  (union disjointe), où chaque  $V_i$  correspond à l’une des deux déterminations  $\phi_i$  de la racine carrée sur  $U$ ; et l’on choisit pour  $p_0$  l’unique point de  $V_1$  au dessus de 1, *i.e.*  $\{p_0\} = V_1 \cap \pi^{-1}(1)$ . La valeur de  $\widetilde{\sqrt{z}}$  en  $p_0$  est alors bien entendu  $\phi_1(1)$  (donc 1 ou  $-1$  selon que l’on a pris pour  $\phi_1$  la détermination principale ou son opposée). Pour définir la valeur de  $\widetilde{\sqrt{z}}$  en un point  $p$  quelconque de  $\Sigma^*$ , on choisit un chemin  $\tilde{\gamma}$  de  $p_0$  à  $p$  dans  $\Sigma^*$ ; on projette  $\tilde{\gamma}$  en un chemin  $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$  de  $\pi(p_0) = 1$  à  $\pi(p) = z$  dans  $\mathbf{C}^*$ ; on prolonge analytiquement la fonction  $\phi_1$  le long de  $\gamma$ ; et l’on obtient donc une détermination  $\phi$  de la racine carrée au voisinage de  $z$ . la valeur de la fonction  $\widetilde{\sqrt{z}}$  en ce point  $z$  est alors par définition  $\phi(z)$  (figure 7).

Pour que l’algorithme ci-dessus donne une définition cohérente, il faut que deux propriétés soient vérifiées :

1. Il existe un chemin de  $p_0$  à  $p$  : autrement dit,  $\Sigma^*$  est connexe par arcs.
2. Le résultat du prolongement analytique le long de  $\gamma$  ne dépend pas du choix du chemin  $\tilde{\gamma}$  de  $p_0$  à  $p$ .

La première propriété se voit ainsi : si  $p, p' \in \Sigma$  se projettent sur  $z, z' \in \mathbf{C}^*$ , alors tout chemin  $\gamma$  de  $z$  à  $z'$  dans  $\mathbf{C}^*$  se relève en un chemin  $\tilde{\gamma}$  qui va de  $p$  à  $p'$  ou bien à l’autre point, disons  $q'$ , de  $\pi^{-1}(z')$ . (En effet, cette propriété dite de relèvement des chemins, est partagée par tous les revêtements étales, et nous y reviendrons en détail au chapitre 7.) Par ailleurs, un lacet simple  $\lambda$  autour de 0 de base  $z'$  se relève en un chemin  $\tilde{\lambda}$  de  $q'$  à  $p'$  (ainsi d’ailleurs qu’en un chemin de  $p'$  à  $q'$ ). Selon le cas,  $\tilde{\gamma}$  ou  $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\lambda}$  relie  $p$  à  $p'$ .

La deuxième propriété se voit ainsi : si deux chemins  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  de projections respectives  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  vont de  $p_0$  à  $p$ , alors les prolongements analytiques le long des chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont bien mené à la même détermination de la racine carrée. En effet, c’est presque tautologique, puisque le “choix” de  $p$  au dessus de  $z$  équivaut au “choix” d’une des deux branches en  $z$ .

**Remarque 2.2.2** Tout de même, ce fait apparemment trivial admet une interprétation géométrique. Considérons le lacet  $\tilde{\lambda} := \tilde{\gamma}_2 \cdot (\tilde{\gamma}_1)^{-1}$  dans  $\Sigma^*$  de base  $p_0$  dans  $\Sigma^*$ , qui se projette en le lacet  $\lambda := \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1}$  de base 1 dans  $\mathbf{C}^*$ . Alors le lacet  $\lambda$  tourne un nombre pair de fois autour de 0 puisque son relèvement  $\tilde{\lambda}$  est un lacet dans  $\Sigma^*$ , donc ne change pas d’étage, donc ne permute pas les deux branches. En fait, on a une équivalence :

$$I(0, \lambda) \text{ pair} \iff \text{tout relèvement } \tilde{\lambda} \text{ de } \lambda \text{ dans } \Sigma^* \text{ est un lacet.}$$

Ainsi, contrairement au cas du logarithme (*cf.* la remarque 2.1.2 de la section 2.1), un lacet  $\lambda$  non homotopiquement trivial peut avoir pour relèvement un lacet.

**Exercice 2.2.3** Interpréter ce fait dans le langage du cours de topologie, en comparant le groupe fondamental de  $\mathbf{C}^*$  avec le groupe  $\text{Aut}(\Sigma^*/\mathbf{C}^*)$  du revêtement. [Indication. On définit un morphisme du groupe fondamental, qui est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ , sur le groupe des permutations d'une fibre, qui est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .]

### Holomorphie de $\widetilde{\sqrt{z}}$

On prend comme cartes sur  $\Sigma^*$  tous les couples  $(V_i, \pi_{V_i})$  qui se déduisent d'une trivialisations  $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$ . La preuve de compatibilité de ces cartes est la même que dans le cas du logarithme, ainsi que la preuve de l'holomorphie de  $\pi$  et de  $\widetilde{\sqrt{z}}$ .

**Remarque 2.2.4** En fait, cette dernière induit un isomorphisme (homéomorphisme biholomorphe) de  $\Sigma^*$  sur  $\mathbf{C}^*$ . Cette situation exceptionnelle est due au fait que, comme dans le cas du logarithme, la fonction multiforme que nous étudions ici est l'inverse à droite ("semi-réciproque") d'une fonction uniforme (respectivement l'exponentielle et  $z \mapsto z^2$ ).

### 2.2.3 Bouchage de trous

Pour le logarithme, comme pour la racine carrée, le point de ramification 0 joue un rôle crucial. A première vue, la différence est que l'on peut prolonger par continuité en 0 les déterminations de la racine carrée, mais pas celles du logarithme. En fait, la différence la plus importante tient au fait que, dans le cas de la racine carrée, la monodromie est d'ordre fini : l'image du groupe fondamental (isomorphe à  $\mathbf{Z}$ ) dans le groupe du revêtement est un groupe fini (isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ) ; alors que, dans le cas du logarithme, le groupe fondamental est isomorphe au groupe du revêtement. Cette finitude est caractéristique des fonctions algébriques et va nous permettre de "boucher les trous" de manière bien adaptée à l'étude géométrique.

Le bouchage de trous est une activité locale. On choisit un disque épointé de centre le point de ramification, mettons  $\mathring{\Delta} := \mathring{D}(0, 1) \setminus \{0\}$ . Notons  $\mathring{\Delta}'$  la surface de Riemann de la fonction  $\sqrt{z}$  restreinte à  $\mathring{\Delta}$ . La projection  $\pi'$  de  $\mathring{\Delta}'$  sur  $\mathring{\Delta}$  en fait un revêtement étale de degré 2 (voir figure 5). La surface  $\mathring{\Delta}'$  est connexe, et cette seule information permet de décrire  $\pi'$ , comme nous le verrons plus loin ; mais on va commencer par une approche *ad hoc*. Naturellement,  $\mathring{\Delta}'$  est un ouvert de la surface de Riemann  $\Sigma^*$  et l'on n'a fait que restreindre la projection  $\pi$  au dessus de  $\mathring{\Delta}$  ; en utilisant le diagramme d'uniformisation, il est facile de voir que la fonction  $\widetilde{\sqrt{z}}$  réalise un isomorphisme de  $\mathring{\Delta}'$  avec  $\mathring{D}(0, 1) \setminus \{0\} \subset \mathbf{C}^*$ . On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\Delta}' & \xrightarrow{\cong} & \mathring{D}(0, 1) \setminus \{0\} \\ \pi' \searrow & & \swarrow w \mapsto w^2 \\ & \mathring{\Delta} & \end{array}$$

La flèche  $w \mapsto w^2$  n'est autre que l'inverse à gauche (uniforme) de la fonction racine carrée ! Le

bouchage de trou consiste à poser  $\Delta' := \dot{\Delta}' \cup \{\text{un point}\}$  et à compléter ce diagramme en :

$$\begin{array}{ccc} \Delta' & \xrightarrow{\cong} & \overset{\circ}{D}(0,1) \\ & \searrow \bar{\pi} & \swarrow w \mapsto w^2 \\ & & \Delta \end{array}$$

On recolte ensuite la rustine  $\Delta'$  sur  $\Sigma^*$  du côté gauche, ce qui donne  $\Sigma := \Sigma^* \cup \{\text{un point}\}$  ; on recolte  $\overset{\circ}{D}(0,1)$  sur  $\mathbf{C}^*$  du côté droit, d'où le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{C} \\ & \searrow \bar{\pi} & \swarrow w \mapsto w^2 \\ & & \mathbf{C} \end{array}$$

Naturellement,  $\bar{\pi} : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}$  n'est pas un revêtement étale. (D'après le cours de topologie,  $\mathbf{C}$  étant simplement connexe, tout revêtement étale connexe de  $\mathbf{C}$  est l'identité.)  $\mathbf{C}$  est un *revêtement ramifié de degré 2* et il est isomorphe au revêtement ramifié  $w \mapsto w^2, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

Enfin, on peut faire de  $\bar{\pi}$  et de la bijection  $\Sigma \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}$  des applications holomorphes en prenant pour carte centrée sur le nouveau point de  $\Sigma$  la bijection évidente de  $\Delta'$  sur  $\overset{\circ}{D}(0,1)$ .

**Le bouchage de trous sans tricher.** Encore une fois, il s'agit de voir ce que l'on peut faire avec les seules informations topologiques et géométriques, sans utiliser des fonctions que nous connaissons à l'avance. En effet, ici tout est très facile et très explicite, mais cela ne sera pas toujours le cas ... Nous nous plaçons encore localement, au dessus de  $\dot{\Delta}$  et considérons  $\dot{\Delta}' := \pi^{-1}(\dot{\Delta})$  et la restriction  $\pi' : \dot{\Delta}' \rightarrow \dot{\Delta}$ , qui est un revêtement étale de degré 2. De plus,  $\dot{\Delta}'$  est connexe (même argument que celui donné pour  $\Sigma^*$  avant qu'on l'ait identifiée à  $\mathbf{C}^*$ ).

**Lemme 2.2.5** Soient  $\pi' : \dot{\Delta}' \rightarrow \dot{\Delta}$  et  $\pi'' : \dot{\Delta}'' \rightarrow \dot{\Delta}$  deux revêtements étales de degré 2, de source connexe, du disque unité épointé. Alors ces deux revêtements sont isomorphes. Autrement dit, il existe un homéomorphisme  $\phi : \dot{\Delta}' \rightarrow \dot{\Delta}''$  rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \dot{\Delta}' & \xrightarrow{\phi} & \dot{\Delta}'' \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi'' \\ & & \dot{\Delta} \end{array}$$

De plus, si l'on fixe  $x' \in \dot{\Delta}'$  et  $x'' \in \dot{\Delta}''$  tels que  $\pi'(x') = \pi''(x'')$ , et si l'on impose  $\phi(x') = x''$ , alors l'application  $\phi$  est unique.

Ce lemme est la conséquence d'un fait beaucoup plus général (description de tous les revêtements connexes de  $\dot{\Delta}$  et de  $\mathbf{C}^*$ ) qui sera énoncé et prouvé au chapitre 7. Son usage est le suivant. Il se trouve que l'on connaît déjà de manière explicite un revêtement étale de degré 2 de  $\dot{\Delta}$ , de source connexe : l'application  $w \mapsto w^2, \dot{\Delta} \rightarrow \dot{\Delta}$ . Notre revêtement  $\pi'$  lui est donc isomorphe.

**Exercice 2.2.6** Démontrer le lemme. [Indication. pour déterminer l'image de  $y' \in \dot{\Delta}'$ , mener un chemin de  $x'$  à  $y'$ , projeter dans  $\dot{\Delta}$  puis relever dans  $\dot{\Delta}''$ .]

## 2.3 La sphère de Riemann

Il s'agit ici d'une première approche, nous y reviendrons dans un cadre plus général au chapitre 3 ; mais nous en avons ici besoin pour parler des points à l'infini de manière plus géométrique. Nous allons ajouter un point à  $\mathbf{C}$  un point à l'infini. L'ensemble  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  obtenu est muni de plusieurs structures distinctes que nous examinerons successivement.

**Remarque 2.3.1** Il y a deux manières classiques d'aller à l'infini dans le plan. En géométrie projective réelle, on compactifie  $\mathbf{R}^2$  en lui ajoutant une "droite à l'infini" (qui est d'ailleurs elle-même une droite projective réelle, *i.e.* de la forme  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ ) et l'on obtient le plan projectif réel  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , une surface non orientable. Ce n'est pas de cette construction qu'il s'agit ici.

### La droite projective complexe

On la définit formellement comme l'ensemble des directions dans  $\mathbf{C}^2$  :

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) := \frac{\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\mathbf{C}^*}.$$

On peut y penser comme ceci : chaque direction de  $\mathbf{C}^2$ , ou, ce qui revient au même, chaque droite vectorielle, est engendrée par un couple  $(u, v) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ; et deux couples engendrent la même droite si, et seulement si, ils sont liés. L'ensemble des droites est donc en bijection naturelle avec le quotient de l'ensemble des vecteurs non nuls  $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  par l'action du groupe  $\mathbf{C}^*$ . On note  $[u : v]$  la classe de  $(u, v) \neq (0,0)$  dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  et l'on appelle  $u, v$  des coordonnées projectives du point  $[u : v]$  : mais ces coordonnées ne sont définies qu'à une homothétie près.

La droite vectorielle de vecteur directeur  $(u, v)$  rencontre en général la droite affine  $\mathbf{C} \times \{1\}$  en l'unique point  $(u/v, 1)$  de  $\mathbf{C}^2$ . La seule exception est la droite vectorielle horizontale, de vecteur directeur  $(u, 0)$ ,  $u \in \mathbf{C}^*$  arbitraire : celle-ci ne rencontre pas la droite affine, ou bien "la rencontre à l'infini". On a donc d'une part un point particulier  $[u : 0]$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , que l'on considère comme "point à l'infini" et que l'on peut noter  $\infty$  ; d'autre part une bijection entre  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{\infty\}$  et  $\mathbf{C}$ , donnée par la formule  $[u : v] \mapsto u/v$ . C'est pourquoi, on écrit parfois abusivement  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ .

### Structure topologique

Il s'agit du compactifié d'Alexandroff  $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . On le munit de la topologie dont les ouverts sont d'une part les ouverts de  $\mathbf{C}$ , d'autre part les  $\hat{\mathbf{C}} \setminus K$ , où  $K$  est un compact de  $\mathbf{C}$ . On démontre alors (cours de topologie de L3) que  $\hat{\mathbf{C}}$  est compact. Cela fonctionne d'ailleurs aussi bien avec tout espace localement compact.

**Exercice 2.3.2** Démontrer que l'espace obtenu est connexe, connexe par arcs et simplement connexe.

### Structure différentielle

On identifie  $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$  à  $\mathbf{R}^3$ , dans lequel on considère la sphère :

$$S^2 := \{(Z, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \mid |Z|^2 + t^2 = 1\}.$$

La projection stéréographique (figure 8 (i)) depuis le pôle nord  $N(0,1) \in S^2$  envoie le point  $P(Z,t) \in S^2 \setminus \{N\}$  sur l'unique point  $Q(z,0)$  du plan équatorial  $\mathbf{C} \times \{0\}$  tel que  $N, P, Q$  soient alignés. Il est facile de voir que  $z = \frac{Z}{1-t}$  et que l'on obtient ainsi une bijection de  $S^2 \setminus \{N\}$  sur

$\mathbf{C}$ , la réciproque étant donnée par la formule  $Q(z,0) \mapsto P(Z,t)$  où  $Z = \frac{2z}{|z|^2+1}$ ,  $t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$ . Cette bijection est clairement un difféomorphisme  $C^\infty$ .

On prolonge ce difféomorphisme en une bijection de  $S^2$  sur  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  qui envoie  $N$  sur  $\infty$ . Comme  $S^2$  est une variété différentielle, cela permet, par transport de structure, de faire de  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  une variété différentielle.

**Exercice 2.3.3** Vérifier que la topologie sous-jacente à cette structure différentielle est celle de la compactification d'Alexandroff et que la variété obtenue est orientable.

### Structure analytique

On va munir  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  d'un *atlas analytique* qui en fera une *surface de Riemann* notée  $\mathbf{S}$  et appelée *sphère de Riemann*. On recouvre pour cela  $\mathbf{S}$  par deux ouverts :  $U_0 := \mathbf{C}$  et  $U_\infty := \mathbf{C}^* \cup \{\infty\}$  (figure 8 (ii)). On fait de ces deux ouverts des *cartes analytiques* en les munissant d'homéomorphismes  $\phi_i$  vers des ouverts  $V_i$  de  $\mathbf{C}$ . Nous prendrons d'une part  $V_0 := \mathbf{C}$  et  $\phi_0 = \text{Id}$  ; d'autre part  $V_\infty = \mathbf{C}$  et  $\phi_\infty(z) := 1/z$ , avec la convention évidente que  $1/\infty = 0$ .

On dit maintenant qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{S}$  est holomorphe (ou analytique, cela revient au même) sur  $\Omega$  si, pour chacune des deux cartes  $(U_i, \phi_i)$  ci-dessus, l'application  $f \circ \phi_i^{-1}$  est holomorphe sur  $\phi_i(\Omega \cap U_i)$ , qui est un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Pratiquement, on teste l'holomorphie de  $f$  au voisinage de  $p \in \mathbf{S}$  comme suit :

1. Si  $p \in U_0 = \mathbf{C}$ , on regarde simplement si la fonction  $f(z)$  est holomorphe au voisinage de  $p$ .
2. Si  $p \in U_\infty = \mathbf{C}^* \cup \{\infty\}$ , on écrit  $p = 1/q$  avec  $q \in U_0$ , et  $g(z) = f(1/z)$  ; puis on regarde si  $g(z)$  est holomorphe au voisinage de  $q$ .

Naturellement, si  $p \in U_0 \cap U_\infty = \mathbf{C}^*$ , les deux tests s'appliquent et il faut qu'ils donnent la même réponse, ce qui est bien le cas : en effet,  $f(z)$  est holomorphe en  $p \in \mathbf{C}^*$  si, et seulement si,  $g(z) := f(1/z)$  est holomorphe en  $q := 1/p \in \mathbf{C}^*$ . En fait, cette cohérence tient au choix de cartes  $\phi_i$  compatibles : l'application de changement de cartes  $\phi_\infty \circ \phi_0^{-1}$  de  $\phi_0(U_0 \cap U_\infty)$  dans  $\phi_\infty(U_0 \cap U_\infty)$  est un biholomorphisme, *i.e.* elle est bijective et biholomorphe. Dans la définition de départ d'une fonction holomorphe, on a donc équivalence entre les conditions " $f \circ \phi_i^{-1}$  est holomorphe sur  $\phi_i(\Omega \cap U_i)$ " pour  $i = 0, \infty$ .

**Exercice 2.3.4** Démontrer que les seules fonctions holomorphes sur  $\mathbf{S}$  tout entier sont les constantes. [Indication. Invoquer la continuité sur un compact, puis le principe du maximum.]

## 2.4 La surface de Riemann de $\sqrt{z}$ à l'infini et partout

On va reprendre l'étude de la fonction racine carrée mais au dessus de la sphère de Riemann  $\mathbf{S}$ . D'après l'étude à l'infini au chapitre 1, section 1.5, on peut poser  $\sqrt{\infty} = \infty$  et considérer  $\infty$  comme

un point de ramification. Notons  $Z := 1/z$  la coordonnée naturelle sur l'ouvert  $U_\infty = \mathbf{C}^* \cup \{\infty\} \subset \mathbf{S}$  (donc,  $Z = 0$  au point  $\infty$ ). Sur un "disque épointé"  $\hat{\Delta}$  de centre  $\infty$ , par exemple  $0 < |Z| < 1$ , il n'y a pas de détermination globale, et chaque détermination locale sur un petit disque est transformée en son opposée par prolongement le long d'un lacet qui fait un tour autour de  $\infty$ . La portion de surface de Riemann  $\hat{\Delta}'$  au dessus de  $\hat{\Delta}$  en est donc un revêtement connexe étale de degré 2, et l'on peut "boucher le trou" comme on l'a fait en 0.

Après bouchage de trou de  $\Sigma^*$  en 0 et à l'infini, on obtient une surface de Riemann  $\bar{\Sigma}$  étalée au dessus de  $\mathbf{S}$ , autrement dit, munie d'une projection sur  $\mathbf{S}$ , que nous noterons  $\pi$ , ayant les propriétés suivantes :

1. La restriction de  $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  est un revêtement étale de degré 2, de source connexe.
2. Le revêtement  $\pi$  est ramifié au dessus de 0 et de  $\infty$ .

**Exercice 2.4.1** Démontrer à l'aide de ces propriétés que  $\bar{\Sigma}$  est une surface compacte orientable.

La théorie générale des surfaces<sup>3</sup> nous garantit alors que la surface  $\bar{\Sigma}$  a l'allure d'une sphère assortie de  $g$  anses, où  $g$  est un certain entier naturel appelé *genre* de  $g$  (voir la figure 9 (i), (ii) et (iii); les courbes  $\Gamma$  qui y sont dessinées sont expliquées plus loin, au paragraphe "Un autre argument topologique"). Nous allons tenter de nous convaincre que  $g = 0$ , autrement dit que  $\bar{\Sigma}$  est homéomorphe à une sphère. Il y a divers raisonnements pour cela, tous corrects, mais nous ne les aborderons que de manière informelle et intuitive.

### Un argument topologique

On fend la sphère de Riemann le long de la demi-droite achevée  $\overline{\mathbf{R}_+} := \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ , ce qui laisse l'ouvert simplement connexe :

$$\mathbf{S}' := \mathbf{S} \setminus \overline{\mathbf{R}_+} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+ = \mathbf{C}^* \setminus \mathbf{R}_+^*.$$

Notons  $\Sigma' := \pi^{-1}(\mathbf{S}')$ . Puisque le revêtement au dessus de  $\mathbf{C}^*$  est étale (non ramifié), le revêtement restreint  $\pi : \Sigma' \rightarrow \mathbf{S}'$  est étale de degré 2; mais, puisque  $\mathbf{S}'$  est simplement connexe, tous ses revêtements étales sont triviaux. Dans notre cas, cela signifie que  $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2$ , où  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  sont des feuilles disjointes qui s'envoient homéomorphiquement sur  $\mathbf{S}'$ . Cela correspond au fait qu'il y a bien deux déterminations globales (opposées) de la racine carrée sur  $\mathbf{S}'$ .

Les deux feuilles  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  ressemblent à des sphères fendues que l'on doit recoller le long de leurs coupures (figure 10 (i)). En fait,  $\pi^{-1}(\overline{\mathbf{R}_+})$  est formé de  $\pi^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$  (deux demi-droites ouvertes disjointes allant de 0 à  $\infty$ ) et de  $\pi^{-1}(0)$  (un seul point) et  $\pi^{-1}(\infty)$  (un seul point), donc de deux demi-droites fermées homéomorphes à  $\overline{\mathbf{R}_+}$  qui ont leurs extrémités  $0, \infty$  en commun (figure 10 (ii)). Le point subtil est que chacune de ces demi-droites fermées sépare  $\Sigma'_1$  de  $\Sigma'_2$  (règles de franchissement des coupures). Ici, seule l'imagination spatiale peut nous aider<sup>4</sup> et nous convaincre que le seul recollement possible est celui représenté sur la figure 10 (iii).

3. Voir par exemple "Topologie des surfaces" de A. Gramain, PUF.

4. En fait, il existe des outils rigoureux et efficaces comme la formule de Riemann-Hurwitz, que nous utiliserons plus tard.

## Un autre argument topologique

Nous utilisons ici un critère inventé par Riemann : parmi les surfaces de la figure 9, la sphère est caractérisée par le fait que toute courbe fermée simple  $\Gamma$  la “déconnecte”, *i.e.* a un complémentaire non connexe. Examinez les surfaces de genre  $g \geq 1$  et vérifiez que certaines courbes fermées simples  $\Gamma$  ne les déconnectent pas. Puis raisonnez sur  $\bar{\Sigma}$ . Quitte à bouger un tout petit peu la courbe, on peut supposer qu’elle évite 0 et  $\infty$ . Si elle reste sur un feuillet, il est clair qu’elle y a un intérieur et un extérieur qu’elle sépare (figure 11 (i)). Si elle franchit les coupures de changement de feuillet, il faut faire confiance à un dessin, voir la figure 11 (ii). Riemann a raffiné ces critères en définissant le “nombre de connexion” d’une surface, voir par exemple le chapitre V du livre d’Appell et Goursat.

## Un argument analytique

Il consiste simplement à étendre le diagramme commutatif d’uniformisation

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* & & \bar{\Sigma} \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\sqrt{z}} & \downarrow \pi \\ \mathbf{C}^* & \xrightarrow{\tilde{\sqrt{z}}} & \mathbf{C} \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{ccc} \bar{\Sigma} & & \mathbf{S} \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\sqrt{z}} & \downarrow \pi \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{\tilde{\sqrt{z}}} & \mathbf{S} \end{array}$$

où  $\bar{\Sigma} := \Sigma^* \cup \{0, \infty\}$ . Les applications (au sens ensembliste) sont très faciles à définir, et l’on établit sans peine la bijectivité de  $\tilde{\sqrt{z}}$  de  $\bar{\Sigma}$  sur  $\mathbf{S}$ .

**Exercice 2.4.2** Vérifier que  $\pi$  et  $\tilde{\sqrt{z}}$  sont holomorphes.

## 2.5 Quelques exemples succincts

On suppose maintenant le lecteur rodé, le traitement sera sobre et il faudra fournir soi-même les détails !

### 2.5.1 Surface de Riemann de $\sqrt{1-z^2}$

Au dessus de tout  $z \in \mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ , il y a deux branches distinctes, donc deux éléments de surface. C’est encore vrai au dessus de  $\infty$  en vertu du développement en série :

$$\sqrt{1-z^2} = iz\sqrt{1-z^{-2}} = iz(1-z^{-2}/2+\dots)$$

On a donc un revêtement  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{S}$  de degré 2, étale au dessus de  $\mathbf{S} \setminus \{+1, -1\}$  et ramifié en  $\pm 1$ . Au dessus de l’ouvert simplement connexe  $\mathbf{S}' := \mathbf{S} \setminus [-1, +1]$ , ce revêtement se décompose en deux feuillets disjoints  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  homéomorphes à  $\mathbf{S}'$ .

