Classification analytique locale des équations aux q-différences irrégulières

Exposés au groupe de travail sur les équations aux q-différences, q-semaine, du 27/05/02 au 31/05/02

Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy,
Laboratoire Emile Picard, université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G.
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France
ramis@picard.ups-tlse.fr, sauloy@picard.ups-tlse.fr
Changgui Zhang USTL, etc ...

22nd July 2002

Résumé

1. Exposé 1, 27 mai, 11h00 (Jacques Sauloy) :
   Filtration par les pentes et gradué associé
2. Exposé 2, 27 mai, 17h00 (Jacques Sauloy) :
   Aspects algébriques de la classification
3. Exposé 3, 28 mai, 10h00 (Jean-Pierre Ramis) :
   Développements asymptotiques
4. Exposé 4, 29 mai, 10h00 (Jean-Pierre Ramis) :
   Faisceaux sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$
5. Exposé 5, 30 mai, 10h00 (Changgui Zhang) :
   Sommation discrète
6. Exposé 6, 31 mai, 10h00 (Changgui Zhang) :
   Transformation de Laplace

Contents

Chapter 1

Algèbre

1.1 Filtration par les pentes et gradué associé (premier exposé)

Cet exposé est purement préliminaire au deuxième, qui attaquera la classification algébrique à l'aide de l'algèbre homologique. On rappelle ici sans preuve les résultats de base qui justifient la méthode. Les preuves sont détaillées dans mes exposés de novembre dernier au Groupe de Travail q-Différences, rédigés et accessibles sur la page web du G.T. ou sur la mienne. De plus, la présente rédaction est purement squelettique et certaines notations sont susceptibles d'évoluer inopinément.

La lettre q désigne un nombre complexe de module $|q| > 1$. La lettre K désigne le corps de base, qui est l'un des corps $\mathcal{M}(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}(\{z\}) \subset \mathbf{C}((z))$. On parlera du "cas formel" lorsque $K = \mathbf{C}((z))$, du "cas convergent" dans les deux autres cas. On note σ_q l'automorphisme de K qui, à $f(