**Remarque 2.5.1** Cela correspond au fait analytique suivant : si  $\lambda$  est un lacet dans  $\mathbf{S}$  qui ne rencontre pas  $[-1, +1]$ , l’indice total  $I(+1, \lambda) + I(-1, \lambda)$  est pair, donc le prolongement analytique le long de  $\lambda$  n’affecte pas les branches de  $\sqrt{1-z^2}$ , donc il ne fait pas changer d’étage dans le revêtement (et le relèvement de  $\lambda$  est un lacet).

Le bouchage des trous en  $+1$  (le cas de  $-1$  est analogue) se fait en posant  $z = 1 + u$ , d'où  $1 - z^2 = -2u - u^2$ , un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert convenable  $U$  de  $1$  sur un disque ouvert  $\Delta$  de centre  $0$ . Le revêtement de  $U \setminus \{1\}$  est donc isomorphe à celui du disque épointé  $\Delta \setminus \{0\}$ , que l'on sait déjà boucher.

La surface de Riemann est donc obtenue en recollant deux sphères fendues  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  avec des règles de recollement similaires à celles utilisées pour  $\sqrt{z}$ , sauf que l'on remplace  $0, \infty$  par  $+1, -1$ . Donc  $\Sigma$  est homéomorphe à  $\mathbf{S}$ .

Le diagramme d'uniformisation est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & \\ \pi \downarrow & \searrow \sqrt{1-z^2} & \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{\sqrt{1-z^2}} & \mathbf{S} \end{array}$$

Une différence notable avec les cas précédents est que le morphisme  $\sqrt{1-z^2}$  n'est plus ici un isomorphisme avec la sphère de Riemann  $\mathbf{S}$  mais un revêtement ramifié de degré 2. En fait, il découlera des chapitres suivants que  $\Sigma$  s'identifie à la complétion projective de la courbe algébrique  $w^2 + z^2 = 1$ , et  $\pi$  et  $\sqrt{1-z^2}$  correspondent respectivement aux projections  $(z, w) \mapsto z$  et  $(z, w) \mapsto w$ .

**Exercice 2.5.2** Démontrer que  $\Sigma$  est isomorphe à  $\mathbf{S}$ . (Les arguments ci-dessus "montrent" seulement que  $\Sigma$  est *homéomorphe* à  $\mathbf{S}$ .)

**Exercice 2.5.3** Démontrer que tout revêtement connexe de degré 2 de  $\mathbf{S}$  ramifié en deux points est homéomorphe à  $\mathbf{S}$ .

### 2.5.2 Surface de Riemann de $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$

On suppose  $a, b, c$  distincts. Il y a quatre points de ramification : les points  $a, b, c$  et aussi  $\infty$ , car, en coordonnées  $Z = 1/z$  et  $W = 1/w$ , on y a  $W = \pm(Z + \frac{a+b+c}{2}Z^2 + \dots)\sqrt{Z}$ . La surface de Riemann  $\Sigma$  est<sup>5</sup> un revêtement connexe de degré 2 de  $\mathbf{S}$ , ramifié au dessus de ces quatre points et étale ailleurs. On pratique deux coupures dans  $\mathbf{S}$  : une qui joint  $a$  à  $b$ , une qui joint  $c$  à  $\infty$ . L'ouvert  $\mathbf{S}'$  restant n'est pas simplement connexe, mais la portion  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  au dessus de  $\mathbf{S}'$  se décompose tout de même en deux feuilletts disjoints. La raison en est la suivante : pour tout lacet  $\lambda$  qui ne croise aucune des deux coupures, la somme des quatre indices (de  $a, b, c$  et  $\infty$ ) est paire, donc le prolongement analytique le long de  $\lambda$  ne change pas les déterminations de  $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ , donc ne fait pas changer d'étage dans le revêtement ! L'argument topologique sous-jacent est le suivant : on ne décrit pas entièrement un revêtement connexe ramifié de  $\mathbf{S}$  en disant qu'il est de degré 2 et qu'il admet quatre points de ramification. Il faut une information supplémentaire sur le groupe des automorphismes du revêtement. Ici, cette information est fournie par la monodromie de la fonction algébrique étudiée.

5. On recourt pour la première fois (à part le dernier exercice de la section précédente) à cet abus de langage, qui deviendra fréquent, de confondre la source  $\Sigma$  du revêtement  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{S}$  avec le revêtement lui-même.

Quoiqu'il en soit, on se retrouve avec deux copies de  $S'$  à recoller le long des coupures. Les figures 12 (i) et 12 (ii) nous montrent des courbes fermées simples qui ne déconnectent pas  $\Sigma$ , qui n'est donc pas homéomorphe à  $S$ . Il y a même deux telles courbes non équivalentes  $\Gamma_i, i = 1, 2$ , et l'on montre pour chacune d'elle un chemin  $\gamma_i$  qui relie un point proche de  $\Gamma_i$  à un point proche juste de l'autre côté. En fait, le genre de cette surface est 1 comme tentent de l'illustrer les figures 12 (iii) et 12 (iv) : c'est un *tore*.

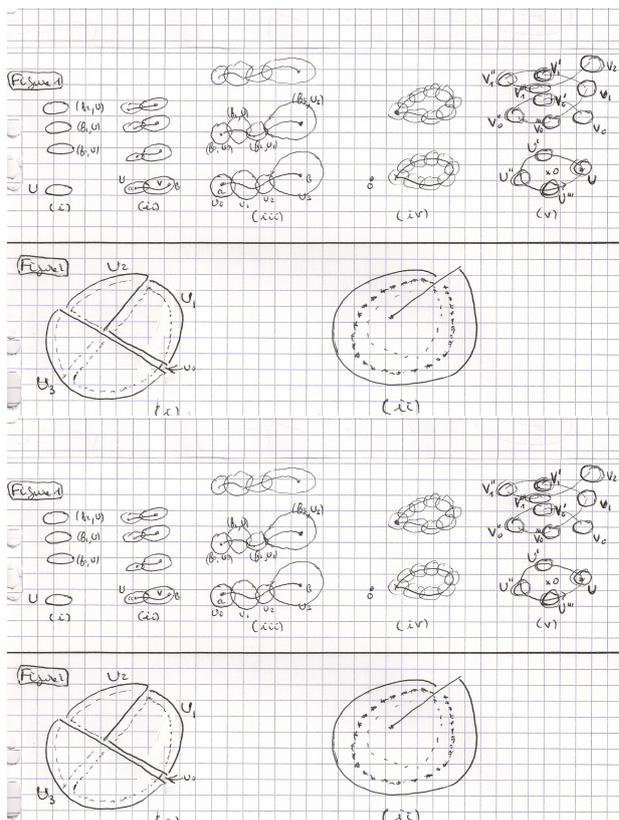
**Exercice 2.5.4** Quel est le groupe fondamental de  $S'$  ? Quel est le groupe du revêtement ?

### 2.5.3 Surface de Riemann de $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$

On suppose  $a, b, c, d$  distincts. Il y a quatre points de ramification, les points  $a, b, c, d$ , car, à l'infini, avec les coordonnées usuelles, on a  $W = \pm(Z^2 + \frac{a+b+c+d}{2}Z^3 + \dots)$ , donc deux branches distinctes. La surface de Riemann est donc encore un tore.

**Exercice 2.5.5** Décrire la surface de Riemann de  $\sqrt{z^2 + z^3}$ .

## 2.6 Illustrations





## Chapitre 3

# Surface de Riemann “abstraites”

On abandonne ici le point de vue qui associe à une fonction sa surface de Riemann (étalée au dessus de  $\mathbf{C}$  ou de  $\mathbf{S}$ ) et l'on entreprend une description intrinsèque. Dans ce chapitre, on se contentera de donner les définitions et quelques généralités en vue d'introduire des exemples importants. La théorie proprement dite commence au chapitre suivant.

La méthode suivie est celle de la géométrie différentielle : cela vaut donc la peine de réviser le début de son cours sur les variétés différentiables.

### 3.1 Définitions et premiers exemples

Soit  $X$  un espace topologique *connexe* et *non vide*.

**Cartes de  $X$ .** Il sera dorénavant sous-entendu que toutes nos cartes sont complexes de dimension 1. Ce sont donc des couples  $(U, \phi)$ , où  $U$  est un ouvert non vide de  $X$  et où  $\phi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $V := \phi(U)$  de  $\mathbf{C}$ . Une carte en  $x \in X$  est une carte  $(U, \phi)$  telle que  $x \in U$ . On dit que la carte est un disque si  $V$  est un disque ouvert de  $\mathbf{C}$  ; si de plus ce disque est de centre 0 et si  $\phi(x) = 0$ , on dit que la carte est centrée en  $x$ . Enfin, selon un abus de langage courant, on dira qu'une carte  $(U, \phi)$  est connexe (par exemple) si son domaine  $U$  l'est. Pour tout  $y \in U$ , on dit alors que  $\phi(y)$  est la coordonnée de  $y$  dans la carte  $(U, \phi)$  et  $\phi$  est appelée *coordonnée locale* en  $x$ .

**Atlas sur  $X$ .** C'est un recouvrement de  $X$  par des cartes. Toujours selon le même abus de langage, cela signifie que  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  et que  $X = \bigcup U_i$ . S'il existe un atlas sur  $X$ , c'est une surface. Comme toute variété topologique connexe,  $X$  est alors automatiquement connexe par arcs (car connexe et localement connexe par arcs).

**Cartes compatibles.** Ce sont les conditions de compatibilité entre les cartes qui permettent de préciser la structure (différentielle, analytique ...) de  $X$ . Nous dirons que les cartes  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$  sont compatibles (sous-entendu : au sens analytique) si l'homéomorphisme :

$$\begin{cases} \psi : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2), \\ z \mapsto \phi_2(\phi_1^{-1}(z)), \end{cases}$$

est *biholomorphe*, autrement dit, si  $\psi$  et  $\psi^{-1}$  sont holomorphes (figure 1); cela a bien un sens puisque  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  et  $\phi_2(U_1 \cap U_2)$  sont des ouverts de  $\mathbf{C}$ . Notez que, si  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , les cartes sont automatiquement compatibles. *Attention!* La relation de compatibilité n'est pas en général une relation d'équivalence : si l'on teste quelque chose sur  $U_1 \cap U_2$  et sur  $U_2 \cap U_3$ , cela ne dit pas ce qui se passe sur  $U_1 \cap U_3$ .

**Atlas analytique.** Un atlas  $\mathcal{A}$  est dit analytique si les cartes qui le composent sont deux à deux compatibles. Disons provisoirement que deux atlas sont compatibles si toute carte de l'une est compatible avec toute carte de l'autre : cela revient à dire que la réunion des deux atlas est encore un atlas analytique. Cette relation entre atlas est une relation d'équivalence. La réunion de tous les atlas d'une même classe est un atlas analytique qui est maximal pour l'inclusion (et même maximum dans la classe) ; on dit qu'il est saturé.

**Définition 3.1.1** Une *surface de Riemann* est une surface connexe<sup>1</sup> non vide  $X$  munie d'une classe d'équivalence d'atlas analytiques.

Ce n'est donc pas un cas particulier de surface mais une surface munie de données supplémentaires (de la même manière qu'un anneau n'est pas un cas particulier de groupe). *Attention!* Sa dimension en tant que variété réelle est 2, en tant que variété complexe c'est 1. Certains ouvrages appellent d'ailleurs "courbe holomorphe" ce que nous appellerons "surface de Riemann".

Une surface de Riemann  $X$  est nécessairement un espace topologique séparé. Soient en effet  $x, y$  deux points distincts de  $X$ . On veut démontrer qu'il existe des ouverts disjoints  $U_1 \ni x$  et  $U_2 \ni y$ . S'il existe une carte  $(U, \phi)$  telle que  $x, y \in U$ , c'est clair puisque  $U$ , homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{C}$ , est séparé. Sinon, supposons que  $x \in U$  a pour image  $z \in \phi(U)$  et soit  $U' := \phi^{-1}(\overset{\circ}{D}(z, r))$  où  $r > 0$  est assez petit pour que  $\overset{\circ}{D}(z, r) \subset \phi(U)$ . Alors, si  $0 < r' < r$ , les ouverts  $U_1 := \phi^{-1}(\overset{\circ}{D}(z, r'))$  et  $U_2 := X \setminus \phi^{-1}(\overline{D}(z, r'))$  contiennent respectivement  $x$  et  $y$  et ils sont disjoints.

**Exercice 3.1.2** Dans quel cas peut-on donner un atlas sur  $X$  sans *aucune* condition de compatibilité à vérifier ?

### 3.1.1 Quelques aspects pratiques

**La topologie de  $X$ .** Bien souvent, on se donne d'emblée une collection  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  destinée à être un atlas sur  $X$  avant même d'avoir défini sa topologie. Dans ce cas, il faut comprendre que l'on munit chaque  $U_i$  de la topologie déduite de celle de  $\phi(U_i)$  par transport de structure ; puis on munit  $X$  de la topologie dont une base d'ouverts est la réunion des topologies des  $U_i$  : cela revient à dire que  $\Omega \subset X$  est un ouvert de  $X$  si, et seulement si, chaque  $\phi_i(\Omega \cap U_i) \subset \phi_i(U_i) \subset \mathbf{C}$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Cette définition n'est cohérente que si les "cartes"  $(U_i, \phi_i)$  sont compatibles au sens topologique, autrement dit, si chaque bijection  $\phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  obtenue par restriction de  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  est un homéomorphisme. En principe, de telles compatibilités devraient être démontrées, ainsi d'ailleurs que la connexité de  $X$  ; mais habituellement on les accepte comme évidentes. Pour un exemple de ce procédé, voir la définition de la droite projective complexe et de sa structure analytique en 3.1.2.

---

1. Les livres sur le sujet n'exigent pas toujours la connexité.

**Utilisation d'un atlas particulier.** Le plus souvent, on se donnera un atlas<sup>2</sup> particulier, auquel on ajoutera à volonté des cartes compatibles selon les besoins. Cependant, il faudra prouver qu'une définition ou une construction faisant référence à un tel atlas particulier ne change pas si l'on prend un autre atlas équivalent : voir par exemple la définition des fonctions holomorphes sur  $X$  à la section 3.2.1. Naturellement, une construction effectuée sur un atlas saturé peut être considérée comme intrinsèque, puisqu'il n'y a qu'un atlas saturé dans chaque classe.

**Raffinement d'un atlas.** Si chaque ouvert  $U_i$  de l'atlas  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  admet un recouvrement ouvert  $U_i = \bigcup U'_{i,j}$ , on peut former un nouvel atlas avec les cartes  $(U'_{i,j}, \phi'_{i,j})$ , où  $\phi'_{i,j}$  désigne la restriction de  $\phi_i$  à  $U'_{i,j}$ . Par exemple, si l'on a d'une part l'atlas  $\mathcal{A}$  sur  $X$ , d'autre part un recouvrement ouvert de  $X$ , on peut en déduire un atlas  $\mathcal{A}'$  compatible avec  $\mathcal{A}$  et de plus *subordonné* au recouvrement : cela signifie que toute carte de  $\mathcal{A}'$  est contenu dans un ouvert du recouvrement.

**Exemple 3.1.3** Soient  $X$  une surface de Riemann,  $\mathcal{A}$  un atlas de  $X$  et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement (étale), où  $X$  est un espace topologique. Alors  $X$  admet un atlas formé d'ouverts trivialisants. On peut même exiger que les cartes soient des disques (*i.e.* que leurs images dans  $\mathbf{C}$  le soient).

### 3.1.2 Quelques exemples simples

**Domaines de  $\mathbf{C}$ .** Rappelons qu'un *domaine* est un ouvert connexe non vide. Si  $U$  est un domaine de  $\mathbf{C}$ , le couple  $(U, \text{Id}_U)$  est une carte (compatible avec elle-même ...) et même un atlas analytique. L'atlas saturé correspondant est la famille de tous les  $(V, \text{Id}_V)$  où  $V$  est un ouvert de  $U$ . Dorénavant, tout domaine de  $\mathbf{C}$  sera considéré comme surface de Riemann avec cette structure.

**Domaines d'une surface de Riemann.** Si  $X'$  est un domaine de la surface de Riemann  $X$ , et si  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  est un atlas analytique de cette dernière, alors  $\mathcal{A}' = ((U'_i, \phi'_i)_i)$  est un atlas analytique de  $X'$ , où l'on a posé  $U'_i := U_i \cap X'$  et où  $\phi'_i$  désigne la restriction de  $\phi_i$  à  $U'_i$ . Si l'on part d'un atlas  $\mathcal{A}_1$  sur  $X$  équivalent à  $\mathcal{A}$ , on voit facilement que l'atlas  $\mathcal{A}'_1$  qui s'en déduit sur  $X'$  est équivalent à  $\mathcal{A}'$  : la structure analytique ainsi définie sur  $X'$  ne dépend donc que de celle de  $X$ , et non du choix particulier de l'atlas  $\mathcal{A}$ . On dit que l'on a muni  $X'$  de la *structure de surface de Riemann induite par celle de  $X$* .

**Sphère de Riemann.** C'est le compactifié d'Alexandroff  $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbf{C}$ , muni des deux cartes  $(\mathbf{C}_0, \phi_0) := (\mathbf{C}, \text{Id}_{\mathbf{C}})$  et  $(\mathbf{C}_\infty, \phi_\infty)$ , où  $\mathbf{C}_\infty := \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$  et où  $\phi_0(z) := 1/z$  avec la convention que  $1/\infty = 0$ . Le changement de carte de  $\phi_0(\mathbf{C}_0 \cap \mathbf{C}_\infty) = \mathbf{C}^*$  dans  $\phi_\infty(\mathbf{C}_0 \cap \mathbf{C}_\infty) = \mathbf{C}^*$  est l'application  $z \mapsto 1/z$ , qui est bien biholomorphe. Nous noterons  $\mathbf{S}$  la surface de Riemann obtenue et l'appellerons *sphère de Riemann*.

**Droite projective complexe.** Rappelons<sup>3</sup> que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \frac{\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\mathbf{C}^*}$ , quotient de l'ensemble des vecteurs non nuls par l'action du groupe des homothéties, s'identifie naturellement à l'ensemble des directions (ou droites vectorielles) de  $\mathbf{C}^2$ . La classe dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  du couple  $(z_0, z_1) \in$

2. Désormais, sauf mention expresse du contraire, tous nos atlas seront analytiques, et ce sera sous-entendu

3. Pour des renseignements plus complets sur la droite projective, voir par exemple le Tout-en-un Ramis-Warusefel, niveau L2, module II.5.

$\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  est notée  $[z_0 : z_1]$ . De plus, on note :

$$U_0 := \{[z_0 : z_1] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid z_0 \neq 0\} \text{ et } U_1 := \{[z_0 : z_1] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid z_1 \neq 0\},$$

de sorte que, par définition,  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = U_0 \cup U_1$ . Enfin, on pose  $\phi_0([z_0 : z_1]) = z_1/z_0$  pour  $[z_0 : z_1] \in U_0$  et  $\phi_1([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$  pour  $[z_0 : z_1] \in U_1$ . Alors  $\mathcal{A} := ((U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1))$  est un atlas analytique sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . Noter qu'on récupère ici la topologie sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  à partir de l'atlas. Noter aussi que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  est "essentiellement la même chose" que  $\mathbf{S}$  : quand on aura défini le terme, on pourra démontrer que ce sont en effet deux surfaces de Riemann isomorphes.

**Remarque 3.1.4** Les coordonnées projectives  $z_0, z_1$  d'un point  $[z_0 : z_1]$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  ne sont définies qu'à un facteur non nul près. Cela n'aurait donc pas de sens de poser une condition comme  $z_0 = 1$  ou  $z_0 \neq 1$  sur les points  $[z_0 : z_1]$ , car une telle condition n'est pas invariante par l'action de  $\mathbf{C}^*$ . En revanche, les conditions  $z_i = 0, z_i \neq 0$  pour  $i = 0, 1$  sont invariantes par l'action de  $\mathbf{C}^*$  et cela a bien un sens de les utiliser pour définir des parties de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ .

**Exercice 3.1.5** Montrer que la surjection canonique  $p$  de  $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  est continue et ouverte. (En fait, on a là un quotient topologique.) En déduire que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  est connexe. Montrer que la restriction de  $p$  à la "sphère"  $\{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$  est surjective et en déduire que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  est compacte. Définir enfin un homéomorphisme de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  sur  $\mathbf{S}$ .

### 3.1.3 Un exemple plus riche : les tores complexes

Soient  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$  deux complexes qui ne sont pas  $\mathbf{R}$ -liés : donc  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ . Alors le groupe  $\Lambda := \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$  est un *réseau de  $\mathbf{C}$* , c'est-à-dire un sous-groupe engendré par une base. On démontre<sup>4</sup> qu'un tel groupe  $\Lambda$  est automatiquement abélien libre, qu'il est discret et fermé (en fait, tout sous-groupe discret de  $\mathbf{R}^2$  est fermé) et que la topologie quotient sur le groupe quotient  $T_\Lambda := \mathbf{C}/\Lambda$  fait de ce dernier un espace compact.

En fait, on a des isomorphismes de groupes topologiques :

$$T_\Lambda = \mathbf{C}/\Lambda = \frac{\mathbf{R}\omega_1 \oplus \mathbf{R}\omega_2}{\mathbf{Z}\omega_1 \oplus \mathbf{Z}\omega_2} \simeq \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}} \times \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}} \simeq S^1 \times S^1,$$

où  $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}} \simeq S^1$  est le cercle, vu comme groupe topologique. (L'isomorphisme entre  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et un cercle est explicité par l'application  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ .) L'espace  $T_\Lambda$  est appelé *tore complexe* (figure 2 (i)). On en déduit que  $T_\Lambda$ , produit de deux compacts connexes, l'est également. On verra un peu plus bas un autre argument.

#### Domaine fondamental et pavé fondamental

On notera  $p : \mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda$  la surjection canonique. On a donc :

$$\forall z, z' \in \mathbf{C}, p(z) = p(z') \iff z \equiv z' \pmod{\Lambda}.$$

4. Voir P. Samuel, "Théorie algébrique des nombres" chez Hermann ; ou bien M. Zisman, "Mathématiques pour l'agrégation", chez Dunod.

Soit  $D := \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mid 0 \leq x_1, x_2 < 1\}$ . C'est un *domaine fondamental* dans le sens suivant : pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , il existe un unique  $z' \in D$  tel que  $p(z) = p(z')$ . De manière équivalente, la restriction de  $p$  à  $D$  est une bijection de  $D$  sur  $T_\Lambda$ . Autre propriété équivalente : les translatés  $D + \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , forment une partition de  $\mathbf{C}$ . En fait, si  $z = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ , et si l'on introduit la "partie entière" (figure 2 (ii))  $[z] := [x_1]\omega_1 + [x_2]\omega_2$ , alors le représentant de  $z$  dans  $D$  est  $M(z) := z - [z]$ .

L'application  $p$  est (comme toujours pour une application de passage au quotient) continue et ouverte. Comme  $T_\Lambda$  est l'image par  $p$  du *pavé fondamental*  $P := \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ , on retrouve le fait que  $T_\Lambda$  est compact et connexe. En effet,  $P$  est lui-même compact connexe en tant qu'image continue du compact connexe  $[0, 1]^2$ .

L'application  $p$  de passage au quotient est ici un *revêtement* (étale). En effet, une conséquence du fait que  $\Lambda$  est discret est qu'il existe  $r > 0$  tel que le disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(0, r)$  soit disjoint de tous ses translatés. On en déduit, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , que le voisinage ouvert  $U := z + \overset{\circ}{D}(0, r) = \overset{\circ}{D}(z, r)$  est disjoint de tous ses translatés  $U + \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Alors l'ouvert  $V := p(U)$  est trivialisant :  $p^{-1}(V)$  est la réunion disjointe des  $U + \lambda$  et chaque  $U + \lambda$  est envoyé homéomorphiquement sur  $V$  par  $p$ . De plus, il est bien évident que les ouverts de cette forme recouvrent  $T_\Lambda$  (figure 2 (iii)).

### Petits disques

Nous dirons par commodité que le disque ouvert non vide  $U := \overset{\circ}{D}(z, r)$  est un *petit disque* s'il est disjoint de tous ses translatés  $U_\lambda := U + \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Il est facile de voir que les petits disques sont exactement ceux dont le rayon est inférieur ou égal à  $\frac{1}{2} \|\Lambda\|$ , où l'on a introduit le réel :

$$\|\Lambda\| := \inf_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \|\lambda\|.$$

Ce qui n'est pas évident, c'est que  $\|\Lambda\| > 0$ . Cette borne inférieure est même atteinte. On parle alors de "vecteurs courts" du réseau  $\Lambda$  ; il y en a en général deux, mais quatre ou six dans des cas particuliers (réseaux carrés ou hexagonaux) (figure 3 (i),(ii), (iii)).

Pour justifier l'existence de vecteurs courts, il suffit évidemment de prouver que le nombre d'éléments de  $\Lambda$  de module majoré par  $M$  donné est fini. L'argument est le suivant : on pose  $N(x_1, x_2) := |x_1\omega_1 + x_2\omega_2|$ , qui est une norme sur  $\mathbf{R}^2$ . D'après le théorème d'équivalence des normes, elle domine la norme du sup : il existe  $C > 0$  tel que  $CN(x_1, x_2) \geq \max(|x_1|, |x_2|)$  sur  $\mathbf{R}^2$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{card}\{\lambda \in \Lambda \mid \|\lambda\| \leq M\} &= \text{card}\{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid N(x_1, x_2) \leq M\} \\ &\leq \text{card}\{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) \leq CM\} \\ &\leq (2CM + 1)^2. \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.6** Un petit disque *maximal*  $U$  a pour rayon exactement  $\frac{1}{2} \|\Lambda\|$ . Ses translatés recouvrent une partie du plan avec une "densité" égale au quotient de l'aire de  $D$  par l'aire de  $P$ . Les réseaux qui maximisent cette densité d'entassement sont les réseaux hexagonaux : c'est un exercice facile et amusant de géométrie euclidienne. La même question en dimension 3 a suscité la *conjecture de Kepler*, devenue en 1998 le (très difficile) théorème de Hales.

**Exercice 3.1.7** Soit  $A$  une partie non vide quelconque de  $\mathbf{C}$ . Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La restriction de  $p : \mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda$  à  $A$  est injective.
2. Il n'existe pas  $x, y \in A$  tels que  $x - y \in \Lambda \setminus \{0\}$ .
3. Les ensembles  $A + \lambda, \lambda \in \Lambda$ , sont deux à deux disjoints.
4. Les images  $M(A + \lambda), \lambda \in \Lambda$ , des translatés de  $A$  dans le domaine fondamental sont deux à deux disjointes (voir figure 4 (i),(ii)).

Que deviennent ces propriétés si  $A := \overset{\circ}{D}(0, r)$  ?

### Atlas

Soit maintenant  $x \in T_\Lambda$ . On choisit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $x = p(z)$ . Avec les notations précédentes, le voisinage ouvert  $V := p(U)$  de  $x$  est trivialisant :  $p^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  (réunion disjointe). Noter que  $V$  est de plus connexe (image continue d'un disque). On va utiliser ce revêtement pour définir un atlas analytique sur  $T_\Lambda$ . Pour cela, toujours avec les notations qui précèdent, on considère comme carte en  $x$  chacun des couples  $(V, \phi_\lambda)$  où  $\phi_\lambda : V \rightarrow U_\lambda$  est l'application réciproque de l'homéomorphisme  $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow V$ .

Il nous faut vérifier la compatibilité de ces cartes (figure 5). Soit donc  $U'$  un autre petit disque ouvert tel que, notant  $V' = p(U')$  son image, on ait  $W := V \cap V' \neq \emptyset$  (si l'intersection est vide, il n'y a aucune condition à vérifier). Soient  $(V, \phi_\lambda)$  et  $(V', \phi'_{\lambda'})$  des cartes de domaines  $V, V'$ . L'homéomorphisme  $\psi$  de  $\phi_\lambda(W)$  sur  $\phi'_{\lambda'}(W)$  obtenu par restriction de  $\phi'_{\lambda'} \circ \phi_\lambda^{-1}$  à  $\phi_\lambda(W)$  envoie tout  $z \in \phi_\lambda(W)$  en un  $z' \in \phi'_{\lambda'}(W)$  tel que  $p(z) = p(z')$  (car  $\phi_\lambda$  et  $\phi'_{\lambda'}$  sont des réciproques de  $p$ ). On a donc  $z' - z \in \Lambda$ . L'application  $z \mapsto \psi(z) - z$  est continue sur le connexe  $\phi_\lambda(W)$  (intersection de deux disques !) et à valeurs dans l'ensemble discret  $\Lambda$ . Elle est donc constante. Conclusion : l'application de changement de carte  $\psi$  est une translation  $z \mapsto z + \lambda_0, \lambda_0 \in \Lambda$ . En particulier, c'est un biholomorphisme.

Dorénavant, nous appellerons tore complexe  $T_\Lambda$  muni de cette structure analytique.

**Exercice 3.1.8** A-t-on nécessairement  $\lambda_0 = \lambda' - \lambda$  ?

### 3.1.4 Aspects topologiques et différentiels (lien avec le cours de topologie)

#### Géométrie différentielle

Soit  $(U, \phi)$  une carte de la surface de Riemann  $X$ . Notant  $T$  l'isomorphisme naturel  $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$  de  $\mathbf{C}$  sur  $\mathbf{R}^2$  (isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels et homéomorphisme), on voit que  $\psi := T \circ \phi$  est une carte de la surface  $X$  ("surface" signifie : variété différentielle réelle de dimension 2). Un changement de carte  $\psi$  de la surface de Riemann  $X$  donne lieu à un à un changement de carte  $f := T \circ \psi \circ T^{-1}$  de la surface différentielle  $X$ . De la relation  $\psi(x + iy) = g(x, y) + ih(x, y)$ , où  $f = (g, h)$ , on déduit que la jacobienne de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est égale à  $|\psi(x_0 + iy_0)|^2 > 0$ . La surface différentielle  $X$  est donc de classe  $C^\infty$  et orientable.

## Topologie

On peut démontrer<sup>5</sup> que toute surface connexe *compacte* orientable est, à homéomorphisme près, entièrement déterminée par un entier naturel  $g$  appelé son *genre*. Si  $g = 0$ , on a une sphère ; si  $g = 1$ , un tore. Pour  $g \geq 2$ , on visualise la forme de la surface comme une sphère avec  $g$  anses (voir la figure 9 (i), (ii) et (iii) à la fin du chapitre 2).

Dans ce cours, nous donnerons une définition analytique du genre (via les “formes différentielles holomorphes”) bien adaptée aux surfaces de Riemann et nous admettrons qu’elle est équivalente à la définition topologique. Nous prouverons que toute surface de Riemann de genre 0 est isomorphe à la sphère de Riemann : il n’y a donc qu’une seule classe d’isomorphisme pour cette valeur du genre, et, dans ce cas, la structure topologique détermine la structure analytique. Nous prouverons que toute surface de Riemann de genre 1 est isomorphe à un tore complexe ; mais il y a une infinité non dénombrable de classes d’isomorphisme de tores complexes (et nous les décrirons précisément). Nous prouverons également que les “cubiques non singulières” (ou “courbes elliptiques”) sont isomorphes à des tores complexes.

**Remarque 3.1.9** Le phénomène des tores complexes qui se ressemblent topologiquement mais pas analytiquement n’est pas véritablement une nouveauté des surfaces de Riemann compactes. Si l’on considère les ouverts de  $\mathbf{C}$ , on sait que tous ceux qui sont simplement connexes et distincts de  $\mathbf{C}$  sont isomorphes (*i.e.* conformément équivalents) à  $\mathring{D}(0, 1)$  (théorème d’uniformisation de Riemann<sup>6</sup>). Considérons maintenant les couronnes ouvertes  $C(r, R) := \mathring{D}(0, R) \setminus \overline{D}(0, r)$  ( $0 < r < R$ ). On vérifie facilement qu’elles sont toutes homéomorphes entre elles (et même difféomorphes via des difféomorphismes de classe  $C^\infty$ ). Mais on peut démontrer<sup>7</sup> que  $C(r, R)$  est isomorphe à  $C(r', R')$  si, et seulement si,  $R'/r' = R/r$ .

Pour les genres  $g \geq 2$ , la situation est beaucoup plus compliquée et nous n’aborderons que le cas élémentaire des surfaces de Riemann dites “hyperelliptiques” : ce sont celles qui s’obtiennent comme revêtements ramifiés de degré 2 de la sphère de Riemann. Pratiquement, on réalise une telle surface de Riemann comme la projectifiée de la courbe algébrique affine non singulière d’équation  $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$  (les  $a_i \in \mathbf{C}$  étant deux à deux distincts), dont on démontre qu’elle est de genre  $\lfloor (g - 1)/2 \rfloor$ .

**Exercice 3.1.10** Déterminer un isomorphisme de surfaces de Riemann entre  $\mathring{D}(0, 1)$  et le demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ . On prendra ici pour définition de “isomorphisme” : bijection biholomorphe ; c’est conforme à la définition qui en sera donnée au chapitre 4.

## Topologie algébrique

Par construction, toute surface de Riemann  $X$  est connexe par arcs et localement simplement connexe. De plus, il est facile de munir son revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  d’une structure de surface de Riemann telle que  $p$  soit un “morphisme” (ce mot sera défini au chapitre 4). C’est un peu la réciproque de ce que nous avons fait pour les tores complexes. Si  $U$  est un ouvert trivialisant

5. Voir par exemple le chapitre I de “A basic introduction to Algebraic Topology”, W. S. Massey, Springer.

6. Voir le cours d’analyse complexe ; ou bien par exemple Ahlfors chap. 6 §1 ; ou Rudin chap. 14, th. 14.8.

7. Voir le cours d’analyse complexe ; ou bien par exemple Ahlfors chap. 6 §5.1 ; ou Rudin chap. 14, th. 14.22.

de  $X$  et le domaine d'une carte  $(U, \phi)$ , et si  $V$  est un ouvert de  $\tilde{X}$  tel que la restriction  $p|_V : V \rightarrow U$  soit un homéomorphisme, alors on décide que  $(V, \phi \circ p|_V)$  est une carte de  $\tilde{X}$ . On a alors trois cas<sup>8</sup> extrêmement différents :

1. Le genre de  $X$  est 0. Alors  $X$  est simplement connexe (c'est une sphère), son revêtement universel est  $\text{Id} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$  et son groupe fondamental est trivial.
2. Le genre de  $X$  est 1. Alors  $X$  est un tore complexe  $T_\Lambda$ , son revêtement universel est la projection  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$  étudiée plus haut, et son groupe fondamental est isomorphe à  $\mathbf{Z}^2$ .
3. Le genre de  $X$  est  $g \geq 2$ . On démontre alors que  $\tilde{X}$  est isomorphe (comme surface de Riemann) au demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H}$  ou au disque unité ouvert  $\mathring{D}(0, 1)$  de  $\mathbf{C}$  (comme vu dans l'exercice 3.1.10, cela revient au même). Le groupe  $G$  des automorphismes de la surface de Riemann  $\tilde{X}$  qui passent au quotient est un "groupe discret d'automorphismes" et l'on peut définir une surface de Riemann quotient  $\tilde{X}/G$  et prouver qu'elle coïncide avec  $X$ . Le groupe fondamental de  $X$  est isomorphe à  $G$ ; il est engendré par  $2g$  générateurs  $a_i, b_i, 1 \leq i \leq g$ , astreints à l'unique relation  $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \cdots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$ .

**Exercice 3.1.11** Vérifier que les cartes de  $\tilde{X}$  définies ci-dessus sont compatibles.

## 3.2 Fonctions holomorphes sur une surface de Riemann

### 3.2.1 Les principales définitions

Soient  $X$  une surface de Riemann et  $\Omega$  un ouvert de  $X$ . Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  est dite *holomorphe* en  $p_0 \in \Omega$  si, pour une carte  $(U, \phi)$  en  $p_0$ , la fonction  $\phi^{-1} \circ f$ , qui est définie sur  $\phi(\Omega \cap U)$ , est holomorphe en  $z_0 = \phi(p_0) \in \phi(\Omega \cap U)$ . Cette propriété ne dépend pas du choix de la carte en  $p_0$  : en effet, cela découle de la compatibilité de toutes les cartes analytiques sur  $X$ .

Avec les mêmes notations,  $f$  est dite *holomorphe sur  $\Omega$*  si elle est holomorphe en tout point de  $\Omega$ . De manière équivalente : pour tout atlas  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  sur  $X$ , pour tout  $i$ , la fonction  $f \circ \phi_i^{-1}$  sur  $\phi_i(\Omega \cap U_i)$  est holomorphe. Cette propriété ne dépend pas du choix de l'atlas  $\mathcal{A}$  dans la classe d'équivalence qui définit la structure de surface de Riemann sur  $X$ . Il suffit en effet de considérer le cas d'une carte  $(U', \phi')$  compatible avec  $\mathcal{A}$  : alors,  $\psi_i$  désignant le biholomorphisme de transition entre  $(U_i, \phi_i)$  et  $(U', \phi')$ , on voit que, sur l'ouvert  $\phi_i(\Omega \cap U_i \cap U')$ , les fonctions  $g := f \circ \phi_i^{-1}$  et  $h := f \circ \phi'^{-1}$  sont reliées par  $g = h \circ \psi_i$ ; l'une et l'autre sont donc holomorphes ensemble.

**Exemples 3.2.1** 1. Si  $X$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$ , avec sa structure naturelle de surface de Riemann, on retrouve la notion habituelle d'holomorphic.

2. Si  $X'$  est un domaine de  $X$ , que l'on munit de la structure induite, et si  $\Omega$  est un ouvert de  $X'$ , donc de  $X$ , la notion d'holomorphic sur  $\Omega$  est la même selon que l'on utilise l'une ou l'autre surface de Riemann.
3. Prenons  $X := \mathbf{S}$ . Une fraction rationnelle  $F \in \mathbf{C}(X)$  dont l'ensemble des pôles est  $Z \subset \mathbf{C}$  (donc un ensemble fini) définit une fonction holomorphic sur l'ouvert  $\mathbf{C} \setminus Z$ . Pour que  $F$  définisse une fonction holomorphic en  $\infty$ , il faut, et il suffit, que son degré  $\deg F$  soit négatif ou nul. (Par définition,  $\deg(P/Q) = \deg P - \deg Q$ .)

---

8. Les deux premiers doivent être considérés comme des exercices pour ceux qui suivent le cours de topologie.

4. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $X = T_\Lambda$ . L'ouvert  $p^{-1}(\Omega)$  de  $\mathbf{C}$  est invariant par les translations de vecteurs  $\lambda \in \Lambda$ . Pour toute fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ , la fonction  $\bar{f} := f \circ p$  est  $\Lambda$ -périodique ; de plus, l'application  $f \mapsto f \circ p$  est une bijection entre les fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbf{C}$  et les fonctions  $\Lambda$ -périodiques de  $p^{-1}(\Omega)$  dans  $\mathbf{C}$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  si, et seulement si  $\bar{f}$  est holomorphe sur  $p^{-1}(\Omega)$ , et l'application  $f \mapsto f \circ p$  est encore une bijection (et même un isomorphisme de  $\mathbf{C}$ -algèbres) entre les fonctions holomorphes sur  $\Omega$  et les fonctions  $\Lambda$ -périodiques holomorphes sur  $p^{-1}(\Omega)$ .

Les fonctions holomorphes sur  $\Omega$  sont en particulier continues, et elles forment une sous  $\mathbf{C}$ -algèbre de la  $\mathbf{C}$ -algèbre  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbf{C})$ , que nous noterons  $O_X(\Omega)$ . La  $\mathbf{C}$ -algèbre  $O_X(X)$  des fonctions holomorphes sur  $X$  sera notée  $O(X)$ . Si  $\Omega \subset X' \subset X$ , et si l'on munit l'ouvert  $X'$  de la structure de surface de Riemann induite, il est immédiat que les deux définitions de l'holomorphie sur  $\Omega$  sont cohérentes :  $O_X(\Omega) = O_{X'}(\Omega)$ . Enfin, si  $\Omega' \subset \Omega$ , l'application de restriction  $f \mapsto f|_{\Omega'}$  est un morphisme d'algèbres de  $O_X(\Omega)$  dans  $O_X(\Omega')$ .

**Remarque 3.2.2** On ne peut pas parler de la dérivée d'une fonction holomorphe sur un ouvert d'une surface de Riemann. En effet, le calcul de cette dérivée dépendrait du choix de la carte. (Essayer avec  $z$  et  $1/z$  sur  $\mathbf{S}^1$  !) La notion intrinsèque la plus proche est celle de forme différentielle holomorphe, qui sera définie au chapitre 4.

Nous aurons l'usage du *théorème des singularités inexistantes de Riemann*, énoncé dans l'exercice ci-dessous.

**Exercice 3.2.3** Soit  $p_0 \in \Omega$ . Si  $f$  est une fonction holomorphe et bornée sur  $\Omega \setminus \{p_0\}$ , alors elle se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\Omega$ . [Indication : Le déduire du théorème analogue sur un ouvert de  $\mathbf{C}$ , vu dans le cours d'analyse complexe de L3.]

### 3.2.2 Les principaux théorèmes

Dans une première série de résultats, on transporte à la surface de Riemann  $X$  des propriétés classiques des fonctions holomorphes dans  $\mathbf{C}$ . Dans une deuxième série, on aborde des propriétés globales qui sont plus caractéristiques des surfaces de Riemann.

#### Le principe du prolongement analytique

A tout seigneur tout honneur ! Le premier grand théorème est le principe du prolongement analytique :

**Théorème 3.2.4** Soient  $\Omega$  un domaine de la surface de Riemann  $X$  et  $\Omega' \subset \Omega$  un ouvert non vide. Alors le morphisme de restriction  $O_X(\Omega') \rightarrow O_X(\Omega)$  est injectif.

*Preuve.* - Soit  $f \in O_X(\Omega)$ . L'ensemble  $Z$  des  $p \in \Omega$  tels que  $f$  est nulle au voisinage de  $p$  est évidemment ouvert. Nous allons voir qu'il est fermé ; la conclusion sera alors immédiate, en vertu de la connexité de  $\Omega$ .

Soit  $(p_n)$  une suite de points de  $Z$  convergeant vers  $p \in \Omega$ . Soit enfin  $(U, \phi)$  une carte en  $p$ . Quitte à remplacer  $U$  par  $U \cap \Omega$ , on peut supposer que  $U \subset \Omega$ . Quitte à décaler les indices de la suite, on peut supposer que tous les  $p_n$  sont dans  $U$ . Alors les  $z_n := \phi(p_n) \in V := \phi(U)$  sont des zéros de la fonction  $f \circ \phi|_V^{-1}$ , qui est holomorphe sur  $V$ , et ils s'accumulent en  $z := \phi(p) \in V$ . D'après

la version habituelle du principe du prolongement analytique,  $f \circ \phi_V^{-1}$  est nulle au voisinage de  $z$ , donc  $f$  est nulle au voisinage de  $p$ , donc  $p \in Z$  et  $Z$  est fermé.  $\square$

**Remarque 3.2.5** On a utilisé le critère séquentiel : si une partie de  $X$  est stable par passage à la limite des suites, elle est fermée. Ce critère est ici correct parce que  $X$  est localement homéomorphe à  $\mathbf{C}$  (voir l'exercice 3.2.10).

**Corollaire 3.2.6** Si  $\Omega$  est un domaine,  $O_X(\Omega)$  est intègre.

*Preuve.* - Supposons  $fg = 0$  et  $g \neq 0$ . Soit  $p$  tel que  $g(p) \neq 0$ . Il existe un voisinage ouvert  $\Omega'$  de  $p$  sur lequel  $g$  ne s'annule pas ; donc  $f$  s'y annule, donc  $f = 0$  d'après le théorème.  $\square$

Noter que, si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbf{R}^n$ , il n'est pas vrai que  $C^\infty(\Omega, \mathbf{R})$  ou  $C^\infty(\Omega, \mathbf{C})$  soient intègres.

**Corollaire 3.2.7** Soient  $\Omega$  un domaine de  $X$  et  $f \in O_X(\Omega)$  non constante. Alors, pour tout  $a \in \mathbf{C}$ , la fibre  $f^{-1}(a)$  est discrète. En particulier, les zéros de  $f$  sont isolés.

*Preuve.* - Soient  $p_0 \in f^{-1}(a)$  et  $(U, \phi)$  une carte en  $p_0$  d'image  $V$ . Alors  $f$  n'est pas constante sur  $U$  (sinon  $f - a$  serait identiquement nulle d'après le théorème), donc  $g := f \circ \phi_V^{-1}$  n'est pas constante sur  $V$ , donc  $z_0 := \phi(p_0)$  est isolé dans sa fibre  $g^{-1}(a)$  (principe des zéros isolés dans  $\mathbf{C}$ ), donc  $p_0$  est isolé dans  $f^{-1}(a) \cap U$  donc dans  $f^{-1}(a)$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.8** Soient  $\Omega$  un domaine de  $X$  et  $f \in O_X(\Omega)$  non constante. Alors  $f$  est une application ouverte. (Théorème de l'application ouverte.)

*Preuve.* - Elle n'est constante sur aucune carte  $(U, \phi)$  d'après le théorème, donc chaque  $f \circ \phi_V^{-1}$  est ouverte d'après le théorème de l'application ouverte dans  $\mathbf{C}$ , et la conclusion s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 3.2.9** Soient  $\Omega$  un domaine de  $X$  et  $f \in O_X(\Omega)$  non constante. Alors  $|f|$  n'a pas de maximum local. (Principe du maximum.)

*Preuve.* - Comme ci-dessus, on se ramène au principe du maximum dans  $\mathbf{C}$ .  $\square$

**Exercice 3.2.10** Justifier l'usage du critère séquentiel : les fermés d'une surface de Riemann sont les sous-ensembles stables par passage à la limite des suites.

## La mère de tous les théorèmes GAGA

Le second grand théorème est la mère de tous les théorèmes GAGA <sup>9</sup> :

---

9. Du nom du célèbre article "Géométrie algébrique et géométrie analytique", dans lequel Jean-Pierre Serre démontre de nombreux théorèmes sur le principe suivant : des objets définis de manière transcendante (*i.e.* par l'analyse), si on leur impose des hypothèses de compacité, relèvent en fait de la géométrie algébrique. Ainsi, on sait depuis Riemann que toute surface de Riemann compacte est "essentiellement la même chose" qu'une courbe algébrique (mais les premières démonstrations complètes de ce théorème datent du début du XX<sup>e</sup> siècle).

**Théorème 3.2.11** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur la surface de Riemann compacte  $X$ . Alors  $f$  est constante. Autrement dit,  $O(X) = \mathbf{C}$ .

*Preuve.* - Si  $f$  n'était pas constante, d'après la série des corollaires précédents, son image serait un ouvert compact non vide de  $\mathbf{C}$ , ce qui ne se peut.  $\square$

Voici en corollaire la preuve de deux théorèmes célèbres, le théorème de Liouville et le théorème de d'Alembert-Gauß.

**Corollaire 3.2.12** Toute fonction entière bornée est constante.

*Preuve.* - Soit  $f \in O(\mathbf{C})$  bornée. La fonction  $g(z) := f(1/z)$  est holomorphe sur  $\mathbf{S} \setminus \{\infty\}$  et bornée sur  $\mathbf{S}$ . D'après le théorème des singularités inexistantes de Riemann, elle se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbf{S}$ , donc constante.  $\square$

**Corollaire 3.2.13** Tout polynôme non constant sur  $\mathbf{C}$  admet des racines.

*Preuve.* - Soit  $P$  un polynôme sans racine. Alors  $\frac{1}{P}$  est une fonction entière. Notant  $az^n$  le terme dominant de  $P$ , on voit par calcul direct que  $P \sim az^n$  à l'infini : en effet, le quotient  $P/(az^n)$  est de la forme  $1 + b_1/z + \dots + c_n/z^n$ , dont la limite à l'infini est 1. Puisque  $1/P$  est équivalent à une expression de la forme  $a^{-1}z^{-n}$ , sa limite en  $\infty$  est  $a^{-1}$  (si  $n = 0$ ) ou 0 (si  $n > 0$ ). Dans tous les cas,  $1/P$  est entière bornée et l'on peut appliquer le théorème de Liouville.  $\square$

**Corollaire 3.2.14** Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{C}$ . Toute fonction entière  $\Lambda$ -périodique est constante.

*Preuve.* - D'après l'exemple 4 de la section 3.2.1, l'application  $f \mapsto f \circ p$  est un isomorphisme de la  $\mathbf{C}$ -algèbre des fonctions entières  $\Lambda$ -périodiques sur la  $\mathbf{C}$ -algèbre  $O(T_\Lambda) = \mathbf{C}$ .  $\square$

### 3.3 Surface de Riemann d'une fonction "multiforme"

#### 3.3.1 Éléments fonctionnels et germes analytiques

On appellera *élément fonctionnel (analytique)* un couple  $(\Omega, f)$ , où  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbf{C}$  et où  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  est holomorphe. On appellera *germe analytique* ou *branche analytique* en  $z_0 \in \mathbf{C}$  une classe d'équivalence d'éléments fonctionnels  $(\Omega, f)$  tels que  $z_0 \in \Omega$  pour la relation d'équivalence suivante :

$$(\Omega_1, f_1) \sim (\Omega_2, f_2) \iff \exists U \subset \Omega_1 \cap \Omega_2, \text{ voisinage ouvert de } z_0 : (f_1)|_U = (f_2)|_U.$$

La classe d'un élément fonctionnel  $(\Omega, f)$  est notée  $[f, z_0]$  et appelée *germe de  $f$  en  $z_0$* . Le vocabulaire usuel des relations d'équivalences s'applique ici : par exemple, on dit que  $(\Omega, f)$  est un représentant de  $[f, z_0]$ , etc. Les contraintes de preuve s'appliquent aussi : si l'on veut démontrer une propriété du germe  $[f, z_0]$ , on commence presque toujours par en choisir un représentant  $(\Omega, f)$ , mais il faudra peut-être vérifier que le choix de ce représentant est anodin.

Les germes analytiques en  $z_0$  forment une  $\mathbf{C}$ -algèbre que nous noterons  $\mathcal{O}_{\mathbf{C},z_0}$ . Les opérations  $y$  sont définies comme suit. Soient  $[f_1, z_0]$  et  $[f_2, z_0]$  deux éléments de  $\mathcal{O}_{\mathbf{C},z_0}$ , et choisissons-leur respectivement des représentants  $(\Omega_1, f_1)$  et  $(\Omega_2, f_2)$ . Comme on ne peut pas additionner directement  $f_1$  et  $f_2$  (leurs domaines de définition sont différents), on note enfin  $g_1 := (f_1)|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  et  $g_2 := (f_2)|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  les restrictions au domaine commun de définition (qui est un voisinage ouvert de  $z_0$ ). Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ , on posera :

$$\begin{aligned}\lambda_1[f_1, z_0] + \lambda_2[f_2, z_0] &:= [\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, z_0], \\ [f_1, z_0] \cdot [f_2, z_0] &:= [g_1 \cdot g_2, z_0], \\ [f, z_0]' &:= [f', z_0].\end{aligned}$$

Naturellement, on *devrait* vérifier que ces définitions ne dépendent que des germes  $[f_1, z_0]$ ,  $[f_2, z_0]$ , et pas du choix des représentants  $(\Omega_1, f_1)$ ,  $(\Omega_2, f_2)$ .

En fait,  $\mathcal{O}_{\mathbf{C},z_0}$  est un objet bien connu. Associons à tout élément fonctionnel  $(\Omega, f)$  en  $z_0$  le développement en série entière de  $f$  au voisinage de  $z_0$  :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Il est clair que deux éléments fonctionnels ont même germe si, et seulement si, les développements en série entière sont les mêmes. On obtient ainsi un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C},z_0} \simeq \mathbf{C}\{z - z_0\}$$

de la  $\mathbf{C}$ -algèbre  $\mathcal{O}_{\mathbf{C},z_0}$  des germes analytiques en  $z_0$  sur la  $\mathbf{C}$ -algèbre  $\mathbf{C}\{z - z_0\}$  des séries entières en la variable  $z - z_0$  (de rayon de convergence non nul mais non précisé).

### 3.3.2 Prolongement analytique le long d'un chemin

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin (toujours continu, on ne le précisera pas). Soit  $[f, a]$  un germe analytique en  $a := \gamma(0)$ . On dit que *le prolongement analytique de  $[f, a]$  le long de  $\gamma$  est possible* s'il existe :

- Une subdivision  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ ,
- Des éléments fonctionnels  $(\Omega_1, f_1), \dots, (\Omega_k, f_k)$  ;

tels que :

1.  $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subset \Omega_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  ;
2. Le germe de  $(\Omega_1, f_1)$  en  $a = \gamma(s_0) \in \Omega_1$  est  $[f, a]$  ;
3. Pour  $i = 1, \dots, k-1$ , les restrictions de  $f_i$  et  $f_{i+1}$  à  $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$  (ouvert non vide puisqu'il contient  $\gamma(s_i)$ ) coïncident.

Les principaux théorèmes<sup>10</sup> sont : l'unicité du prolongement analytique ; le théorème de monodromie ; et la permanence des relations algébriques et différentielles.

**Théorème 3.3.1** *Si le prolongement analytique de  $[f, a]$  le long de  $\gamma$  est possible, le germe  $[f_k, \gamma(1)]$  est uniquement déterminé.*

10. Pour leurs démonstrations, voir Ahlfors, "Complex Analysis", chap. 8, §1 ; ou bien Rudin, "Real and complex Analysis", 16.9.

Autrement dit, il ne dépend que du chemin, et pas des autres choix. Notant  $b := \gamma(1)$  et  $g := f_k$ , nous dirons que  $[g, b]$  est le résultat du prolongement (analytique) de  $[f, a]$  le long de  $\gamma$ , et nous noterons  $[f, a]^\gamma := [g, b]$ . Le choix d'une notation en exposant est lié à la manière dont nous avons choisi de noter la composition des chemins, comme l'illustre le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.2** *Si le chemin  $\gamma$  va de  $a$  à  $b$  et le chemin  $\gamma'$  de  $b$  à  $c$ , alors, sous réserve que les prolongements analytiques soient possibles, on a :*

$$([f, a]^\gamma)^{\gamma'} = [f, a]^{\gamma \cdot \gamma'}.$$

*Preuve.* - C'est évident en accollant les subdivisions et en renumérotant.  $\square$

**Théorème 3.3.3** *Soient  $U$  un domaine de  $\mathbf{C}$  et  $[f, a]$  un germe en  $a \in U$ . On suppose que le prolongement analytique de  $[f, a]$  est possible le long de tout chemin de  $a$  à  $b \in U$  dont l'image est contenue dans  $U$ . Alors, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins homotopes de  $a$  à  $b$ , on a :*

$$[f, a]^{\gamma_1} = [f, a]^{\gamma_2}.$$

*Autrement dit, le résultat du prolongement (analytique) de  $[f, a]$  le long de  $\gamma$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ .*

Si l'on note  $[\gamma]$  cette classe d'homotopie, on pourra donc poser  $[f, a]^{[\gamma]} := [f, a]^\gamma$ .

**Corollaire 3.3.4** *Avec les mêmes notations, on suppose que le prolongement analytique de  $[f, a]$  est possible le long de tout lacet de base  $a$  dans  $U$ . Soit  $E$  l'ensemble des prolongements analytiques de  $[f, a]$  le long de ces lacets. Alors l'application*

$$\begin{cases} \pi_1(U, a) \times E \rightarrow E, \\ ([\gamma], [g, b]) \mapsto [g, b]^{[\gamma]}, \end{cases}$$

*définit une action à droite du groupe fondamental  $\pi_1(U, a)$  sur l'ensemble  $E$ .*

*Preuve.* - Cela ne fait que traduire les énoncés précédents.  $\square$

**Théorème 3.3.5** *Avec les mêmes notations que précédemment :*

(i) *Si l'on peut prolonger  $[f, a]$  le long de  $\gamma$ , on peut aussi prolonger  $[f', a]$ , et l'on a :*

$$[f', a]^{[\gamma]} = \left( [f, a]^{[\gamma]} \right)'$$

(ii) *Si l'on peut prolonger  $[f_1, a]$  et  $[f_2, a]$  le long de  $\gamma$ , on peut aussi prolonger  $\lambda_1 [f_1, a] + \lambda_2 [f_2, a]$  (où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ ) et  $[f_1, a] \cdot [f_2, a]$ , et l'on a :*

$$\begin{aligned} (\lambda_1 [f_1, a] + \lambda_2 [f_2, a])^{[\gamma]} &= \lambda_1 \left( [f_1, a]^{[\gamma]} \right) + \lambda_2 \left( [f_2, a]^{[\gamma]} \right), \\ ([f_1, a] \cdot [f_2, a])^{[\gamma]} &= \left( [f_1, a]^{[\gamma]} \right) \cdot \left( [f_2, a]^{[\gamma]} \right), \end{aligned}$$

*autrement dit, les relations algébriques et différentielles sont conservées par prolongement analytique.*

**Corollaire 3.3.6** Soit  $E$  un ensemble de germes analytiques en  $a \in U$  qui peuvent être prolongés le long de tout lacet de base  $a$  dans  $U$  ; l'ensemble  $E$  est donc muni d'une action à droite du groupe fondamental  $\pi_1(U, a)$ .

(i) Si  $E$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, cette action est  $\mathbf{C}$ -linéaire. (C'est donc une représentation<sup>11</sup> linéaire du groupe fondamental.)

(ii) Si  $E$  est une  $\mathbf{C}$ -algèbre, le groupe opère par automorphismes de  $\mathbf{C}$ -algèbres.

(iii) Si  $E$  est stable par dérivations, l'action du groupe commute à la dérivation.

*Preuve.* - Cela ne fait que traduire les énoncés précédents.  $\square$

**Exemples 3.3.7** 1. Si  $p, q \in O(U)$ , l'ensemble  $E$  des germes en  $a$  de solutions de l'équation différentielle  $f'' + pf' + qf = 0$  vérifie les conditions du (i) du corollaire ; la représentation linéaire associée est appelée *représentation de monodromie* de l'équation différentielle et elle joue un rôle crucial dans l'étude des équations différentielles linéaires analytiques (*correspondance de Riemann-Hilbert*<sup>12</sup>).

2. Soient  $a_1, \dots, a_n \in O(U)$ . Pour tout  $z \in U$ , notons  $D(z)$  le discriminant<sup>13</sup> du polynôme  $X^n + a_1(z)X^{n-1} + \dots + a_n(z) \in \mathbf{C}[X]$  : alors  $D \in O(U)$ . Supposons  $D$  non identiquement nul et soit  $V$  une composante connexe (donc un domaine) de  $U \setminus D^{-1}(0)$ . On peut démontrer que tout germe  $[f, a]$  de solution holomorphe en  $a \in V$  de l'équation algébrique  $f(z)^n + a_1(z)f(z)^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$  peut être prolongé le long de tout lacet de base  $a$  ; nous le vérifierons lorsque les  $a_i$  sont des polynômes, et donc  $f$  une "fonction algébrique multiforme". L'ensemble de ces germes est donc muni d'une action du groupe fondamental. Cette action s'apparente à l'action d'un groupe de Galois<sup>14</sup>.

**Exercice 3.3.8** Nos théorèmes ne disent pas que, si  $[f, a]$  se prolonge en  $[g, b]$ , alors  $[e^f, a]$  se prolonge en  $[e^g, b]$ . Énoncer et démontrer un principe de conservation des "relations fonctionnelles" général qui puisse s'appliquer à ce cas.

### 3.3.3 La surface de Riemann

Nous noterons maintenant  $\mathcal{F}$  l'ensemble de tous les prolongements analytiques  $[g, b] = [f, a]^{[\gamma]}$  du germe (ou de la branche)  $[f, a]$ . Cet ensemble  $\mathcal{F}$  a vocation à devenir la surface de Riemann de la fonction multiforme  $f$ , ce que reflètera son diagramme d'uniformisation :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{F} & \\ U & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \end{array}$$

Ici,  $F$  désigne la fonction multiforme obtenue par prolongement du germe  $[f, g]$  sur un ouvert  $U$  aussi grand que possible. La projection  $\pi$  est naturelle :  $[g, b] \mapsto b$ . La fonction uniforme  $\tilde{F}$  ne

11. Attention : du fait que le groupe fondamental opère à droite, l'application de  $\pi_1(U, a)$  dans le groupe linéaire que l'on en déduit est un anti-homomorphisme.

12. Voir Ahlfors, "Complex Analysis", chap. 8 §4 ; et mon cours de M2 de 2004.

13. La définition et les propriétés du discriminant seront revues à la section 3.5.

14. A. et R. Douady, "Algèbre et théories galoisiennes", Cassini.

l'est pas moins :  $[g, b] \mapsto g(b)$ . Reste à savoir comment faire de  $\mathcal{F}$  une surface de Riemann de telle sorte que  $\pi$  et  $\tilde{F}$  soient holomorphes. Les constructions qui suivent ne font que mettre en forme les constructions intuitives du chapitre 2. (Le lecteur est vivement encouragé à vérifier cette déclaration !)

### Topologie de $\mathcal{F}$

Soient  $[g, b]$  un germe de  $\mathcal{F}$ , et  $(\Omega, g)$  un représentant de ce germe. Nous noterons :

$$\mathcal{V}(\Omega, g) := \{[g, c] \mid c \in \Omega\} \subset \mathcal{F}.$$

On vérifie<sup>15</sup> sans trop de peine que,  $[g, b]$  étant fixé, l'ensemble des  $\mathcal{V}(\Omega, g)$  ainsi obtenus vérifie les axiomes d'une base de voisinages ; et que la collection de toutes ces bases de voisinages définit une topologie sur  $\mathcal{F}$ . Pour cette topologie,  $V \subset \mathcal{F}$  est ouvert si, et seulement si, pour tout germe  $[g, b] \in V$ , tous les germes  $[g, c]$  en les points  $c$  d'un voisinage de  $b$  appartiennent à  $V$ .

**Proposition 3.3.9** *La projection  $\pi$  est un homéomorphisme local et l'application  $\tilde{F}$  est continue.*

*Preuve.* - Avec les notations ci-dessus,  $\pi$  réalise un homéomorphisme de  $\mathcal{V}(\Omega, g)$  sur  $\Omega$ , d'où la première assertion. Quant à  $\tilde{F}$ , sa restriction à  $\mathcal{V}(\Omega, g)$  s'identifie à  $g$  via l'homéomorphisme ci-dessus.  $\square$

**Corollaire 3.3.10** *L'espace topologique  $\mathcal{F}$  est séparé et les fibres  $\pi^{-1}(z)$  sont discrètes.*

**Remarque 3.3.11** Il faut prendre garde que  $\pi$  n'est pas nécessairement un revêtement. Par exemple, lorsque l'on prolonge la fonction algébrique  $w(z)$  implicitement définie par  $w^3 - 3w + 2z = 0$ , en partant mettons de l'un de ses germes en  $z = 0$ , le prolongement analytique le long de certains chemins de 0 à 1 est possible et a pour résultat la branche telle que  $w(1) = -2$ . Mais le long d'un chemin tel que  $w(z)$  tend vers 1 alors que  $z$  tend vers 1, il n'y a pas de prolongement analytique, puisqu'il n'y a pas de branche telle que  $w(1) = 1$  (il y a ramification). En conséquence, presque tous les points de  $\mathbf{C}$  ont trois antécédents par  $\pi$ , mais 1 n'a qu'un antécédent (c'est également le cas de  $-1$ ) et  $\pi$  n'est pas un revêtement (étale) : nous en ferons plus tard un revêtement ramifié.

**Proposition 3.3.12** *L'espace topologique  $\mathcal{F}$  est connexe par arcs.*

*Preuve.* - Soit  $[g, b] = [f, a]^{[\gamma]}$  un point de  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , soit  $[f_t, a_t]$  le résultat du prolongement analytique de  $[f, a]$  le long du chemin restriction de  $\gamma$  à  $[0, t]$  : donc  $[f_0, a_0] = [f, a]$  et  $[f_1, a_1] = [g, b]$ . Alors  $t \mapsto [f_t, a_t]$  est un chemin de  $[f, a]$  à  $[g, b]$  dans  $\mathcal{F}$ . (De plus, ce chemin est un relèvement de  $\gamma$ .)  $\square$

Les théorèmes du paragraphe 3.3.2 nous disent, en termes géométriques, les choses suivantes : si un chemin  $\gamma$  se relève dans  $\mathcal{F}$ , ce relèvement est unique ; et il ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ . Comme nous le verrons lors de l'étude des revêtements au chapitre 7, ce sont essentiellement des théorèmes de topologie.

**Exercice 3.3.13** Vérifier la continuité de l'application  $t \mapsto [f_t, a_t]$ .

15. Voir par exemple Ahlfors, chap. 8 §1.2, ou bien Cartan, "Fonctions analytiques", chap. VI §5.

## Structure analytique sur $\mathcal{F}$

Pour tout ouvert  $V := \mathcal{V}(\Omega, g)$ , nous déclarons que  $(V, \pi|_V)$  est une carte analytique. Puisque  $\pi|_V$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $\Omega$  et que les  $\mathcal{V}(\Omega, g)$  recouvrent  $\mathcal{F}$ , il ne nous reste qu'à vérifier la compatibilité analytique de ces cartes. Mais il est trivial que, si  $(V_1, \pi|_{V_1})$  et  $(V_2, \pi|_{V_2})$  sont deux telles cartes, l'homéomorphisme de changement de carte est l'identité de  $\pi(V_1 \cap V_2)$ .

Nous laisserons le lecteur faire le lien entre ces constructions formelles, les constructions intuitives du chapitre 2 et la surfacedeRiemannisation des courbes algébriques à la section 3.5.

**Exercice 3.3.14** Vérifier que  $\pi$  et  $\tilde{F}$  sont holomorphes.

## 3.4 Le cas particulier des fonctions algébriques

### 3.4.1 Cas général

Soit  $P \in \mathbf{C}[Z, W]$  un polynôme irréductible dans lequel apparaissent effectivement les deux indéterminées  $Z$  et  $W$ . On l'écrira :

$$P = a_0(Z)W^n + \dots + a_n(Z),$$

avec  $\deg_W P = n \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}[Z]$ ,  $a_0 \neq 0$  et  $\deg_Z P = \max(\deg a_0, \dots, \deg a_n) \geq 1$ . Soit  $w(z)$  une solution holomorphe locale de l'équation algébrique  $P(z, w(z)) = 0$ . En vertu du principe de préservation des relations algébriques, tout prolongement analytique de  $w(z)$  doit encore être solution de cette équation. On peut démontrer qu'il existe des prolongements analytiques au voisinage de tout point de  $\mathbf{C}$ , sauf éventuellement d'un nombre fini. Cela découle en effet, avec un peu de travail, des deux faits suivants :

1. L'ensemble  $S$  des  $z_0 \in \mathbf{C}$  tel que l'équation  $P(z_0, w) = 0$  admet  $n$  racines distinctes  $w_i$  est à complémentaire fini (voir la théorie du discriminant à la section 3.5).
2. Au voisinage d'un tel point  $(z_0, w_i)$ , le théorème des fonctions implicites (voir le paragraphe 1.4.1 du chapitre 1) garantit l'existence d'une solution holomorphe.

Notons  $F$  la fonction algébrique multiforme obtenue par prolongement du germe de départ, d'où un diagramme d'uniformisation :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{F} & \\ U & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \end{array}$$

dans lequel  $U$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$  qui contient au moins l'ensemble  $S$  décrit ci-dessus ;  $U$  est donc à complémentaire fini dans  $\mathbf{C}$ . L'application  $(\pi, \tilde{F}), [g, b] \mapsto (b, g(b))$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbf{C}^2$  envoie  $\mathcal{F}$  dans l'ensemble :

$$X := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z \in U \text{ et } P(z, w) = 0\}.$$

En fait, le théorème des fonctions implicites garantit qu'en tout point  $(z_0, w_0)$  tel que  $\frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$ , il y a une solution locale  $w(z)$ . Mais, pour que celle-ci définisse un point de  $\mathcal{F}$ , il faut de plus que cette solution locale s'obtienne par prolongement analytique du germe de départ. On peut se convaincre que cela découlerait de la connexité par arcs de  $X$  : nous laisserons le lecteur construire l'argument correspondant. Nous verrons plus tard que c'est bien le cas.

**Remarque 3.4.1** Cette connexité est directement liée à l’hypothèse d’irréductibilité de  $P$ . Supposons en effet que  $P = P_1 P_2$ , et soient  $X_1$  et  $X_2$  leurs lieux d’annulation dans  $\mathbf{C}^2$ . On a donc  $X = X_1 \cup X_2$ . Si le germe de départ annule  $P_1$ , il en est de même de tous ses prolongements analytiques, et  $(\pi, \tilde{F})$  envoie donc  $\mathcal{F}$  dans  $X_1$ . En général,  $X_1$  et  $X_2$  sont distincts, et l’on voit que toutes les solutions locales ne correspondent pas à un point de  $\mathcal{F}$ .

### 3.4.2 Exemple “hyperelliptique”

Soit  $P(Z, W) := W^2 - Q(Z)$ ,  $Q(Z) := (Z - a_1) \cdots (Z - a_n)$ , où les  $a_i \in \mathbf{C}$  sont deux à deux distincts. En tout point  $a_0$  de  $S := \mathbf{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ , l’équation  $P(a_0, w) = 0$  admet deux racines distinctes  $\pm \sqrt{Q(a_0)}$  et il y a donc deux branches distinctes de la fonction algébrique multiforme  $\sqrt{Q(z)}$ . On peut même préciser des domaines d’éléments fonctionnels représentant ces deux branches. Soit  $r := \min_{1 \leq i \leq n} (|a_0 - a_i|)$ . Alors  $Q$  ne s’annule pas sur  $\Omega := \overset{\circ}{D}(a_0, r)$ , d’où l’existence de deux déterminations de  $\sqrt{Q(z)}$  sur  $\Omega$ .

Fixons  $a_0 \in S$  et notons  $w(z)$  l’une de ces deux branches en  $a_0$ . Pour tout  $a \in S$ , soit  $\gamma$  un chemin de  $a_0$  à  $a$  dans  $S$  (qui est connexe par arcs). Le prolongement analytique de  $w$  le long de  $\gamma$  est possible. Donc, dans le diagramme d’uniformisation, on peut prendre  $U = S$ . Si l’on note  $w', w''$  les deux branches en  $a$ , on a par exemple  $[w, a_0]^\gamma = [w', a]$ ; mais si  $\lambda$  est un lacet simple de centre  $a$  de rayon  $r/2$  (notations vues plus haut), on a  $[w', a]^\lambda = [w'', a]$ . Donc les deux branches en  $a$  sont des prolongements analytiques de  $[w, a_0]$ , donc il y a deux points de  $\mathcal{F}$  dans  $\pi^{-1}(a)$ .

On déduit de cet argument deux faits :

1. La surface  $\mathcal{F}$  est connexe par arcs et  $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} S$  est un revêtement étale de degré 2.
2. L’application  $(\pi, \tilde{F})$  est une bijection de  $\mathcal{F}$  sur  $\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z \in S \text{ et } P(z, w) = 0\}$ .

On peut “compactifier”  $\mathcal{F}$  et reconnaître une surface de genre  $\lfloor (g-1)/2 \rfloor$ , mais nous préférons désormais travailler sur la courbe algébrique d’équation  $P(z, w) = 0$ .

**Exercice 3.4.2** Vérifier qu’il n’y a de branche en aucun des  $a_i$ .

## 3.5 Courbes algébriques affines

On reprend les notations du paragraphe précédent, en vue cette fois d’une étude *géométrique*. Soit donc  $P \in \mathbf{C}[Z, W]$  un polynôme irréductible dans lequel apparaissent effectivement les deux indéterminées. On l’écrira encore  $P = a_0(Z)W^n + \cdots + a_n(Z)$ , avec  $\deg_W P = n \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}[Z]$ ,  $a_0 \neq 0$  et  $\deg_Z P = \max(\deg a_0, \dots, \deg a_n) \geq 1$ . On définit la *courbe algébrique affine* :

$$X := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}.$$

On munit  $X$  de la topologie induite par celle de  $\mathbf{C}^2$ . C’est donc un espace séparé, et nous prouverons tôt ou tard que, grâce à l’hypothèse d’irréductibilité de  $P$ , l’espace  $X$  est connexe. Nous noterons  $\pi$  la première projection  $(z, w) \mapsto z$  de  $X$  dans  $\mathbf{C}$ . Au dessus du complémentaire  $\mathbf{C} \setminus a_0^{-1}(0)$  de l’ensemble fini  $a_0^{-1}(0)$ , la projection  $\pi$  est surjective (théorème de d’Alembert-Gauß) : la courbe  $X$  est donc infinie (elle a la puissance du continu).

Notre but est de faire de  $X$  une surface de Riemann. Il ne peut être question d'y arriver en général, car si  $X$  est "singulière" (ce terme sera défini plus loin), ce n'est même pas une variété topologique. Prenons l'exemple du polynôme  $P(Z, W) := W^2 - Z^2 - Z^3$  (qui est irréductible dans  $\mathbf{C}[Z, W]$  car  $Z^2 + Z^3$  n'est pas un carré dans  $\mathbf{C}[Z]$ ). L'ouvert :

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathring{D}(0, 1) \times \mathbf{C} \mid w^2 - z^2 - z^3 = 0\} \subset X$$

est la réunion des graphes des fonctions  $z(1+z)^{1/2}$  et  $-z(1+z)^{1/2}$  sur  $\mathring{D}(0, 1)$  (où l'on prend pour  $(1+z)^{1/2}$  la détermination principale définie par la formule du binôme de Newton généralisée). Chacun de ces deux graphes est homéomorphe à un disque, et ils se rencontrent en leur centre commun. Aucun voisinage du "point singulier"  $(0, 0)$  n'est donc homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{C}$  (ou d'un  $\mathbf{R}^n$ ).

**Exercice 3.5.1** Vérifier la dernière assertion. [Indication : Pour tout domaine  $\Omega$  d'un  $\mathbf{R}^n$  et tout  $x \in \Omega$ , l'ouvert  $\Omega \setminus \{x\}$  est connexe.]

### 3.5.1 Rappels sur le discriminant

Soit  $z_0 \in \mathbf{C}$  tel que  $a_0(z_0) \neq 0$ . On a alors une factorisation :

$$P(z_0, w) = a_0(z_0) \prod_{i=1}^n (w - w_i), \quad w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C},$$

et l'on peut se poser la question d'une condition pour que les  $n$  racines  $w_i$  soient distinctes.

Une première condition vient du calcul différentiel : les racines multiples d'un polynôme  $F \in \mathbf{C}[W]$  sont les racines communes à  $F$  et  $F'$ . Dans notre cas, cela donne le critère :

(Le polynôme  $P(z_0, W)$  n'a que des racines simples)  $\iff$  ( $P(z_0, W)$  et  $P'_W(z_0, W)$  n'ont pas de racine commune.)

Une autre condition purement algébrique s'obtient en considérant l'expression :

$$d(z_0) := a_0(z_0)^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (w_i - w_j)^2.$$

On démontre<sup>16</sup> que  $d(z_0)$  s'exprime polynomialement en fonction de  $a_0, \dots, a_n$ . En particulier,  $d(z_0) = D(z_0)$  pour un certain  $D \in \mathbf{C}[Z]$ . Le polynôme  $D$  est appelé *discriminant* de  $P(Z, W)$ . Du fait que l'on a supposé  $P(Z, W)$  irréductible, on peut démontrer que le polynôme  $D$  n'est pas nul.

Notons alors :

$$S := \{z \in \mathbf{C} \mid a_0(z) \neq 0 \text{ et } D(z) \neq 0\}.$$

Résumons les propriétés de  $S$  :

1. L'ensemble  $\mathbf{C} \setminus S$  est fini.
2. Pour tout  $z_0 \in S$ , la fibre  $\pi^{-1}(z_0) \in X$  est formée de  $n$  points distincts  $(z_0, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
3. En chacun de ces points,  $P(z_0, w_i) = 0$  et  $P'_W(z_0, w_i) \neq 0$ .

**Exercice 3.5.2** Calculer  $D(Z)$  lorsque  $n = 2$ , puis lorsque  $n = 3$  et  $a_1 = 0$ .

16. Voir par exemple RW2, module II.7, §2.2.

### 3.5.2 Où l'on invoque le théorème des fonctions implicites

On va commencer par restreindre  $X$  au dessus de  $S$  en posant :

$$X_1 := \pi^{-1}(S).$$

c'est un ouvert de  $X$ , et l'on verra plus tard qu'il est connexe. La condition différentielle sur les points de  $X_1$  permet d'appliquer la variante suivante du théorème des fonctions implicites <sup>17</sup> :

**Théorème 3.5.3** Soit  $z_0 \in S$  ; notons  $P(z_0, W) = a_0(z_0) \prod_{i=1}^n (W - w_i)$ . Il existe alors un disque ouvert  $\Delta$  contenant  $z_0$  et des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  analytiques sur  $\Delta$  tels que :

1.  $f_i(z_0) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
2.  $\forall z \in \Delta, P(z, f_i(z)) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
3.  $\forall z \in \Delta, \forall w \in \mathbf{C}, P(z, w) = 0 \Rightarrow w \in \{f_1(z), \dots, f_n(z)\}$ .

Quitte à restreindre  $\Delta$ , on peut supposer que son centre est  $z_0$  et que  $\Delta \in S$ , ce qui assure que, pour tout  $z \in \Delta$ , les  $f_i(z) = w$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont distincts. Notons alors  $\Delta'_i$  le graphe de  $f_i$  au dessus de  $\Delta$  :

$$\Delta'_i := \{(z, f_i(z)) \mid z \in \Delta\}.$$

Alors  $\pi^{-1}(\Delta) = \bigcup_{i=1}^n \Delta'_i$ , cette réunion est disjointe, et la restriction de  $\pi$  à  $\Delta'_i$  est un homéomorphisme de  $\Delta'_i$  sur  $\Delta$ , l'homéomorphisme réciproque étant  $z \mapsto (z, f_i(z))$ . Par conséquent, la projection  $\pi : X_1 \rightarrow S$  est un revêtement étale.

On en déduit une structure analytique sur  $X_1$ , en prenant pour cartes les  $(\Delta'_i, \pi|_{\Delta'_i})$ . On vérifie (c'est même tautologique) que l'application  $\pi$  est une fonction holomorphe sur  $X_1$ . Il est de même facile de vérifier que la deuxième projection  $(z, w) \mapsto w$  est aussi holomorphe sur  $X_1$  : dans la carte  $(\Delta'_i, \pi|_{\Delta'_i})$ , elle s'identifie à  $f_i$ .

**Exemple 3.5.4** Dans le cas du polynôme  $W^3 - 3W + 2Z$ , le discriminant est  $D(Z) = 108(1 - Z^2)$ , d'où  $S = \mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$  et  $X_1$  est un revêtement étale de degré 3 de  $S$ . On retrouve l'ouvert au dessus duquel la fonction implicite admet trois branches distinctes.

**Exercice 3.5.5** Appliquer cette construction aux polynômes  $W^2 - Z$ ,  $W^2 + Z^2 - 1$  et  $W^3 + Z^3 - 1$ .

### 3.5.3 Où l'on invoque une autre forme du théorème des fonctions implicites

Dans le cas du polynôme  $W^3 - 3W + 2Z$ , on obtient une surface de Riemann étalée au dessus de  $S = \mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ , ce qui ne constitue pas la surface de Riemann de la fonction multivaluée : la branche en  $z = 1, w = -2$  n'est pas "vue" car elle a été éliminée en même temps que le "mauvais point"  $(1, 1)$ . Le test du discriminant est donc trop sélectif.

Nous ferons appel à une forme plus souple du théorème des fonctions implicite <sup>18</sup> :

17. Voir Ahlfors, chap. 6, §2.2, p. 293.

18. Voir par exemple Dieudonné, "Eléments d'analyse", vol. 1, chap. 10, §2 ; ou Michel Hervé, "Les fonctions analytiques", théorème 4.10 p. 43, PUF.

**Théorème 3.5.6** Soit  $(z_0, w_0) \in X$  tel que  $F'_W(z_0, w_0) \neq 0$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $\Delta'$  de  $(z_0, w_0)$  dans  $\mathbf{C}^2$ , un voisinage ouvert  $\Delta$  de  $z_0$  dans  $\mathbf{C}$  et une fonction analytique  $g$  sur  $\Delta$  tels que  $X \cap \Delta'$  est le graphe de  $g$  sur  $\Delta$ .

On peut le déduire du théorème des fonctions implicites classique en identifiant  $P : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  à une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^4$  dans  $\mathbf{R}^2$  et en calculant le rang de sa différentielle  $dP = F'_Z dz + F'_W dw$ . Il ne reste alors qu'à prouver que la fonction implicite  $g$  est bien holomorphe en calculant sa différentielle, ce qui donne  $g'(z) = -\frac{F'_Z}{F'_W}(z, g(z))$ .

Avec les notations du théorème, on vérifie très facilement que  $(\Delta', \pi|_{\Delta'})$  est une carte et que la collection de toutes ces cartes est un atlas analytique sur  $X' := \{(z_0, w_0) \in X \mid F'_W(z_0, w_0) \neq 0\}$ . Cet atlas contient d'ailleurs celui trouvé au paragraphe précédent, d'où la compatibilité des structures de surfaces de Riemann sur  $X'$  et sur  $X_1 \subset X'$ . On vérifie encore que les projections  $\pi : (z, w) \mapsto z$  et  $(z, w) \mapsto w$  sont holomorphes. En fait, la restriction de  $\pi$  à  $X'$  est un homéomorphisme local puisque (avec les notations du théorème) elle induit un homéomorphisme de  $\Delta'$  sur  $\Delta$ .

**Exemple 3.5.7** Dans le cas du polynôme  $W^3 - 3W + 2Z$ , on a  $F'_W = 3(W^2 - 1)$  et  $X' = X \setminus \{(1, 1), (-1, -1)\}$ . On a récupéré les deux points  $(1, -2)$  et  $(-1, 2)$ .

**Exercice 3.5.8** Appliquer cette construction aux polynômes  $W^2 - Z$ ,  $W^2 + Z^2 - 1$  et  $W^3 + Z^3 - 1$ .

### 3.5.4 Points singuliers, lieu régulier

Dans le cas du polynôme  $W^3 - 3W + 2Z$ , nous avons dû éliminer les deux points  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ . Pourtant, la projection *horizontale*  $(z, w) \mapsto w$  est visiblement un "isomorphisme" de  $X$  avec  $\mathbf{C}$ , de réciproque  $w \mapsto ((3w - w^3)/2, w)$ . Simplement, en les deux mauvais points, la projection *verticale*  $(z, w) \mapsto z$  n'est pas une carte, à cause de l'annulation de  $F'_W$ .

**Définition 3.5.9** Un *point singulier* de  $X$  est un point  $(z_0, w_0) \in X$  en lequel  $P'_W(z_0, w_0) = P'_Z(z_0, w_0) = 0$ . Un *point régulier* de  $X$  est un point qui n'est pas singulier. Le *lieu singulier*  $X_{sing}$ , resp. le *lieu régulier*  $X_{reg}$  de  $X$  est l'ensemble des points singuliers, resp. de ses points réguliers.

Il est clair que  $X_1 \subset X_{reg}$ . les abscisses des points singuliers appartiennent à un ensemble fini, et, par symétrie, leurs ordonnées aussi : le lieu singulier est donc fini.

**Théorème 3.5.10** En tout point de  $X_{reg}$ , on a une carte locale induite par l'une des deux projections horizontale et verticale. Ces cartes forment un atlas analytique.

*Preuve.* - Le théorème des fonctions implicites deuxième manière nous garantit que, si  $P'_W(z_0, w_0) \neq 0$ , resp. si  $P'_Z(z_0, w_0) \neq 0$ , la projection verticale, resp. la projection horizontale, fournit par restriction à un ouvert adéquat une carte. La compatibilité de deux cartes provenant toutes deux de la même projection est triviale (l'homéomorphisme de changement de carte est alors l'identité). Dans le cas des deux projections en un point régulier, l'homéomorphisme de changement de cartes est (avec les notations du théorème 3.5.6)  $g$ , qui est bien holomorphe ; et donc biholomorphe pour raisons de symétrie.  $\square$

**Exercice 3.5.11** Appliquer cette construction aux polynômes  $W^2 - Z$ ,  $W^2 + Z^2 - 1$  et  $W^3 + Z^3 - 1$ .

## 3.6 Courbes algébriques projectives

Notre objectif idéal est d'obtenir une surface de Riemann compacte ; cela, pour d'excellentes raisons qui apparaîtront à l'usage !! (Mais la série des théorèmes GAGA en est un bon exemple.) Pour le moment, il y a trop de trous dans notre construction : il y manque les points singuliers et les points à l'infini.

Dans le cadre de ce cours, nous ne réglerons pas le cas des points singuliers. Ce n'est pas extrêmement difficile, mais cela prendrait beaucoup de temps, et d'ailleurs, cela relèverait plus d'un cours de géométrie algébrique (aussi ne donnerons-nous même pas de référence). Nous nous cantonnerons donc aux courbes non singulières, ce qui permet déjà de traiter le cas des cubiques non singulières, donc des intégrales elliptiques.

En revanche, nous allons aborder de front la question des points à l'infini en compactifiant nos courbes affines en des courbes projectives. C'est le but de cette section<sup>19</sup>. (Naturellement, il faudra alors vérifier que les points à l'infini ne sont pas singuliers !)

### 3.6.1 Le plan projectif complexe

Il s'obtient en compactifiant  $\mathbf{C}^2$  par ajout d'une "droite (projective !) à l'infini". Le procédé ressemble à celui mis en oeuvre pour construire la droite projective complexe. Par définition, le plan projectif complexe  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  est le quotient de l'ensemble des vecteurs non nuls de  $\mathbf{C}^3$  par l'action du groupe  $\mathbf{C}^*$  des homothéties :

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) := \frac{\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{\mathbf{C}^*}.$$

Cet ensemble s'identifie naturellement à l'ensemble des directions (ou droites vectorielles) de  $\mathbf{C}^3$ . On le munit de la topologie quotient. La classe dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  du triplet  $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$  est notée  $[z_0 : z_1 : z_2]$ . Par définition, on a donc pour tout scalaire  $\lambda$  non nul :

$$[\lambda z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2] = [z_0 : z_1 : z_2].$$

En particulier, cela n'a aucun sens de parler des points  $[z_0 : z_1 : z_2]$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  tels que (par exemple)  $z_0 = 1$  ; en revanche, cela a un sens de parler des points  $[z_0 : z_1 : z_2]$  tels que (par exemple)  $z_0 = 0$  ou  $z_1 \neq 0$ , car ces conditions sont invariantes par multiplication par un scalaire non nul. On définit donc trois sous-ensembles particuliers de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  :

$$\begin{aligned} U_0 &:= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid z_0 \neq 0\}, \\ U_1 &:= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid z_1 \neq 0\}, \\ U_2 &:= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid z_2 \neq 0\}, \end{aligned}$$

de sorte que, par définition,  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ . Comme ces ensembles sont les images respectives des ouverts  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$  de  $\mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ , ils forment un

---

19. Pour rafraîchir ses connaissances en géométrie projective, le lecteur peut consulter par exemple RW3.1, chap. 4, §1.3 ; ou mieux, P. Samuel, "Géométrie projective", PUF.

recouvrement ouvert de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ . Ce sont en fait les domaines de définition de trois “cartes” :

$$\begin{aligned}\phi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbf{C}^2, & [z_0 : z_1 : z_2] &\mapsto (z_1/z_0, z_2/z_0), \\ \phi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbf{C}^2, & [z_0 : z_1 : z_2] &\mapsto (z_0/z_1, z_2/z_1), \\ \phi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbf{C}^2, & [z_0 : z_1 : z_2] &\mapsto (z_0/z_2, z_1/z_2);\end{aligned}$$

Par exemple,  $\phi_0$  est bijective, sa réciproque étant l’application  $(z, w) \mapsto [1 : z : w]$  et l’on voit sans peine que c’est un homéomorphisme de  $U_0$  sur  $\mathbf{C}^2$ ; même chose pour les deux autres cartes. Pour cette raison, les  $U_i$  sont appelés *ouverts affines*.

L’espace topologique  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  est séparé (car recouvert par des ouverts homéomorphes à  $\mathbf{C}^2$ ) et il est même compact connexe, car image par la surjection canonique du compact connexe  $\{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbf{C}^3 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$  (la “sphère” de dimension 3).

**Remarque 3.6.1** Les “applications de changement de cartes”<sup>20</sup> induites sont des homéomorphismes entre ouverts de  $\mathbf{C}^2$ . Par exemple, l’application  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$  de  $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  dans  $\phi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  est l’involution  $(u, v) \mapsto (1/u, v/u)$ . On aurait donc pu définir la topologie de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  par transport de structure. Retenons le critère :

$$(\Omega \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \text{ est un ouvert}) \iff (\phi_0(\Omega \cap U_0), \phi_1(\Omega \cap U_1), \phi_2(\Omega \cap U_2) \text{ sont des ouverts de } \mathbf{C}^2).$$

**Exercice 3.6.2** Démontrer que les trois complémentaires  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus U_i$  sont homéomorphes à  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  via les applications  $[0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_1 : z_2]$ , etc. Cela justifie la phrase introductive de ce paragraphe.

### 3.6.2 Courbes dans le plan projectif

Soit  $P \in \mathbf{C}[Z_0, Z_1, Z_2]$  un polynôme arbitraire. En règle générale, la condition  $P(z_0, z_1, z_2) = 0$  sur un point  $[z_0 : z_1 : z_2]$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  n’a pas de sens (on l’a déjà dit remarqué le polynôme  $Z_0 - 1$ ). Il en est autrement si le polynôme  $P$  est *homogène de degré  $k$*  pour un entier  $k \in \mathbf{N}$ , autrement dit, si  $P(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^k P(z_0, z_1, z_2)$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Si  $k = 0$ , le polynôme  $P$  est constant, ce cas n’a donc aucun intérêt. Si  $k = 1$ , c’est une forme linéaire et la condition  $P(z_0, z_1, z_2) = 0$  définit une droite projective, mais ce cas n’a pas d’intérêt non plus dans notre cadre (il en a si l’on veut faire de la géométrie projective).

Soit donc  $P$  un polynôme homogène de degré  $k \geq 2$ . Nous supposons  $P$  irréductible, ce qui suffira pour nos besoins. Nous définissons alors la *courbe algébrique projective* :

$$\bar{\Gamma} := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid P(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

Notons déjà que c’est un fermé du compact  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ , donc un compact. On peut de plus démontrer (grâce à l’hypothèse d’irréductibilité de  $P$ ) que  $\bar{\Gamma}$  est connexe.

Pour comprendre cet objet, on va en observer les traces dans les trois ouverts affines  $U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Pour cela, nous identifierons  $\Gamma_i := \bar{\Gamma} \cap U_i$  à son image  $\phi_i(\Gamma_i) \subset \mathbf{C}^2$ .

<sup>20</sup> Les guillemets sont motivés par le fait que nous n’avons pas défini la notion de carte à valeurs dans  $\mathbf{C}^2$ ; le discours se transpose sans problème.

Tout élément  $[z_0 : z_1 : z_2]$  de  $U_0$  admet une unique écriture  $[1 : z : w]$ , à savoir  $[1 : z_1/z_0 : z_2/z_0]$ . On a donc une identification :

$$\Gamma_0 \simeq \phi_0(\Gamma_0) = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid Q_0(z, w) = 0\},$$

où  $Q_0(Z, W) := P(1, Z, W)$  est obtenu en “deshomogénéisant”  $P$ . On retrouve  $P$  en “homogénéisant”  $Q_0$  par la formule :  $P(Z_0, Z_1, Z_2) = Z_0^k Q_0(Z_1/Z_0, Z_2/Z_0)$ . (Des formules similaires relient  $P$  à  $Q_1$  et  $Q_2$ .) Il découle des hypothèses faites sur  $P$  que  $Q_0$  est de degré total  $k \geq 2$ , donc non constant. On peut de plus démontrer que  $Q_0$  est irréductible :  $\Gamma_0$  est donc une courbe algébrique affine.

**Remarque 3.6.3** On peut voir  $\Gamma_0$  comme la partie “à distance finie” de la courbe projective  $\bar{\Gamma}$ . Sa partie “à distance infinie” est donc :

$$\bar{\Gamma} \setminus \Gamma_0 = \bar{\Gamma} \cap (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus U_0) = \{[0 : z : w] \mid P(0, z, w) = 0\}.$$

Comme  $P$  est irréductible,  $R_0(Z, W) := P(0, Z, W)$  est un polynôme homogène non nul de degré  $k$ . Il est donc produit de  $k$  formes linéaires non triviales  $\alpha_i Z + \beta_i W$  et les “points à l’infini” de  $\bar{\Gamma}$  sont les  $k$  points (dont certains sont peut-être confondus)  $[0 : -\beta_i : \alpha_i]$ .

**Exercice 3.6.4** On écrit  $P = \sum_{i=0}^k a_i(Z_1, Z_2)Z_0^{k-i}$ , chaque  $a_i$  étant donc homogène de degré  $i$  en  $Z_1, Z_2$ . Comment retrouver  $Q_0$  et  $R_0$  à partir de cette écriture ?

### 3.6.3 Points singuliers et points réguliers

Nous définirons un point singulier de  $\bar{\Gamma}$  comme un point  $[z_0 : z_1 : z_2]$  tel que :

$$P'_{Z_0}(z_0, z_1, z_2) = P'_{Z_1}(z_0, z_1, z_2) = P'_{Z_2}(z_0, z_1, z_2) = 0.$$

Comme ces trois dérivées partielles sont des polynômes homogènes de degré  $k-1$ , ces conditions ont bien un sens. De plus, on déduit de la formule d’Euler  $\sum Z_i P'_{Z_i} = kP$  que tout point vérifiant ces conditions est automatiquement sur  $\bar{\Gamma}$ . Notons  $\bar{\Gamma}_{sing}$  le lieu singulier (ensemble des points singuliers) de  $\bar{\Gamma}$ . Le lien avec la définition du lieu singulier dans le cas affine est donné par le lemme suivant.

**Lemme 3.6.5**  $\bar{\Gamma}_{sing} \cap U_i = (\Gamma_i)_{sing}$ .

*Preuve.* - On va faire le calcul dans le cas  $i = 0$ . Pour  $z_0 \neq 0$ , on écrit  $P(z_0, z_1, z_2) = z_0^k Q_0(z_1/z_0, z_2/z_0)$ . Pour éviter les ambiguïtés, on notera  $D_i Q_0$ ,  $i = 1, 2$ , les dérivées partielles de  $Q_0$ . Alors :

$$\begin{aligned} P'_{Z_i}(z_0, z_1, z_2) &= z_0^{k-1} D_i Q_0(z_1/z_0, z_2/z_0) \quad (i = 1, 2), \\ P'_{Z_0}(z_0, z_1, z_2) &= z_0^{k-2} (kz_0 Q_0(z_1/z_0, z_2/z_0) - z_1 D_1 Q_0(z_1/z_0, z_2/z_0) - z_2 D_2 Q_0(z_1/z_0, z_2/z_0)). \end{aligned}$$

La conclusion est alors immédiate.  $\square$

Les points non singuliers de  $\bar{\Gamma}$  sont dits réguliers. Notant  $\bar{\Gamma}_{reg}$  le lieu régulier de  $\bar{\Gamma}$  (complémentaire du lieu singulier), on a donc :

$$\bar{\Gamma}_{reg} \cap U_i = (\Gamma_i)_{reg}.$$

Or, à la section 3.5, on a fait de chacun des trois ouverts  $(\Gamma_i)_{reg}$  une surface de Riemann (comme lieu régulier d'une courbe affine). On déduit des formules de changements de cartes donnés dans la remarque 3.6.1 que, sur les intersections  $(\Gamma_i)_{reg} \cap (\Gamma_j)_{reg}$ , ces structures analytiques coïncident. Comme les ouverts  $(\Gamma_i)_{reg}$  recouvrent  $\bar{\Gamma}_{reg}$ , on voit que *le lieu régulier d'une courbe projective est également muni d'une structure de surface de Riemann.*

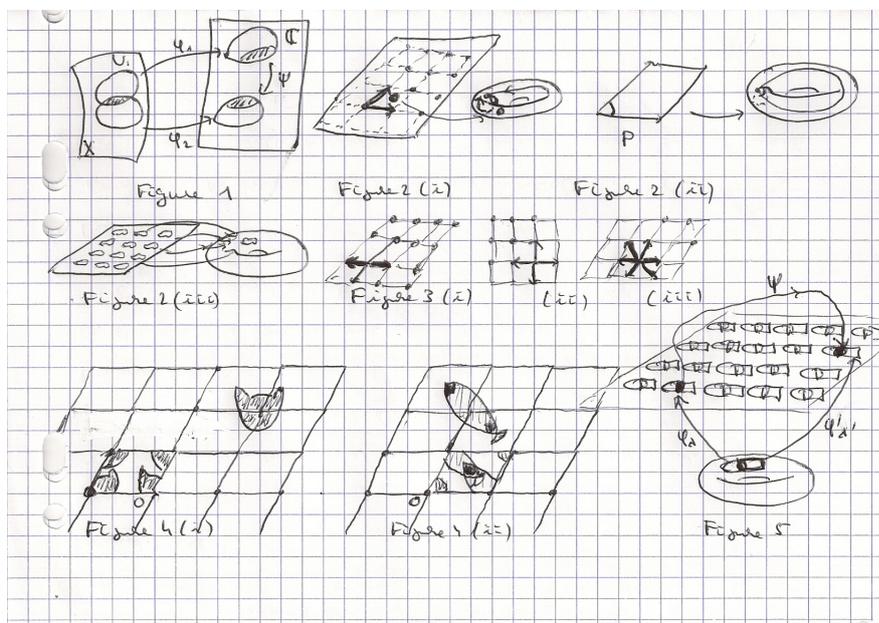
### 3.6.4 Courbes projectives non singulières comme surfaces de Riemann compactes

On suppose maintenant que  $\bar{\Gamma}$  est une courbe projective non singulière, autrement dit, telle que  $\bar{\Gamma}_{sing} = \emptyset$ . Elle est donc muni d'une structure de *surface de Riemann compacte.*

**Exemple 1 :**  $Q(Z, W) = W^2 - Z$ . On trouve, en homogénéisant :  $P(Z_0, Z_1, Z_2) = Z_2^2 - Z_0Z_1$ . La courbe projective  $\bar{\Gamma}$  est régulière. Son unique point à l'infini est  $[0 : 1 : 0]$ . On a vu "à la main" que le genre est 0, ça devrait donc être la sphère de Riemann. On le confirme grâce au *plongement de Veronese*  $[z_0 : z_1] \mapsto [z_0^2 : z_0z_1 : z_1^2]$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  : on vérifie sans peine qu'il réalise un homéomorphisme de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  sur  $\bar{\Gamma}$ . C'est en fait un isomorphisme de surfaces de Riemann.

**Exemple 2 :**  $Q(Z, W) = W^2 + Z^2 - 1$ . On trouve, en homogénéisant :  $P(Z_0, Z_1, Z_2) = Z_1^2 + Z_2^2 - Z_0^2$ . Il n'y a pas de point singulier. Les points à l'infini (du cercle !) sont  $[0 : 1 : \pm i]$ . Le changement de coordonnées  $Z'_0 := Z_1 + Z_0, Z'_1 := Z_1 - Z_0$ , fournit un isomorphisme avec la courbe précédente.

**Exemple 3 :**  $Q(Z, W) = W^2 - F(Z)$ . On suppose  $F$  de degré  $k \geq 3$  et à racines simples. Soient  $a_1, \dots, a_k$  ses racines. On trouve, en homogénéisant :  $P(Z_0, Z_1, Z_2) = Z_0^{k-2}Z_2^2 - a(Z_1 - a_1Z_0) \cdots (Z_1 - a_kZ_0)$ . Il n'y a pas de point singulier à distance finie. Le seul point à l'infini est  $[0 : 0 : 1]$ . Il est régulier si  $k = 3$ , singulier si  $k \geq 4$ . Le cas le plus passionnant est  $k = 3$  : cubique projective non singulière, dont on prouvera que son genre est 1 et dont on explicitera l'isomorphisme avec un tore complexe.



# Chapitre 4

## La boîte à outils

Dans ce chapitre, on introduit les techniques de base pour travailler sur une surface de Riemann.

### 4.1 Formes différentielles holomorphes

Les formes différentielles sont, presque par définition, les *objets que l'on peut intégrer* !

#### 4.1.1 Rappels : formes différentielles holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$

**Des choses connues mais présentées sous forme “fonctorielle”**

Une forme différentielle (holomorphe<sup>1</sup>) sur un ouvert  $V$  de  $\mathbf{C}$  est une expression<sup>2</sup> de la forme  $f(z)dz$ , où  $f$  est une fonction holomorphe sur  $V$ . Les formes différentielles sur  $V$  forment un  $O(V)$ -module libre de rang 1 que nous noterons  $\Omega^1(V)$ .

Pour tout  $g \in O(V)$ , on pose  $dg := g'(z)dz \in \Omega^1(V)$ . L'application :

$$O(V) \xrightarrow{d} \Omega^1(V), \quad g \mapsto dg,$$

n'est pas un morphisme de  $O(V)$ -modules, car elle n'est pas  $O(V)$ -linéaire. Elle est  $\mathbf{C}$ -linéaire et vérifie la *règle de Leibniz* :

$$d(gh) = gdh + h dg.$$

Son noyau est le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions localement constantes sur  $V$ . (C'est donc  $\mathbf{C}$  si, et seulement si,  $V$  est un domaine.) Les éléments de son image sont (par définition) les formes différentielles *exactes*. Si  $\omega = dg$  est une forme différentielle exacte, on dit que  $g$  est une *primitive* de  $\omega$ . Un exemple de forme non exacte est  $\frac{1}{z}dz \in \Omega^1(\mathbf{C}^*)$ , qui n'admet pas de primitive  $g \in O(\mathbf{C}^*)$  : et c'est même là son charme !

---

1. Toutes nos formes différentielles sont holomorphes : on ne le précisera plus.

2. Cette phrase n'est évidemment pas une définition ! Voir la “vraie” définition dans le cours de L3, ou bien dans la deuxième partie du “Cours de calcul différentiel” de H. Cartan, chez Hermann.

## Changements de variables

Soit  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  une fonction holomorphe entre deux ouverts de  $\mathbf{C}$  et soit  $\omega := f(z)dz \in \Omega^1(V_2)$ . Le changement de variable  $z \mapsto \phi(z)$  dans  $\omega$  donne la forme différentielle  $f(\phi(z))d(\phi(z))$ ; plus rigoureusement, cela permet de définir :

$$\phi^*(\omega) := (f \circ \phi)(z)\phi'(z)dz \in \Omega^1(V_1).$$

Dans le cas particulier où  $V_1 \subset V_2$  et où  $\phi$  est l'inclusion de  $V_1$  dans  $V_2$ , on retrouve la *restriction*  $\phi^*(\omega) =: \omega|_{V_1} \in \Omega^1(V_1)$  de  $\omega \in \Omega^1(V_2)$  à  $V_1$ . Le plus souvent, cette restriction sera simplement notée  $\omega$ .

L'application :

$$\phi^* : \Omega^1(V_2) \rightarrow \Omega^1(V_1)$$

est évidemment  $\mathbf{C}$ -linéaire. Elle est même  $O(V_2)$ -linéaire dans le sens suivant :

$$\forall h \in O(V_2), \forall \omega \in \Omega^1(V_2), \phi^*(h \cdot \omega) = \phi^*(h) \cdot \phi^*(\omega),$$

où l'on a posé  $\phi^*(h) := h \circ \phi$ .

**Remarque 4.1.1** Il y a une bonne raison pour appeler " $O(V_2)$ -linéarité" cette propriété. L'application  $h \mapsto \phi^*(h) := h \circ \phi$  est un morphisme d'anneaux de  $O(V_2)$  dans  $O(V_1)$ , qui fait de ce dernier une  $O(V_2)$ -algèbre. Tout  $O(V_1)$ -module, par exemple  $\Omega^1(V_1)$ , est donc *ipso facto* un  $O(V_2)$ -module (restriction des scalaires) : et l'application  $\phi^*$  est un morphisme du  $O(V_2)$ -module  $\Omega^1(V_2)$  dans le  $O(V_2)$ -module  $\Omega^1(V_1)$ .

Le lecteur se rappellera (ou vérifiera) les formules suivantes :

$$(4.1.1.1) \quad \phi^*(dg) = d(\phi^*(g)),$$

$$(4.1.1.2) \quad (\psi \circ \phi)^*(\omega) = \phi^*(\psi^*(\omega)).$$

## Intégrale d'une forme différentielle holomorphe

Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  un chemin de classe  $C^1$  par morceaux<sup>3</sup>. On définit l'intégrale sur ce chemin d'une forme différentielle  $\omega := f(z)dz$  sur  $V$  par la formule :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s) ds.$$

Le lecteur se rappellera (ou vérifiera) les propriétés fondamentales de l'intégrale, qui sont les suivantes :

1.  $\mathbf{C}$ -linéarité :

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\gamma} \omega_2.$$

2. Additivité (relativement à la composition des chemins) :

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

---

3. On rappelle qu'un tel chemin est continu et qu'il est de classe  $C^1$  sur des segments qui recouvrent  $[a, b]$ .

3. Invariance par homotopie : si les chemins  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow V$  sont homotopes, alors :

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

4. Changement de paramètres : si  $\alpha : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  est bijective, croissante et de classe  $C^1$ , alors :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \circ \alpha} \omega.$$

5. Changement de direction du temps : si l'on note  $\bar{\gamma}$  le chemin  $s \mapsto \gamma(a + b - s)$ , alors :

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

6. Functorialité : si  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  est holomorphe et si  $\omega \in \Omega^1(V_2)$ , alors, notant  $\phi_*(\gamma) := \phi \circ \gamma$  :

$$\int_{\gamma} \phi^* \omega = \int_{\phi_* \gamma} \omega.$$

### Intégrales et primitives

Le théorème fondamental est évidemment celui-ci :

$$\int_{\gamma} dg = g(z_1) - g(z_0),$$

où  $z_0 := \gamma(a)$  est l'origine et  $z_1 := \gamma(b)$  l'extrémité de  $\gamma$ .

L'autre théorème fondamental est bien entendu celui-ci : si  $V$  est simplement connexe, toute forme différentielle  $\omega \in \Omega^1(V)$  admet une primitive :

$$g(z) := \int_{z_0}^z \omega,$$

où  $z_0 \in V$  est arbitraire et où le signe  $\int_{z_0}^z$  désigne l'intégrale le long de n'importe quel chemin de  $z_0$  à  $z$ . Le choix du chemin ne prête en effet pas à conséquence en vertu, d'une part, de la propriété d'invariance par homotopie de l'intégrale, d'autre part, de l'hypothèse de simple connexité de  $V$ . La fonction  $g$  est donc bien définie, et le théorème dit que  $g \in O(V)$  et que  $dg = \omega$ .

Dans le cas général, on sait que tout domaine  $V$  est localement simplement connexe d'une part (il peut être recouvert par des disques) et connexe par arcs d'autre part. Toute forme différentielle  $\omega \in \Omega^1(V)$  admet donc des primitives locales, *i.e.* définies sur des ouverts qui recouvrent  $V$ . On peut les calculer de la manière suivante. On fixe  $z_0 \in V$  arbitraire. Pour tout disque  $\overset{\circ}{D}(a, r) \subset V$ , on choisit un chemin de  $z_0$  à  $a$ , puis, pour tout  $z \in \overset{\circ}{D}(a, r)$ , un chemin de  $a$  à  $z$  dans  $\overset{\circ}{D}(a, r)$ . L'intégrale de  $z_0$  à  $z$  le long de ce chemin définit une fonction  $g$  holomorphe sur  $\overset{\circ}{D}(a, r)$  et telle que  $dg = \omega$  sur  $\overset{\circ}{D}(a, r)$  : c'est une primitive locale. Il découle de la connexité par arcs qu'elles s'obtiennent toutes les unes à partir des autres par prolongement analytique.

**Exercice 4.1.2** Retrouver les propriétés de prolongement du logarithme à partir de l'étude des primitives de  $\frac{1}{z} dz \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ .

## 4.1.2 Formes différentielles sur une surface de Riemann

### Où l'on globalise des objets locaux

**Définition 4.1.3** Soit  $X$  une surface de Riemann.

(i) Soient  $(U, \phi)$  et  $(U', \phi')$  deux cartes de  $X$ . On dit que les formes différentielles  $\omega \in \Omega^1(\phi(U))$  et  $\omega' \in \Omega^1(\phi'(U'))$  sont *compatibles* si, notant  $\psi : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$  le biholomorphisme de changement de carte, on a :

$$\psi^*(\omega'_{|\phi'(U \cap U')}) = \omega_{|\phi(U \cap U')}.$$

Pour alléger les notations, on dira plutôt que  $\omega$  et  $\psi^*(\omega')$  coïncident sur leur domaine commun. (Si  $U \cap U' = \emptyset$ , la condition est vide, *i.e.* automatiquement vérifiée.)

(ii) Une *forme différentielle*  $\omega$  sur  $X$  est la donnée, pour toute carte  $(U, \phi)$  de  $X$ , d'une forme différentielle  $\omega_\phi \in \Omega^1(\phi(U))$  de telle sorte que toutes ces formes soient deux à deux compatibles. Si  $\omega_\phi = f(z)dz$ , avec  $f \in O(\phi(U))$ , on dira que “ $\omega$  s'écrit  $\omega_\phi = f(z)dz$  dans la carte  $(U, \phi)$ ”, ou que “ $\omega_\phi = f(z)dz$  est une écriture locale de  $\omega$ ”.

Il sera commode de pouvoir construire des formes différentielles en se restreignant à leurs écritures dans les cartes d'un atlas ; la possibilité en est justifiée par les résultats suivants.

**Lemme 4.1.4** Soit  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  un atlas sur la surface de Riemann  $X$ . Pour tout indice  $i$ , soit  $\omega_i = f_i(z) dz$  une forme différentielle sur l'ouvert  $\phi_i(U_i)$  de  $\mathbf{C}$ . On suppose les  $\omega_i$  deux à deux compatibles.

(i) Pour toute carte  $(U, \phi)$  de  $X$ , il existe une unique forme différentielle  $\omega_\phi$  sur  $\phi(U)$  qui soit compatible avec toutes les  $\omega_i$ .

(ii) Si  $(U, \phi)$  et  $(U', \phi')$  sont deux cartes de  $X$ , les formes différentielles  $\omega_\phi$  et  $\omega_{\phi'}$  ainsi définies sont compatibles entre elles.

*Preuve.* - Notations :  $V_i := \phi_i(U_i)$ , donc  $f_i \in O(V_i)$  ; et  $\phi_{i,j} := \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ , donc un biholomorphisme de  $\phi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$  sur  $\phi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$  tel que  $\phi_{i,j}^*(\omega_j) = \omega_i$ .

(i) Soient  $(U, \phi)$  une carte de  $X$  et  $V = \phi(U)$ . Les ouverts  $V'_i := \phi(U_i \cap U)$  forment un recouvrement de  $V$ . On va définir une forme différentielle  $\omega_{\phi,i}$  sur chacun de ces ouverts de telle sorte que les  $\omega_{\phi,i}$  soient compatibles entre elles, c'est-à-dire que  $\omega_{\phi,i}$  et  $\omega_{\phi,j}$  coïncident sur  $V'_i \cap V'_j$  ; par recollement, elles définiront  $\omega_\phi$ . Dire que cette  $\omega_\phi$  est compatible avec toutes les  $\omega_i$  revient à dire que chaque  $\omega_{\phi,i}$  est compatible avec  $\omega_i$ , autrement dit, que  $\omega_{\phi,i} = \psi_i^*(\omega_i)$ , où  $\psi_i := \phi_i \circ \phi^{-1}$ , un biholomorphisme de  $\phi(U \cap U_i)$  sur  $\phi_i(U \cap U_i)$ . On pose donc  $\omega_{\phi,i} := \psi_i^*(\omega_i)$  et l'on doit vérifier que  $\omega_{\phi,i}$  coïncide avec  $\omega_{\phi,j}$  sur  $V'_i \cap V'_j$ . Mais cela résulte du calcul :

$$\psi_i^*(\omega_i) = \psi_i^*(\phi_{i,j}^*(\omega_j)) = (\phi_{i,j} \circ \psi_i)^*(\omega_j) = \psi_j^*(\omega_j),$$

puisque  $\phi_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j$  sur l'ouvert concerné.

(ii) La deuxième assertion s'en déduit par *abstract nonsense*. Si l'on adjoint la carte  $(U, \phi)$  à l'atlas  $\mathcal{A}$ , et  $\omega_\phi$  à la famille des  $\omega_i$ , on obtient un nouvel atlas et une nouvelle famille de formes différentielles deux à deux compatibles. (Cela résulte de ce que l'on vient de faire.) Appliquant la première assertion à ces nouvelles données, on trouve une forme sur  $(U', \phi')$  qui leur est compatible. Par l'assertion d'unicité, c'est nécessairement  $\omega_{\phi'}$ , qui est donc en particulier compatible avec  $\omega_\phi$ .  $\square$

**Proposition 4.1.5** Soit  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$  un atlas sur  $X$  et soit, pour tout  $i$ , une forme différentielle  $\omega_i \in \Omega^1(\phi(U_i))$ . On suppose les  $\omega_i$  deux à deux compatibles. Il existe alors une unique forme différentielle  $\omega$  sur  $X$  dont les  $\omega_i$  soient des écritures locales.

*Preuve.* - Pour toute carte  $(U, \phi)$  compatible avec  $\mathcal{A}$ , on a une forme  $\omega_\phi \in \Omega^1(\phi(U))$  d'après la première assertion du lemme. Toutes ces formes  $\omega_\phi$  sont compatibles entre elles d'après la deuxième assertion du lemme : par définition, ce sont donc toutes les écritures locales d'une même forme  $\omega$ .  $\square$

Les formes différentielles sur  $X$  forment un  $O(X)$ -module que nous noterons  $\Omega^1(X)$ . En effet, avec les notations précédentes, si  $f \in O(X)$  et si  $\omega \in \Omega^1(X)$  a pour écritures locales les  $\omega_i := f_i(z) dz \in \Omega^1(\phi(U_i))$  dans l'atlas  $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$ , on peut définir sur chaque carte  $(f|_{U_i})\omega_i := (f \circ \phi_i^{-1})(z) f_i(z) dz$ . Alors les  $(f|_{U_i})\omega_i$  sont compatibles entre elles et se recollent donc en une forme différentielle  $f\omega \in \Omega^1(X)$ . On peut justifier de même l'existence d'une loi d'addition et tous les axiomes des modules.

Les formes différentielles sur un ouvert  $U$  de  $X$  (considéré lui-même comme surface de Riemann, avec la structure induite) forment donc un  $O_X(U)$ -module, que nous noterons  $\Omega_X^1(U)$ . Lorsque  $U' \subset U$ , on a une application de restriction :  $\Omega_X^1(U) \rightarrow \Omega_X^1(U')$  qui est  $O_X(U)$ -linéaire. Pour résumer les propriétés de l'objet global  $\Omega_X^1$  (donnée de tous les  $O_X(U)$ -modules  $\Omega_X^1(U)$ ), on dit que c'est un "faisceau de modules" sur le "faisceau d'anneaux"  $O_X$ .

**Exercice 4.1.6** Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ , avec sa structure induite de surface de Riemann. Alors  $\Omega_X^1(X) = \Omega^1(X)$ . [*Indication* : Utiliser le lemme et un atlas très simple.]

### Quelques constructions utiles

Nous allons les donner sur la surface de Riemann  $X$ , elles gardent un sens sur tout ouvert  $U \subset X$ , même non connexe : le lecteur opérera lui-même les adaptations nécessaires.

1. Soit  $g \in O(X)$ . Pour toute carte  $(U, \phi)$ , posons :  $\omega_\phi := d(g \circ \phi^{-1}) \in \Omega^1(\phi(U))$ . Les formes  $\omega_\phi$  ainsi définies sont deux à deux compatibles en vertu du calcul suivant (notations évidentes) :

$$\begin{aligned} \psi^*((\omega_\phi)_{|\phi(U \cap U')}) &= (\phi' \circ \phi'^{-1})^*((g \circ \phi'^{-1})'(z) dz) \\ &= (g \circ \phi'^{-1})'(\phi' \circ \phi'^{-1})(z) (\phi' \circ \phi'^{-1})'(z) dz \\ &= (g \circ \phi^{-1})'(z) dz = (\omega_\phi)_{|\phi(U \cap U')}. \end{aligned}$$

Ce sont donc les écritures locales d'une forme  $\omega \in \Omega^1(X)$  : cette forme est notée  $dg$  et l'on dit qu'elle est *exacte* et que  $g$  en est une *primitive* sur  $X$ . La même construction permet plus généralement d'associer à toute fonction holomorphe  $g \in O_X(U)$  sa *différentielle*  $dg \in \Omega_X^1(U)$ , qui est une forme différentielle exacte sur  $U$  et dont  $g$  est une primitive.

2. L'application  $g \mapsto dg$  de  $O_X(U)$  dans  $\Omega_X^1(U)$  est  $\mathbf{C}$ -linéaire et vérifie la règle de Leibniz :  $d(gh) = g dh + h dg$ .
3. Pour que  $dg$  soit nulle, il faut, et il suffit, que chaque  $d(g \circ \phi^{-1})$  le soit, donc que chaque  $g \circ \phi^{-1}$  soit localement constante sur  $\phi(U)$ , donc que  $g$  soit localement constante. Dans le cas où  $g \in O(X)$ , cela revient à dire que  $g$  est constante (puisque  $X$  est connexe). Plus

généralement, les primitives d'une forme exacte sur  $U \subset X$  sont définies à une fonction localement constante sur  $U$  près.

4. Toute forme différentielle admet localement des primitives : il en est ainsi au moins sur chaque carte dont l'image est un disque. Nous verrons à la section 4.2 que cela reste vrai sur tout ouvert simplement connexe.

### 4.1.3 Exemples

On peut démontrer que, pour toute surface de Riemann compacte  $X$ , le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\Omega^1(X)$  est de dimension finie  $g$ , où  $g$  est le *genre* de  $X$ , dont nous avons vu au paragraphe 3.1.4 qu'il admet également une définition topologique. En voici quelques exemples.

#### La sphère de Riemann est de genre 0

Soit  $\omega \in \Omega^1(\mathbf{S})$ . On prend l'atlas habituel, et l'on cherche à expliciter les écritures locales. Sur  $\mathbf{C}_0$ ,  $\omega$  s'écrit  $f(z)dz$ , où  $f \in O(\mathbf{C})$ ; sur  $\mathbf{C}_\infty$ ,  $\omega$  s'écrit  $g(1/z)d(1/z)$ , où  $g \in O(\mathbf{C})$ . On cherche donc  $f, g \in O(\mathbf{C})$  telles que, sur  $\mathbf{C}^*$ , on ait :  $f(z)dz = g(1/z)d(1/z)$ , i.e.  $z^2 f(z) + g(1/z) = 0$ . On voit à l'aide des développements en série entière que cela n'est possible que si  $f = g = 0$ . On a donc  $\Omega^1(\mathbf{S}) = \{0\}$  et le genre de  $\mathbf{S}$  est 0.

#### Tout tore complexe est de genre 1

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{C}$ . Rappelons que, si l'on note  $p$  la projection canonique  $\mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda := \mathbf{C}/\Lambda$ , on a un atlas formé de cartes  $(U, \phi)$  telles que  $p \circ \phi = \text{Id}_U$  et que les biholomorphismes de changements de cartes correspondants sont de la forme  $\psi : z \mapsto z + \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  (paragraphe 3.1.3 du chapitre 3). Si l'on pose  $\omega_\phi = dz$  pour toutes ces cartes, on a évidemment  $\psi^*(\omega_{\phi'}) = \omega_\phi$  sur leur domaine commun, car cette égalité signifie que  $d(z + \lambda) = dz$ . Les  $\omega_\phi$  se recollent donc en une forme différentielle sur  $T_\Lambda$  qui s'écrit  $dz$  dans toutes les cartes, et que l'on note  $dz$ .

Si maintenant  $\omega \in \Omega^1(T_\Lambda)$  est quelconque, et si son écriture dans chaque carte  $(U, \phi)$  est  $f_\phi(z)dz$ , la contrainte de compatibilité  $\psi^*(\omega_{\phi'}) = \omega_\phi$  dit que  $f_{\phi'}(z + \lambda) = f_\phi(z)$ . On en déduit que toutes les fonctions  $f_\phi \circ \phi \in O_{T_\Lambda}(U)$  coïncident sur leurs domaines communs, donc se recollent en une fonction holomorphe sur  $T_\Lambda$ . Comme  $T_\Lambda$  est compacte, cette fonction est constante. Toute forme différentielle sur  $T_\Lambda$  est donc de la forme  $adz$  avec  $a \in \mathbf{C}$ , autrement dit :  $\Omega^1(T_\Lambda) = \mathbf{C}dz$ , et le tore complexe  $T_\Lambda$  est de genre 1.

**Remarque 4.1.7** Malgré son écriture, la forme  $dz$  n'admet pas de primitive globale, puisque  $O(T_\Lambda) = \mathbf{C}$  : la seule forme exacte globale sur une surface de Riemann compacte est 0.

#### Formes différentielles sur une courbe algébrique

Soit  $\Gamma$  la courbe algébrique affine d'équation  $P(z, w) = 0$ , et soit  $X := \Gamma_{reg} = X_z \cup X_w$  la surface de Riemann associée ; on a noté  $X_z$ , resp.  $X_w$ , l'ouvert  $P'_w \neq 0$  de  $X$  (donc le lieu où  $(z, w) \mapsto z$  est une carte), resp. l'ouvert  $P'_z \neq 0$  de  $X$  (donc le lieu où  $(z, w) \mapsto w$  est une carte).

Les fonctions  $(z, w) \mapsto z$  et  $(z, w) \mapsto w$ , que l'on notera (un peu abusivement) respectivement  $z$  et  $w$ , sont holomorphes sur  $X$ , donc définissent des formes exactes  $dz, dw \in \Omega^1(X)$ . Les fonctions

$z$  et  $w$  vérifient une relation algébrique  $P(z, w) = 0$ , d'où la conséquence évidente  $d(P(z, w)) = 0$ . Notant  $P = \sum a_{i,j} z^i w^j$ , en vertu de la  $\mathbf{C}$ -linéarité et de la règle de Leibniz, cette conséquence s'écrit :

$$0 = d\left(\sum a_{i,j} z^i w^j\right) = \sum a_{i,j} i z^{i-1} w^j dz + \sum a_{i,j} j z^i w^{j-1} dw = P'_Z(z, w) dz + P'_W(z, w) dw.$$

Il en découle que la forme qui s'écrit  $\frac{1}{P'_W(z, w)} dz$  sur  $X_z$  et la forme qui s'écrit  $-\frac{1}{P'_Z(z, w)} dw$  sur  $X_w$  coïncident sur  $X_z \cap X_w$ , donc qu'elles définissent une forme différentielle  $\omega \in \Omega^1(X)$ . Comme cette forme joue un rôle très important, nous allons en étudier quelques exemples.

### Cas d'une courbe hyperelliptique

Supposons que  $P(Z, W) = W^2 - Q(Z)$ . Les dérivées partielles sont  $2W$  et  $-Q'(Z)$ , les points singuliers sont donc ceux tels que  $w = Q(z) = Q'(z) = 0$ . Si le polynôme  $Q$  est *séparable*, i.e. s'il n'admet pas de racines multiples,  $Q$  n'étant pas un carré, le polynôme  $P$  est irréductible dans  $\mathbf{C}[Z, W]$ ; et la courbe  $\Gamma$  est non singulière et possède donc une structure de surface de Riemann.

Dans ce cas, la forme différentielle de l'exemple précédent est (à un facteur près)  $\omega = \frac{dz}{w} = \frac{2dw}{Q'(z)}$  : écriture abusive qui signifie que  $\omega$  admet l'une ou l'autre écriture selon la carte choisie.

### Une courbe hyperelliptique de genre 0

On prend  $Q(Z) := 1 - Z^2$ . La forme particulière ci-dessus est donc  $\omega = \frac{dz}{w} = -\frac{dw}{z}$ , ce que l'on pourrait écrire (improprement mais suggestivement)  $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$ .

Nous allons tenter de prolonger cette forme à l'infini. On utilise des coordonnées homogènes telles que  $z = x_1/x_0$  et  $w = x_2/x_0$ , d'où l'équation homogène  $P^h(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 P(x_1/x_0, x_2/x_0)$ , i.e.  $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ . Les points à l'infini, caractérisés par la condition  $x_0 = 0$ , sont  $[0 : 1 : i]$  et  $[0 : 1 : -i]$ . Ils sont tous deux situés dans l'ouvert affine  $x_1 \neq 0$ , et l'on a donc recours aux coordonnées affines  $u := x_0/x_1$  et  $v := x_2/x_1$ . Sur leurs domaines communs, les couples de coordonnées  $(z, w)$  et  $(u, v)$  sont liés par les relations  $u = 1/z$  et  $v = w/z$ , ou, de manière équivalente,  $z = 1/u$  et  $w = v/u$ . On peut donc écrire (toujours avec la linéarité et la règle de Leibniz) :

$$\omega = \frac{dz}{w} = \frac{d(1/u)}{(v/u)} = -\frac{du}{uv},$$

mais aussi :

$$\omega = -\frac{dw}{z} = -\frac{d(v/u)}{(1/u)} = \frac{vdu - u dv}{u}.$$

Notons d'ailleurs que ces relations sont cohérentes, puisque l'équation de la courbe dans les coordonnées  $(u, v)$  est  $P^h(u, 1, v)$ , c'est-à-dire  $v^2 - u^2 + 1 = 0 \Rightarrow udu = vdv$ .

Pour savoir si l'on a ou non une forme holomorphe, il faut l'exprimer dans une carte. Les points à l'infini ont pour coordonnées  $u = 0$  et  $v = \pm i$ . Ils n'annulent pas la deuxième dérivée partielle  $2v$ , c'est donc  $u$  qui est une carte en ces points. L'écriture  $-\frac{du}{uv}$  montre alors que  $\omega$  n'est pas une forme holomorphe en ces points. C'était prévisible, car la courbe projective  $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$  est "isomorphe" à la sphère de Riemann dont on a vu que son genre est 0.

## Une courbe hyperelliptique de genre 1

On prend  $Q(Z) := Z^3 + pZ + q$ ; la condition pour que ce polynôme soit séparable porte sur son discriminant : c'est que  $4p^3 + 27q^2 \neq 0$ , ce que nous supposons. La courbe  $\Gamma$  est alors une *cubique non singulière*, nous l'étudierons en détail au chapitre 5.

Ici,  $\omega = \frac{dz}{w} = -\frac{2dw}{3z^2 + p}$ . La complétion projective a pour équation :

$$P^h(X, Y, T) = T^3P(X/T, Y/T) = Y^2T - (X^3 + pXT^2 + qT^3).$$

L'unique point à l'infini, qui s'obtient en remplaçant  $T$  par 0, est donc  $[0 : 1 : 0]$ , que l'on étudiera donc dans l'ouvert affine  $y \neq 0$ , avec les coordonnées  $u := x/y = z/w$  et  $v := t/y = 1/w$ . Les équations réciproques  $z = u/v$ ,  $w = 1/v$ , permettent de calculer :

$$\omega = \frac{dz}{w} = \frac{vdu - u dv}{v} \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{2dw}{3z^2 + p} = -\frac{2dv}{3u^2 + pv^2}.$$

D'après l'équation non homogène  $R(u, v) := v - (u^3 + puv^2 + qv^3) = 0$ , qui entraîne l'égalité

$$R'_u du + R'_v dv = -(3u^2 + pv^2) du + (1 - 2puv - 3qv^2) dv = 0,$$

on vérifie facilement la compatibilité des deux écritures trouvées. Ces deux écritures sont indéfinies en le point à l'infini  $u = v = 0$ , mais cela ne signifie pas que la forme n'y soit pas holomorphe : en effet, il faut exprimer  $\omega$  dans une carte pour le savoir. C'est  $R'_v$  qui ne s'annule pas en  $u = v = 0$  (confirmant ainsi que le point à l'infini n'est pas singulier, donc que la courbe projective est non singulière), et l'on prendra donc  $(u, v) \mapsto u$  comme carte : il faut donc exprimer  $\omega$  sous la forme  $f(u, v) du$ , ce qui passe par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{vdu - u dv}{v} &= \frac{-2dv}{3u^2 + pv^2} \\ &= \frac{2(vdu - u dv) - u(-2dv)}{2(v) - u(3u^2 + pv^2)} \\ &= \frac{2vdu}{2v - 3u^3 - puv^2} \\ &= \frac{2vdu}{-v + 2puv^2 + 3qv^3} \\ &= \frac{2du}{-1 + 2puv + 3qv^2}. \end{aligned}$$

(L'égalité  $2v - 3u^3 - puv^2 = -v + 2puv^2 + 3qv^3$  vient de la relation  $R(u, v) = 0$ .) Sous cette forme, on voit que  $\omega$  est bien holomorphe à l'infini, et donc que  $\omega \in \Omega^1(X)$ .

En fait, on prouvera au chapitre 5 (et c'est même le théorème central de ce cours) que toute cubique projective non singulière est "isomorphe" à un tore complexe : son genre est donc 1, comme nous l'avons vu plus haut. Et d'ailleurs, la forme que nous venons de construire s'identifie via l'isomorphisme que nous construirons à la forme  $dz$  sur  $T_\Lambda$ .

**Exercice 4.1.8** Traiter les cas  $Q(Z) = Z$  et  $Q(Z) := 1 - Z^4$ .

## 4.2 Intégrale d'une forme différentielle holomorphe

### 4.2.1 Prolongement analytique sur une surface de Riemann

Ce paragraphe a un rôle auxiliaire : il vise à simplifier la définition et l'étude, au paragraphe suivant, de l'intégration d'une forme différentielle le long d'un chemin d'une surface de Riemann. Comme pour la définition des formes différentielles, le jeu se joue en deux étapes : d'abord on construit des objets locaux sur la surface de Riemann en transportant à l'aide de cartes des constructions connues sur  $\mathbf{C}$  ; puis on globalise ces objets locaux : et c'est là que le prolongement analytique intervient.

**Définition 4.2.1** (i) Un *élément fonctionnel* sur la surface de Riemann  $X$  est un couple  $(\Omega, f)$ , où  $\Omega$  est un domaine de  $X$  et où  $f \in O_X(\Omega)$ . Un *germe analytique* (ou une *branche analytique*) en  $p \in X$  est une classe d'équivalence d'éléments fonctionnels en  $p$  (i.e. tels que  $p$  est dans leur domaine de définition) pour la relation d'équivalence :

$$(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2) \iff \exists U \subset V_1 \cap V_2, \text{ voisinage ouvert de } p : (f_1)|_U = (f_2)|_U.$$

La classe de  $(\Omega, f)$  est notée  $[f, p]$ .

(ii) Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  un chemin d'origine  $p = \gamma(a)$  et d'extrémité  $q = \gamma(b)$ . Un *prolongement analytique du germe*  $[f, p]$  le long de  $\gamma$  est la donnée :

- d'une subdivision  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$ ,
- d'éléments fonctionnels  $(V_1, f_1), \dots, (V_k, f_k)$  ;

tels que :

1.  $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subset V_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  ;
2. Le germe de  $(V_1, f_1)$  en  $p$  est  $[f, p]$  ;
3. Pour  $i = 1, \dots, k-1$ , les restrictions de  $f_i$  et  $f_{i+1}$  à  $V_i \cap V_{i+1}$  (ouvert non vide puisqu'il contient  $\gamma(s_i)$ ) coïncident.

On dit que  $[f_k, q]$  est le *résultat du prolongement analytique*.

En raffinant la subdivision, on peut toujours se ramener au cas où chacun des ouverts  $V_i$  est le domaine d'une carte. On déduit alors de l'énoncé analogue dans  $\mathbf{C}$  (paragraphe 3.3.2 du chapitre 3) que le *résultat du prolongement analytique ne dépend que du germe*  $[f, p]$  *et du chemin*  $\gamma$ , et non des choix intermédiaires. Il est donc légitime de le noter  $[f, p]^\gamma$ . Nous pouvons maintenant énoncer le *principe de moindromie* :

**Théorème 4.2.2** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $X$  et  $\gamma, \gamma'$  deux chemins dans  $\Omega$  de même origine  $p$  et de même extrémité  $q$ , supposés homotopes dans  $\Omega$ . Soit  $[f, p]$  un germe analytique ; on suppose que le prolongement analytique de  $[f, p]$  est possible le long de tout chemin dans  $\Omega$ . Alors  $[f, p]^\gamma = [f, p]^{\gamma'}$ .

*Preuve.* - On peut aussi bien supposer que l'intervalle de définition de  $\gamma$  et  $\gamma'$  est  $[a, b] = [0, 1]$ . Soit  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma'$  dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, 1], H(s, 0) = \gamma(s) \text{ et } H(s, 1) = \gamma'(s), \\ \forall t \in [0, 1], H(0, t) = p \text{ et } H(1, t) = q. \end{aligned}$$

Puisque  $[0, 1]^2$  est compact et que son image est recouverte par des cartes incluses dans  $\Omega$ , il existe des subdivisions  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = 1$  telles que chaque "rectangle"  $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$  soit inclus dans le domaine d'une carte  $(U_{i,j}, \phi_{i,j})$ ,  $U_{i,j} \subset \Omega$ . Soient  $\gamma_j : s \mapsto H(s, t_j)$  les chemins intermédiaires. Il suffit de prouver que les prolongements analytiques le long de  $\gamma_{j-1}$  et de  $\gamma_j$  donnent le même résultat (puis récurrence sur  $j = 0, \dots, \ell$ ). On définit des chemins  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ , intermédiaires entre  $\gamma_{j-1}$  et  $\gamma_j$  comme suit :  $\lambda_0 = \gamma_{j-1}$ ,  $\lambda_k = \gamma_j$ , et, pour  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $\lambda_i$  est égal à  $\gamma_{j-1}$  sur  $[0, s_i - \varepsilon]$ , égal à  $\gamma_j$  sur  $[s_i + \varepsilon, 1]$  et, sur  $[s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon]$ , relie les deux bouts de chemin à l'intérieur de  $U_{i,j}$ . On voit alors que  $\lambda_{i-1}$  et  $\lambda_i$  ne diffèrent que par des bouts de chemins reliant ces deux points et qui sont homotopes dans  $U_{i,j}$  : on peut donc leur appliquer le principe de monodromie dans  $\mathbf{C}$  vu au paragraphe 3.3.2 du chapitre 3.  $\square$

## 4.2.2 Intégration d'une forme différentielle le long d'un chemin

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux<sup>4</sup> dans  $X$ , d'origine  $p = \gamma(a)$  et d'extrémité  $q = \gamma(b)$ . Soit  $V$  un ouvert de  $X$  qui contient l'image de  $\gamma$ , et soit  $\omega \in \Omega_X^1(V)$ . Soient  $s \leq t$  dans  $[a, b]$  et notons  $\gamma_{st}$  la restriction de  $\gamma$  à  $[s, t]$ . Soient enfin  $(U, \phi)$ ,  $(U', \phi')$  deux cartes telles que  $U$  et  $U'$  contiennent l'image  $\gamma([s, t])$  de  $\gamma_{st}$ . Notant  $\omega_\phi$  et  $\omega_{\phi'}$  les écritures de  $\omega$  dans ces deux cartes, et  $\psi$  le biholomorphisme de changement de carte, on a, en vertu des règles de calcul du paragraphe 4.1.1 :

$$\int_{\phi_* \gamma_{st}} \omega_\phi = \int_{\phi_* \gamma_{st}} \psi^* \omega_{\phi'} = \int_{\psi_*(\phi_* \gamma_{st})} \omega_{\phi'} = \int_{\phi'_* \gamma_{st}} \omega_{\phi'}.$$

D'autre part, si  $u \in [s, t]$ , on a (en vertu de *loc. cit.*) :

$$\int_{\phi_* \gamma_{st}} \omega_\phi = \int_{\phi_* \gamma_{su}} \omega_\phi + \int_{\phi_* \gamma_{ut}} \omega_\phi.$$

**Proposition 4.2.3** *Pour toute subdivision  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$  telle que chaque  $\gamma([s_{i-1}, s_i])$ ,  $i = 1, \dots, k$ , est inclus dans le domaine d'une carte  $(U_i, \phi_i)$ , la somme d'intégrales*

$$\sum_{i=1}^k \int_{\phi_* \gamma_{s_{i-1} s_i}} \omega_{\phi_i}$$

*a la même valeur, indépendante à la fois de la subdivision et du choix des cartes.*

*Preuve.* - La subdivision étant donnée, on a vu que les intégrales ne dépendent pas du choix des cartes. La somme ne change pas non plus par raffinement de la subdivision en vertu de la formule d'additivité qui précède la proposition. Enfin, deux subdivisions quelconques admettent un raffinement commun.  $\square$

**Définition 4.2.4** Cette somme est l'intégrale de la forme différentielle  $\omega$  sur le chemin  $\gamma$ , et on la note  $\int_\gamma \omega$ .

4. Voir la note page 65. La notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $X$  a un sens du fait que  $X$  est entre autres une variété différentielle  $\mathcal{C}^\infty$ .

Les propriétés suivantes découlent des propriétés analogues dans  $\mathbf{C}$  : il suffit de découper les chemins et de se ramener à des cartes ; puis d'appliquer le paragraphe précédent sur le prolongement analytique.

**Corollaire 4.2.5** (i) Si  $\omega$  admet une primitive  $g$ , on a :

$$\int_{\gamma} \omega = g(q) - g(p).$$

(ii) Si  $g$  est une primitive locale en  $p$  (par exemple, sur une carte en  $p$  dont l'image est un disque) et si  $\tilde{g}$  est le résultat de son prolongement analytique le long de  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \tilde{g}(q) - g(p).$$

(iii) Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont homotopes dans  $V$  :

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

(iv) Sur un ouvert simplement connexe, toute forme différentielle admet des primitives.

Les règles de calcul suivantes s'obtiennent par le même type d'arguments :

1.  $\mathbf{C}$ -linéarité :

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\gamma} \omega_2.$$

2. Additivité (relativement à la composition des chemins) :

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

3. Invariance par homotopie : si les chemins  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow V$  sont homotopes, alors :

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

4. Changement de paramètres : si  $\alpha : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  est bijective, croissante et de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \circ \alpha} \omega.$$

5. Changement de direction du temps : si l'on note  $\bar{\gamma}$  le chemin  $s \mapsto \gamma(a + b - s)$ , alors :

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

6. Functorialité : si  $F : X_1 \rightarrow X_2$  est un morphisme de surfaces de Riemann tel que  $F(V_1) \subset V_2$ , où  $V_1 \subset X_1$  et  $V_2 \subset X_2$  sont des ouverts, et si  $\omega \in \Omega_{X_2}^1(V_2)$ , alors, notant  $F_*(\gamma) := F \circ \gamma$  :

$$\int_{\gamma} F^* \omega = \int_{F_* \gamma} \omega.$$

La dernière règle appelle un commentaire, puisque nous n'avons pas encore défini ce qu'est un "morphisme" de surfaces de Riemann. Anticipant sur la section 4.4, voici le minimum vital. Le "morphisme"  $F$  est une application continue de  $X_1$  dans  $X_2$  telle que, pour tout ouvert  $V_2 \subset X_2$ , l'application  $f \mapsto f \circ F$  de  $\mathcal{C}(V_2, \mathbf{C})$  dans  $\mathcal{C}(F^{-1}(V_2), \mathbf{C})$  envoie  $\mathcal{O}_{X_2}(V_2)$  dans  $\mathcal{O}_{X_1}(F^{-1}(V_2))$ . Comme on le verra, une condition équivalente est la suivante : pour toute carte  $(U', \phi')$  de  $X_2$ ,  $\phi' \circ F$  est holomorphe sur  $F^{-1}(U')$ . Dans ces conditions, si  $\omega'$  est une forme différentielle sur un ouvert  $V_2$  de  $X_2$  dont l'écriture dans la carte  $(U', \phi')$  est  $\omega'_{\phi'}$ , et si  $(U, \phi)$  est une carte de  $X_1$  telle que  $F(U) \subset U'$ , on peut définir la forme  $\omega_\phi := (\phi' \circ F \circ \phi^{-1})^*(\omega'_{\phi'}) \in \Omega^1(\phi(U))$  et vérifier que les  $\omega_\phi$  se recollent en une forme différentielle  $\omega$  sur  $F^{-1}(V_2)$ , que l'on note  $F^*\omega'$ . La dernière règle (fonctorialité) se prouve alors sans difficulté.

**Exemple 4.2.6** Prenons pour  $X$  le tore complexe  $T_\Lambda$  et pour  $\omega$  la forme  $dz$ . Soit  $\gamma$  un chemin d'origine  $\gamma(0) = 0 \pmod{\Lambda}$  et d'extrémité  $\gamma(1) = q \in T_\Lambda$ . Puisque la projection canonique  $p : \mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda$  est un revêtement, le chemin  $\gamma$  admet un unique relèvement  $\bar{\gamma}$  d'origine 0 : autrement dit,  $\bar{\gamma}$  est l'unique chemin dans  $\mathbf{C}$  d'origine  $\bar{\gamma}(0) = 0$  tel que  $p \circ \bar{\gamma} = \gamma$ . L'extrémité  $z := \bar{\gamma}(1)$  de  $\bar{\gamma}$  est alors l'un des éléments de  $p^{-1}(q)$ , donc sa coordonnée dans l'une des cartes spéciales  $(U, \phi)$  telles que  $p \circ \phi = \text{Id}_U$  que nous avons construites au paragraphe 3.1.3 du chapitre 3.

Pour toute telle carte spéciale  $(U, \phi)$ , on a  $\omega_\phi = dz$ , la forme différentielle la plus simple sur  $\phi(U)$ . Si la restriction  $\gamma_{st}$  passe à l'intérieur de  $U$ , on a de plus  $\phi_*\gamma_{st} = \bar{\gamma}_{st}$ . On en déduit :

$$\int_{\phi_*\gamma_{st}} \omega_\phi = \int_{\bar{\gamma}_{st}} dz = \bar{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(s).$$

En appliquant la définition, on obtient donc :

$$\int_\gamma \omega = \bar{\gamma}(1) - \bar{\gamma}(0) = z.$$

Intégrer  $\omega$  le long d'un chemin de  $0 \pmod{\Lambda}$  à  $q$  est donc une manière de calculer une coordonnée du point  $q$ . C'est exactement de cette manière que nous prouverons au chapitre 5 qu'une cubique projective non singulière est un tore complexe.

**Exemple 4.2.7** Soit  $\Gamma$  le cercle d'équation  $w^2 + z^2 = 1$ . C'est une courbe non singulière, donc une surface de Riemann. Nous avons une carte globale  $\phi : (z, w) \mapsto z + iw$ , à valeurs dans  $\mathbf{C}^*$ . (Il est chaudement conseillé au lecteur de vérifier que c'est bien une carte !) On vérifie la formule :

$$\phi^{-1}(u) = \left( \frac{u + u^{-1}}{2}, \frac{u - u^{-1}}{2i} \right).$$

Nous avons déjà rencontré la forme différentielle globale  $\omega = \frac{dz}{w} = -\frac{dw}{z}$ . Son écriture dans la carte ci-dessus est :

$$\omega_\phi = \frac{d\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)}{\left(\frac{u-u^{-1}}{2i}\right)} = i \frac{1-u^{-2}}{u-u^{-1}} du = i \frac{du}{u}.$$

Nous avons enfin un lacet de classe  $C^1$  bien naturel  $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Nous allons intégrer  $\omega$  sur  $\gamma$  :

$$\int_\gamma \omega = \int_{\phi_*\gamma} \omega_\phi = \int_{\phi_*\gamma} i \frac{du}{u} = 2\pi,$$

puisque  $\phi_*\gamma(t) = e^{it}$ .

## 4.3 Périodes d'une forme différentielle

### 4.3.1 Le groupe des périodes d'une forme différentielle

Soient  $p_0 \in X$  et  $\omega \in \Omega^1(X)$  fixés. On veut “mesurer” à quel point la fonction :

$$p \mapsto u(p) := \int_{p_0}^p \omega$$

est indéterminée (ou multiforme). Si l'on intègre  $\omega$  le long de deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $p_0$  à  $p$ , la différence des résultats sera :

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\lambda} \omega,$$

où  $\lambda := \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1}$  est un lacet de base  $p_0$ .

**Définition 4.3.1** Une *période* de la forme différentielle<sup>5</sup>  $\omega$  sur la surface de Riemann  $X$  est un nombre complexe de la forme  $\int_{\lambda} \omega$ , où  $\lambda$  est un lacet de base  $p_0$ .

En réalité, cette définition ne dépend pas de  $p_0$ . Soient en effet  $p'_0$  un autre point de  $X$  et  $\gamma$  un chemin arbitraire de  $p_0$  à  $p'_0$  (il en existe, puisque  $X$  est connexe par arcs) ; alors, pour tout lacet  $\lambda'$  de base  $p'_0$ , on a par conjugaison un lacet  $\lambda := \gamma \cdot \lambda' \cdot \gamma^{-1}$  de base  $p_0$  et les égalités :

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\gamma \cdot \lambda' \cdot \gamma^{-1}} \omega = \int_{\lambda'} \omega + \int_{\gamma} \omega - \int_{\gamma} \omega = \int_{\lambda'} \omega,$$

ce qui montre que les périodes calculées en  $p'_0$  sont les mêmes que celles calculées en  $p_0$ . Pour tout ce qui suit, nous considérerons donc le point arbitraire  $p_0$  comme fixé. Des propriétés de l'intégration des formes différentielles énoncées au paragraphe 4.2.2 (additivité relativement à la composition des chemins et invariance par homotopie), il découle que l'on a un morphisme de groupes :

$$\begin{cases} \pi_1(X, p_0) \rightarrow \mathbf{C}, \\ [\lambda] \mapsto \int_{\lambda} \omega. \end{cases}$$

Les périodes sont les éléments de l'image de ce morphisme et forment donc un groupe. Le *groupe des périodes de  $\omega$*  est un sous-groupe de  $\mathbf{C}$ , il est donc abélien. Nous le noterons  $\Lambda_{\omega}$ .

**Remarque 4.3.2** Nous n'avons défini l'intégrale d'une forme différentielle que le long d'un chemin  $C^1$  par morceaux. L'application  $[\lambda] \mapsto \int_{\lambda} \omega$  n'est donc *a priori* définie que pour les classes d'homotopie des lacets  $C^1$  par morceaux. Pour donner un sens au morphisme  $\pi_1(X, p_0) \rightarrow \mathbf{C}$ , il nous faut donc savoir que tout lacet de  $X$  est homotope à un lacet  $C^1$  par morceaux. Cela se démontre facilement à partir du fait analogue pour les chemins dans  $\mathbf{C}$ , qui relève du cours d'analyse complexe de L3 ou du cours de topologie de M1.

**Exemple 4.3.3** Prenons  $X = \mathbf{C}^*$ ,  $p_0 := 1$  et  $\omega := \frac{dz}{z}$ . De l'égalité  $\int_{\lambda} \omega = 2i\pi I(1, \lambda)$  (valable pour tout lacet  $\lambda$  dans  $\mathbf{C}^*$ ), on déduit que le groupe des périodes est  $\Lambda_{\omega} = 2i\pi\mathbf{Z}$ .

5. Il s'agit ici, selon la terminologie classique, des périodes des formes différentielles *de première espèce*, c'est-à-dire holomorphes sur  $X$ . L'intégration des “formes différentielles méromorphes” revêt également une grande importance, mais nous n'aurons sans doute pas le temps d'en parler.

Si, comme plus haut, on choisit un autre point  $p'_0$  de  $X$  et un chemin arbitraire  $\gamma$  de  $p_0$  à  $p'_0$ , on définit un isomorphisme de conjugaison :

$$\begin{cases} \pi_1(X, p'_0) \rightarrow \pi_1(X, p_0), \\ [\lambda'] \mapsto [\gamma \cdot \lambda' \cdot \gamma^{-1}]. \end{cases}$$

Le calcul vu plus haut dit alors que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, p'_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(X, p_0) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

Pour en revenir à l'indétermination de la fonction multiforme  $u(p)$ , on voit que si  $s$  est l'une de ses *branches* sur une région  $U$  de  $X$ , alors toutes ses branches sont de la forme  $s + \pi$ , où  $\pi \in \Lambda_\omega$ .

**Théorème 4.3.4** *Pour que la fonction  $u(p)$  soit uniforme sur  $X$ , il faut, et il suffit, que la forme différentielle  $\omega$  soit exacte.*

*Preuve.* - Cela découle très simplement des règles de calcul vues au paragraphe 4.2.2 et de ce que l'on vient de dire : si la fonction  $u(p)$  est uniforme, c'est un élément de  $O(X)$  et l'on a vu dans *loc. cit.* que  $du = \omega$ . Réciproquement, si  $\omega = dg$  avec  $g \in O(X)$ , alors  $u(p) = g(p) - g(p_0)$ , qui définit bien une fonction uniforme sur  $X$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.5** *Pour que le groupe  $\Lambda_\omega$  des périodes de  $\omega$  soit trivial, il faut, et il suffit, que la forme différentielle  $\omega$  soit exacte.*

**Remarque 4.3.6** On a vu (sans le justifier) au paragraphe 3.1.4 que, si  $X$  est une surface de Riemann compacte, le groupe fondamental  $\pi_1(X, p_0)$  est engendré par  $2g$  générateurs  $a_i, b_i, 1 \leq i \leq g$ . Le groupe  $\Lambda_\omega$  est donc un sous-groupe de type fini de  $\mathbf{C}$ , donc un groupe abélien libre (puisque tout sous-groupe de  $\mathbf{C}$  est sans torsion). En revanche, on ne peut tirer aucune information de la relation  $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \cdots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$ , puisque l'image dans  $\mathbf{C}$  d'un commutateur  $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$  est de toutes façons triviale.

**Exercice 4.3.7** Si l'on choisit deux chemins de  $p_0$  à  $p'_0$ , on obtient deux isomorphismes de  $\pi_1(X, p'_0)$  sur  $\pi_1(X, p_0)$ . Comment ces isomorphismes sont-ils reliés ? [*Indication* : L'un est composé de l'autre par l'automorphisme intérieur défini par la classe du lacet d'aller-retour.]

### Homotopie et homologie

Rappelons que, si  $G$  et  $H$  sont deux groupes,  $H$  étant abélien, tout morphisme de  $G$  dans  $H$  admet une unique factorisation via le morphisme surjectif canonique  $G \rightarrow G^{ab}$ , où  $G^{ab} := G/[G, G]$  est l'*abélianisé* de  $G$ , c'est-à-dire son quotient par le *sous-groupe des commutateurs*  $[G, G]$ ; ce dernier étant lui-même le sous-groupe engendré par tous les *commutateurs*  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ ,  $g, h \in G$ , et étant automatiquement un sous-groupe distingué de  $G$ . De plus, cette construction est "fonctorielle" : tout morphisme de  $G_1$  dans  $G_2$  envoie  $[G_1, G_1]$  dans  $[G_2, G_2]$  et passe donc au quotient en un morphisme de  $G_1^{ab}$  dans  $G_2^{ab}$ .

Prenons  $G := \pi_1(X, p_0)$ . L'abélianisé sera noté  $\pi_1^{ab}(X, p_0)$ . Les automorphismes intérieurs de ce groupe abélien sont *ipso facto* triviaux. Il découle donc de l'exercice 4.3.7 que les isomorphismes de  $\pi_1(X, p'_0)$  sur  $\pi_1(X, p_0)$  induits par les chemins de  $p_0$  à  $p'_0$  définissent tous le même isomorphisme  $\pi_1^{ab}(X, p'_0)$  sur  $\pi_1^{ab}(X, p_0)$ . Tous ces groupes sont donc *canoniquement* isomorphes entre eux. De plus, le diagramme commutatif vu plus haut passe au quotient en :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{ab}(X, p'_0) & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(X, p_0) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

Il est donc justifié de ne pas mentionner le point de base dans la notation de  $\pi_1^{ab}(X, p_0)$ . Comme ce groupe est directement lié aux "groupes d'homologie" étudiés dans le cours de topologie de M1, nous le noterons  $H_1(X)$ . Nous avons donc, pour toute forme différentielle  $\omega$  sur  $X$ , un morphisme de groupes :

$$\begin{cases} H_1(X) \rightarrow \mathbf{C}, \\ [\lambda] \mapsto \int_{\lambda} \omega, \end{cases}$$

où  $[\lambda]$  dénote la classe modulo les commutateurs de la classe d'homotopie en un point arbitraire du lacet  $\lambda$ . D'après le corollaire 4.3.5, pour que ce morphisme soit trivial, il faut, et il suffit, que la forme différentielle  $\omega$  soit exacte.

**Remarque 4.3.8** Pour une surface de Riemann compacte de genre  $g$ , il découle des résultats (admis) énoncés au paragraphe 3.1.4 que  $H_1(X)$  est un groupe abélien libre de rang  $2g$ .

**Exercice 4.3.9** Dans le cas d'un tore complexe (genre 1), décrire une base de  $H_1(X)$  et le morphisme ci-dessus lorsque  $\omega = dz$ .

### Cohomologie

Notant provisoirement  $\phi_{\omega} : H_1(X) \rightarrow \mathbf{C}$  le morphisme décrit ci-dessus, il découle de la linéarité de l'intégrale (paragraphe 4.2.2) que l'on a :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}, \phi_{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} = \lambda_1 \phi_{\omega_1} + \lambda_2 \phi_{\omega_2}.$$

On en déduit que l'application :

$$\begin{cases} \Omega^1(X) \rightarrow \text{Hom}(H_1(X), \mathbf{C}), \\ \omega \mapsto \phi_{\omega} \end{cases}$$

est  $\mathbf{C}$ -linéaire. Nous avons vu plus haut que son noyau est le sous-espace  $dO(X) \subset \Omega^1(X)$  des formes différentielles exactes. Nous noterons  $H^1(X, \mathbf{C})$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}(H_1(X), \mathbf{C})$  ("cohomologie").

**Remarque 4.3.10** Pour une surface de Riemann compacte de genre  $g$ , il découle des résultats (admis) énoncés au paragraphe 3.1.4 que  $H^1(X, \mathbf{C})$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension  $2g$ .

**Exercice 4.3.11** Définir et justifier une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow O(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{C}).$$

### 4.3.2 Exemples

Nous utiliserons les calculs faits dans les exemples 4.2.6 et 4.2.7 du paragraphe 4.2.2.

#### Tore complexe

On prend  $X := T_\Lambda$  et  $\omega := dz$  (qui, rappelons-le, n'est pas une forme exacte). Soit  $\lambda$  un lacet de base  $\lambda(0) = \lambda(1) = 0 \pmod{\Lambda}$  dans  $T_\Lambda$ . Soit  $\gamma$  son unique relèvement dans  $\mathbf{C}$  d'origine 0. Son extrémité  $w := \gamma(1)$  est un antécédent dans  $\mathbf{C}$  de  $0 \pmod{\Lambda}$ , donc un élément de  $\Lambda$ . D'autre part :

$$w = \gamma(1) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_\lambda dz = \int_\lambda \omega.$$

Donc toute période de  $\omega$  est élément de  $\Lambda$ .

Réciproquement, si  $w \in \Lambda$ , tout chemin dans  $\mathbf{C}$  d'origine 0 et d'extrémité  $w$  se projette en un lacet  $\lambda := p \circ \gamma$  de base  $0 \pmod{\Lambda}$  et l'on a alors  $w = \int_\lambda \omega$  : donc le groupe des périodes de  $\omega$  est exactement  $\Lambda$ .

Ainsi, la fonction multiforme  $p \mapsto u(p) := \int_{p_0}^p \omega$  est définie modulo  $\Lambda$  ; autrement dit, la fonction  $p \mapsto u(p) \pmod{\Lambda}$  est bien définie de  $T_\Lambda$  dans lui-même : c'est évidemment l'identité.

#### “Cercle”

On prend pour  $X$  le cercle affine d'équation  $z^2 + w^2 = 1$  et pour  $\omega$  la forme différentielle  $\frac{dz}{w} = -\frac{dw}{z}$ . (Rappelons que l'on ne peut pas prolonger cette dernière en une forme différentielle holomorphe sur le compactifié de  $X$ , qui est en effet de genre 0.) Via l'isomorphisme  $\phi : X \rightarrow \mathbf{C}^*$ , on peut calculer, pour tout lacet  $\lambda$  :

$$\int_\lambda \omega = \int_{\phi_*\lambda} i \frac{du}{u} = 2\pi I(0, \phi_*\lambda).$$

Le groupe des périodes de  $\omega$  est donc  $2\pi\mathbf{Z}$ .

La fonction multiforme  $p \mapsto u(p) := \int_{p_0}^p \omega$  est donc définie modulo  $2\pi\mathbf{Z}$  ; autrement dit, la fonction  $p \mapsto u(p) \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$  est bien définie de  $X$  dans  $\mathbf{C}/2\pi\mathbf{Z}$ .

D'autre part, la fonction  $u \mapsto e^{iu}$  induit un isomorphisme de  $\mathbf{C}/2\pi\mathbf{Z}$  sur  $\mathbf{C}^*$ . En le composant avec la fonction  $p \mapsto u(p) \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$ , on retrouve l'isomorphisme  $\phi$ .

**Remarque 4.3.12** Nous employons libéralement le mot “isomorphisme” qui n'a pas encore été défini. Le lecteur vérifiera dans chaque cas que l'on a en tout cas une bijection ; et, chaque fois que cela a un sens, qu'elle est holomorphe, ainsi (lorsque cela a un sens) que sa réciproque. Après lecture de la section 4.4, il en déduira qu'il s'agit bien d'isomorphismes de surfaces de Riemann.

**Exercice 4.3.13** Expliciter la fonction  $p \mapsto u(p) \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$  en fonction des coordonnées de  $p$ . [Indication : On trouve une fonction trigonométrique inverse.]

## 4.4 Morphismes de surfaces de Riemann

### 4.4.1 Définition et exemples élémentaires

**Définition 4.4.1** Soit  $F : X \rightarrow X'$  une application continue entre deux surfaces de Riemann.

(i) L'application  $F$  est dite *holomorphe en*  $p \in X$  s'il existe une carte  $(U', \phi')$  de  $X'$  en  $p' := F(p)$  telle que la restriction de  $\phi' \circ F$  à l'ouvert  $F^{-1}(U')$  de  $X$  soit holomorphe en  $p$ . (C'est alors vrai pour toute carte en  $p'$  : le vérifier !)

(ii) L'application  $F$  est dite *holomorphe sur*  $X^6$  si elle est holomorphe en tout point de  $X$ .

De manière équivalente (le vérifier !),  $F$  est holomorphe si, pour toute carte  $(U', \phi')$  d'un atlas donné de  $X'$ , la restriction de  $\phi' \circ F$  à  $F^{-1}(U')$  est holomorphe. De manière encore équivalente (le vérifier encore !),  $F$  est holomorphe si, pour toute fonction holomorphe  $f$  sur un ouvert  $\Omega'$  de  $X'$ , la fonction  $f \circ F$  est holomorphe sur l'ouvert  $F^{-1}(\Omega')$  de  $X$ .

**Remarque 4.4.2** Pour tout ouvert  $\Omega'$  de  $X'$  et pour toute fonction continue  $f \in C_{X'}(\Omega')$ , on a  $F \circ f \in C_X(F^{-1}(\Omega'))$ , d'où un morphisme de faisceaux :  $C_{X'} \rightarrow F_* C_X$ , ceci en supposant seulement  $F$  continue. La condition d'holomorphie de  $F$  revient à dire que ce morphisme envoie le sous-faisceau  $O_{X'}$  de  $C_{X'}$  dans le sous-faisceau  $F_* O_X$  de  $F_* C_X$ . On obtient alors un morphisme  $F^\circ$  de faisceaux de  $\mathbf{C}$ -algèbres.

**Exemples 4.4.3** 1. Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{C}$  et soit  $T_\Lambda := \mathbf{C}/\Lambda$  le tore complexe muni de sa structure de surface de Riemann. Alors la projection canonique  $p : \mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda$  est holomorphe. En effet, on a vu qu'une fonction  $f$  sur un ouvert  $V$  de  $T_\Lambda$  est holomorphe si, et seulement si,  $f \circ p$  est holomorphe, ce qui est strictement plus fort que la condition ci-dessus.

2. Soient  $\Lambda_1, \Lambda_2$  deux réseaux de  $\mathbf{C}$  et soit  $a \in \mathbf{C}$  un complexe tel que  $a\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ . Soit  $b \in \mathbf{C}$  arbitraire. Il résulte de l'hypothèse sur  $a$  que l'on a l'implication :

$$\forall z, z' \in \mathbf{C}, (z \equiv z' \pmod{\Lambda_1}) \implies (az + b \equiv az' + b \pmod{\Lambda_2}).$$

L'application  $z \mapsto az + b$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  passe donc au quotient en une application  $f : T_{\Lambda_1} \rightarrow T_{\Lambda_2}$ . L'application  $f$  est holomorphe. Nous verrons au chapitre 6 que toute application holomorphe  $T_{\Lambda_1} \rightarrow T_{\Lambda_2}$  est de cette forme.

3. Soient plus généralement  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{C}$ ,  $X$  une surface de Riemann et  $F : \mathbf{C} \rightarrow X$  une application holomorphe telle que :

$$\forall z, z' \in \mathbf{C}, (z \equiv z' \pmod{\Lambda}) \implies (F(z) = F(z')).$$

Alors l'application  $f : T_\Lambda \rightarrow X$  obtenue par passage au quotient est holomorphe. Toutes les applications holomorphes de  $T_\Lambda$  dans  $X$  s'obtiennent ainsi. L'argument est similaire à celui de l'exemple 4 du paragraphe 3.2.1.

4. Soient  $f$  une fonction méromorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  et  $Z$  l'ensemble de ses pôles. L'application  $F$  de  $U$  dans  $\mathbf{S}$  qui est égale à  $f$  sur  $U \setminus Z$  et qui envoie tout point de  $Z$  en  $\infty$  est holomorphe. En effet, il est évident qu'elle est holomorphe en tout point de  $U \setminus Z$ . Si  $p \in Z$ , il y a un disque ouvert  $V$  de centre  $p$  dans  $U$  et une fonction holomorphe  $g$  sur  $V$  telle que  $f = 1/g$  sur  $V \setminus \{p\}$  ; en utilisant la carte canonique à l'infini en  $F(p) = \infty \in \mathbf{S}$ , on voit que  $F$  est bien holomorphe en  $p$ .

---

6. Cartan, "Fonctions analytiques" ; Dolbeault, "Analyse complexe" ; Griffiths, "Introduction to algebraic curves".

5. En particulier, toute fraction rationnelle définit une application holomorphe de  $\mathbf{S}$  dans  $\mathbf{S}$ . On verra à la section 4.5 que toute application holomorphe de  $\mathbf{S}$  dans  $\mathbf{S}$  (autre que la fonction constante  $\infty$ ) est de cette forme.

**Exercice 4.4.4** Démontrer que la structure de surface de Riemann qui a été définie sur  $T_\Lambda$  est la seule qui fasse de la projection canonique  $p : \mathbf{C} \rightarrow T_\Lambda$  une application holomorphe.

## 4.4.2 Le yoga de base

### Comportement fonctoriel et cas élémentaires

L'identité de  $X$  est évidemment une application holomorphe. La composée  $G \circ F : X \rightarrow X''$  de deux applications holomorphes  $F : X \rightarrow X'$  et  $G : X' \rightarrow X''$  est holomorphe. On a donc une *catégorie* dont les *objets* sont les surfaces de Riemann, et les *morphismes* d'un objet  $X$  dans un objet  $X'$  sont les applications holomorphes de la surface de Riemann  $X$  dans la surface de Riemann  $X'$ . Nous dirons dorénavant “morphisme” (de surfaces de Riemann) à la place de “application holomorphe”.

Les applications constantes sont des morphismes. Les morphismes de  $X$  dans  $\mathbf{C}$  sont les fonctions holomorphes sur  $X$ . Un morphisme de  $X$  dans  $X'$  donne, par restriction à l'ouvert  $Y \subset X$ , un morphisme de  $Y$  dans  $X'$ . Si son image est incluse dans l'ouvert  $Y' \subset X'$ , il donne, par corestriction, un morphisme de  $X$  dans  $Y'$ . Si  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , pour qu'une application arbitraire  $F$  de  $X$  dans  $X'$  soit un morphisme, il faut, et il suffit, que chaque restriction  $F|_{U_i}$  soit un morphisme de  $U_i$  dans  $X'$ .

Dans toute catégorie, on définit un *isomorphisme* de l'objet  $X$  dans l'objet  $X'$  comme un morphisme  $F$  de  $X$  dans  $X'$  qui est de plus *invertible* : cela signifie qu'il existe un morphisme  $G$  de  $X'$  dans  $X$  tel que  $G \circ F = \text{Id}_X$  et  $F \circ G = \text{Id}_{X'}$ . Il est bien clair que tout isomorphisme de surfaces de Riemann est un morphisme bijectif. La réciproque est vraie, mais pas tautologique (penser à la catégorie des espaces topologiques dont les morphismes sont les applications continues : l'assertion équivalente  $y$  est fausse). Nous démontrerons ce théorème au paragraphe 4.4.4. Il y a un critère simple pour reconnaître un isomorphisme de  $X$  sur  $X'$  : il transforme un atlas de  $X$  en un atlas de  $X'$  et réciproquement. C'est la manière la plus simple de voir que la bijection évidente entre  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  et  $\mathbf{S}$  est un isomorphisme.

**Exemples 4.4.5** 1. L'application  $u \mapsto \left( \frac{u+u^{-1}}{2}, \frac{u-u^{-1}}{2i} \right)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{C}^*$  sur le cercle  $z^2 + w^2 = 1$ , réciproque de l'application  $(z, w) \mapsto z + iw$  du cercle sur  $\mathbf{C}^*$ .

2. La bijection  $f : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}^*$  induite par passage au quotient de l'application  $t \mapsto e^{2i\pi t}$  permet de munir (par transport de structure)  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$  d'une unique structure de surface de Riemann telle que  $f$  soit un isomorphisme.

**Exercice 4.4.6** La structure de surface de Riemann ci-dessus sur  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$  est la seule qui fasse de la projection naturelle  $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$  un morphisme. Pour toute surface de Riemann  $X$ , l'application  $g \mapsto g \circ p$  définit alors une bijection entre les morphismes  $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \rightarrow X$  et les morphismes  $\mathbf{C} \rightarrow X$  qui sont 1-périodiques.

### Effet sur les formes différentielles

Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme de surfaces de Riemann et soit  $\omega' \in \Omega^1(X')$  une forme différentielle holomorphe globale. Soit  $(U', \phi')$  une carte de  $X'$  dans laquelle  $\omega'$  s'écrit  $\omega'_{\phi'} \in \Omega^1(\phi'(U'))$ . Soit enfin  $(U, \phi)$  une carte de  $X$  telle que  $F(U) \subset U'$ . La fonction  $\phi' \circ F \circ \phi^{-1}$  est holomorphe de  $\phi(U) \subset \mathbf{C}$  dans  $\phi'(U') \subset \mathbf{C}$ . On peut donc poser :

$$\omega_{\phi} := (\phi' \circ F \circ \phi^{-1})^*(\omega'_{\phi'}) \in \Omega^1(\phi(U)).$$

On vérifie sans peine (autrement dit : faites-le !) que les  $\omega_{\phi}$  sont deux à deux compatibles et définissent donc une forme différentielle holomorphe globale  $\omega \in \Omega^1(X)$ . Cette forme est notée  $F^*\omega'$ . Lorsque  $X$  et  $X'$  sont des ouverts de  $\mathbf{C}$ , on retrouve la définition antérieure. Les propriétés relatives à ce cas se généralisent *mutatis mutandis*. En particulier,  $F : X \rightarrow X'$  désignant un morphisme de surfaces de Riemann :

1. Si  $g \in O(X')$ , alors  $F^*g := g \circ F \in O(X)$  et :

$$F^*(dg) = d(F^*g) \in \Omega^1(X).$$

2. L'application  $\omega' \mapsto F^*\omega'$  est  $O(X')$ -linéaire :

$$\forall g_1, g_2 \in O(X'), \forall \omega'_1, \omega'_2 \in \Omega^1(X'), F^*(g_1\omega'_1 + g_2\omega'_2) = F^*(g_1)F^*(\omega'_1) + F^*(g_2)F^*(\omega'_2).$$

3. Si  $\gamma$  est un chemin dans  $X$ , de sorte que  $F_*\gamma := F \circ \gamma$  est un chemin dans  $X'$ , et si  $\omega' \in \Omega^1(X')$  :

$$\int_{F_*\gamma} \omega' = \int_{\gamma} F^*\omega'.$$

**Exemple 4.4.7** Soit  $X$  le cercle d'équation  $z^2 + w^2 = 1$ . L'application  $F : u \mapsto \left(\frac{u+u^{-1}}{2}, \frac{u-u^{-1}}{2i}\right)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{C}^*$  sur  $X$ , réciproque de l'application  $(z, w) \mapsto z + iw$ . On a :

$$\begin{aligned} F^*\left(\frac{dz}{w}\right) &= F^*\left(\frac{z}{w} \frac{dz}{z}\right) \\ &= F^*\left(\frac{z}{w}\right) F^*\left(\frac{dz}{z}\right) \\ &= i \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Si l'on considère maintenant le lacet  $\gamma(t) := e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , sur  $\mathbf{C}^*$ , la troisième formule ci-dessus donne :

$$\int_{\gamma} i \frac{du}{u} = \int_{F_*\gamma} \frac{dz}{w}$$

que l'on peut vérifier par calcul direct.

**Exercice 4.4.8** Etendre l'exemple au projectif  $\bar{X}$  d'équation  $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$  et au morphisme de but  $\bar{X}$  défini par  $u^2 = x_1 + ix_2$ ,  $v^2 = x_1 - ix_2$ ,  $uv = x_0$ . (On en précisera la source.)

### 4.4.3 Extension aux morphismes des théorèmes sur les fonctions

A tout seigneur tout honneur, il y a d'abord le Principe du Prolongement Analytique :

**Théorème 4.4.9** *Si deux morphismes de surfaces de Riemann  $F, G : X \rightarrow X'$  coïncident sur un ouvert non vide de  $X$ , ils sont égaux.*

*Preuve.* - Comme dans le cas des fonctions, il suffit de prouver que l'ensemble  $E$  des points  $p \in X$  tels que  $F$  et  $G$  coïncident au voisinage de  $p$  est fermé (c'est trivialement un ouvert non vide). Soit  $(p_n)$  une suite dans  $E$  de limite  $p \in X$ . Soit  $(U', \phi')$  une carte en  $p' := F(p) = G(p)$  (cette dernière égalité découle de la continuité de  $F$  et  $G$ ). Soit  $U := F^{-1}(U') \cap G^{-1}(U')$ , donc un voisinage ouvert de  $p$ . Alors la suite est dans  $U$  à partir d'un certain rang, et l'on peut appliquer le Principe du Prolongement Analytique pour les fonctions holomorphes (théorème 3.2.4) et conclure que  $\phi' \circ F = \phi' \circ G$  au voisinage de  $p$ .  $\square$

**Corollaire 4.4.10** *Le même principe s'applique à tout domaine de  $X$ .*

Les conséquences s'enchainent comme dans le cas des fonctions.

**Proposition 4.4.11** *Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Les fibres  $F^{-1}(p')$ ,  $p' \in X'$ , sont des fermés discrets.*

*Preuve.* - Il est clair que ce sont des fermés (continuité de  $F$ ). Si l'on avait une suite convergente  $p_n \rightarrow p$  dans  $F^{-1}(p')$ , en se restreignant à une carte en  $p'$ , on se ramènerait au cas des fonctions, concluant que  $F$  est constant au voisinage de  $p$ ; en appliquant le théorème ci-dessus, on trouverait que  $F$  est constant, contradiction.  $\square$

**Proposition 4.4.12** *Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme non constant de surfaces de Riemann. C'est une application ouverte.*

*Preuve.* - Chaque restriction de  $F$  à un domaine de  $X$  qui s'envoie dans une carte de  $X'$  est holomorphe non constante, donc ouverte d'après la proposition analogue pour les fonctions. Comme de tels domaines recouvrent  $X$ , l'application  $F$  est ouverte.  $\square$

**Proposition 4.4.13** *Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme non constant de surfaces de Riemann,  $X$  étant de plus supposée compacte. Alors  $X'$  est compacte,  $F$  est surjectif et les fibres  $F^{-1}(p')$ ,  $p' \in X'$ , sont finies.*

*Preuve.* - L'image de  $F$  est un ouvert compact non vide de  $X'$ , c'est donc  $X'$  d'où les deux premières assertions. La troisième en découle puisque les fibres sont des fermés discrets.  $\square$

On verra au paragraphe 4.4.4 qu'il existe un entier  $n$  tel que toutes les fibres ont au plus  $n$  éléments, et que presque toutes les fibres ont exactement  $n$  éléments.

#### 4.4.4 Forme locale des morphismes et conséquences

**Lemme 4.4.14** Soient  $V, V'$  deux voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbf{C}$  et  $g : V \rightarrow V'$  une fonction holomorphe non constante telle que  $g(0) = 0$ . Il existe alors un entier  $e \geq 1$ , des voisinages ouverts  $W \subset V$  et  $W' \subset V'$  de 0 tels que  $g(W) \subset W'$  et des biholomorphismes centrés  $h, h'$  de  $W$  et  $W'$  sur le disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(0, 1)$  qui conjuguent  $g$  avec l'application  $f : z \mapsto z^e$ , i.e. tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & \overset{\circ}{D}(0, 1) \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ W' & \xrightarrow{h'} & \overset{\circ}{D}(0, 1) \end{array}$$

*Preuve.* - On pose  $g(z) =: \sum_{n \geq e} a_n z^n$  avec  $a_e \neq 0$  et l'on choisit  $b \in \mathbf{C}$  tel que  $b^e = a_e$ . On pose :

$$h(z) := bz(1 + (a_{e+1}/a_e)z + \dots)^{1/e} = bz + \dots$$

(L'exposant fractionnaire est justifié par la formule du binôme généralisé.) La fonction  $h$  est un difféomorphisme local en 0 et  $g = h' \circ f \circ h$ . Le reste en découle<sup>7</sup>.  $\square$

**Théorème 4.4.15** Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Soient  $p \in X$  et  $p' := F(p) \in X'$ . Pour toute carte  $(U', \phi')$  centrée en  $p'$ , il existe une carte  $(U, \phi)$  centrée en  $p$  telle que  $F(U) \subset U'$  et que, pour un certain  $e \in \mathbf{N}^*$ , on ait  $\phi' \circ F = \phi^e$ . Autrement dit, posant  $f(z) := z^e$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \overset{\circ}{D}(0, 1) \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ U' & \xrightarrow{\phi'} & \overset{\circ}{D}(0, 1) \end{array}$$

De plus, l'entier  $e$  est indépendant du choix de ces cartes.

*Preuve.* - On prend d'abord une carte  $(U_1, \phi_1)$  de  $X$  centrée en  $p$  telle que  $F(U_1) \subset U'$ . On applique le lemme à la fonction  $g := \phi' \circ F \circ \phi_1^{-1}$  de  $\phi_1(U_1)$  dans  $U'$ . Puis on restreint  $U_1$  en  $U := \phi_1^{-1}(W)$  et  $\phi_1$  en  $\phi$  sur  $U$  ; cela établit la première assertion.

La deuxième assertion découle alors de la caractérisation suivante de  $e$  : pour tout  $q$  dans un voisinage ouvert épointé de  $p$ , la fibre  $F^{-1}(F(q))$  a exactement  $e$  éléments au voisinage de  $p$ .  $\square$

**Définition 4.4.16** L'entier  $e$  est appelé *indice de ramification de  $F$  en  $p$* . On le note  $e_p(F)$ . On dit que  $p$  est un *point de ramification de  $F$* , ou que  $F$  est *ramifié en  $p$*  si  $e_p(F) \geq 2$ . Si  $e_p(F) = 1$ , on dit que  $F$  est *non ramifié en  $p$* .

Attention ! Cette terminologie est réservée aux morphismes non constants.

7. Cartan, "Fonctions analytiques", chap. VI, §1.2, p. 177.

**Corollaire 4.4.17** (i) L'ensemble des points de ramification d'un morphisme non constant est discret et fermé. Si  $F$  est non ramifié en  $p$ , c'est un biholomorphisme local en  $p$ .  
(ii) Si  $F$  est injectif, c'est un isomorphisme de  $X$  sur  $F(X) \subset X'$ . En particulier, tout morphisme bijectif est un isomorphisme.

*Preuve.* - (i) Dans la carte utilisée dans la preuve, si  $e = 1$ , il n'y a aucun point de ramification ; et si  $e \geq 2$ , le seul point de ramification est  $p$ , d'où la première assertion. En un point où  $e = 1$ , on a sur  $U$  l'égalité  $F = \phi' \circ \phi^{-1}$ , d'où la deuxième assertion.

(ii) L'image  $F(X)$  est un ouvert connexe de  $X'$ , donc une surface de Riemann, ce qui donne un sens à l'énoncé. On a alors  $e_p(F) = 1$  en tout point, sinon  $F$  ne serait pas injectif au voisinage de  $p$  (voir la preuve de la deuxième assertion du théorème). On a donc un biholomorphisme local bijectif de  $X$  sur  $F(X)$ , donc un isomorphisme.  $\square$

**Théorème 4.4.18** Soit  $F : X \rightarrow X'$  un morphisme non constant entre deux surfaces de Riemann compactes. (La compacité de  $X$  entraîne celle de  $X'$  d'après la proposition 4.4.13.) Pour tout  $p' \in X'$ , on note  $v(p') := \sum_{F(p)=p'} e_p(F)$ . La fonction  $v$  est constante sur  $X'$ . La valeur constante de  $v(p)$  est le degré du morphisme  $F$ , noté  $\deg F$ .

*Preuve.* - On va montrer que  $v$  est localement constante, ce qui sera suffisant (cette somme est finie d'après *loc. cit.*). Soit  $p' \in X'$  et soit  $(U', \phi')$  une carte centrée en  $p'$ . Soient  $p_1, \dots, p_k$  les points de  $F^{-1}(p')$  et, pour chaque  $p_i$ , soit  $(U_i, \phi_i)$  une carte dans laquelle  $F$  s'écrit sous la forme locale  $z \mapsto z^{e_i}$  décrite dans le théorème 4.4.15 : donc  $e_i = e_{p_i}(F)$ .

Il existe un voisinage ouvert  $V' \subset U'$  de  $p'$  tel que  $F^{-1}(V')$  est la réunion des  $V_i := F^{-1}(V') \cap U_i$ . En effet, dans le cas contraire, on trouverait une suite  $(p'_n)$  convergeant vers  $p'$  et des  $p_n \in F^{-1}(p'_n)$  n'appartenant pas à la réunion des  $U_i$  ; les  $p_n$  auraient un point d'accumulation  $p$  (compacité<sup>8</sup> de  $X$ ) appartenant à  $F^{-1}(p')$  mais pas à la réunion des  $U_i$ , contradiction.

L'ouvert  $V'$  étant ainsi déterminé, on voit que, pour tout  $q' \in V'$  distinct de  $p'$ , on a  $v(q') = \text{card } F^{-1}(q') = \sum e_i = v(p')$ , ce qui conclut.  $\square$

**Corollaire 4.4.19** Soit  $R \subset X$  l'ensemble (fini) des points de ramification de  $F$ . Pour tout  $p' \in X' \setminus F(R)$ , on a  $\text{card } F^{-1}(p') = \deg F$ . Les morphismes de degré 1 entre deux surfaces de Riemann compactes sont les isomorphismes.

*Preuve.* - L'ensemble  $R$  est toujours fermé discret (corollaire 4.4.17) ; la source  $X$  étant ici compacte,  $R$  est fini (donc  $F(R)$  également). Si  $p' \in X' \setminus F(R)$ , tous les points  $p$  de  $F^{-1}(p')$  vérifient  $e_p(F) = 1$ , d'où  $v(p') = \text{card } F^{-1}(p')$ . La deuxième assertion est immédiate.  $\square$

**Exemple 4.4.20** Soient  $\Lambda_1, \Lambda_2$  deux réseaux de  $\mathbf{C}$  et soit  $a \in \mathbf{C}$  un complexe tel que  $a\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ . Soit  $b \in \mathbf{C}$  arbitraire. On a vu (exemples du paragraphe 4.4.1) que  $z \mapsto az + b$  passe au quotient en un morphisme  $f : T_{\Lambda_1} \rightarrow T_{\Lambda_2}$ . Si  $a \neq 0$ , ce morphisme n'est pas constant. Il n'est ramifié en aucun point et son degré est l'indice de  $a\Lambda_1$  dans  $\Lambda_2$ .

**Exercice 4.4.21** Prouver ces assertions.

<sup>8</sup> Le lecteur ayant un goût pour la topologie verra ici que c'est en réalité la propriété de  $F$  qui intervient dans l'argument.

## **4.5 Fonctions méromorphes**

Par suite de restrictions budgétaires, cette section ne sera pas saisie pour le moment.

## **Chapitre 5**

# **Cubiques non singulières, périodes des intégrales elliptiques**

**5.1 Retour sur les intégrales circulaires**

**5.2 Intégrales elliptiques “de première espèce”**

**5.3 Le théorème d’addition d’Abel**

**5.4 Le groupe des périodes**

**5.5 L’inversion**

**5.6 Fonctions méromorphes sur une cubique non singulière**

## **Chapitre 6**

# **Tores complexes et fonctions elliptiques, l'invariant modulaire**

**6.1 Tores complexes**

**6.2 Fonctions elliptiques : théorèmes de Liouville et d'Abel**

**6.3 Fonctions elliptiques : fonctions de Weierstraß**

**6.4 Classification des tores complexes**

**6.5 Classification des réseaux de  $\mathbb{C}$**

**6.6 Multiplication complexe, multiplication réelle**

## **Chapitre 7**

# **Revêtements étales et revêtements ramifiés, courbes algébriques**

**7.1 Revêtements de surfaces de Riemann**

**7.2 Triangulations et genre**

**7.3 Diviseurs**

**7.4 Formes différentielles méromorphes**

**7.5 Courbes algébriques**

**7.6 Surfaces de Riemann compactes**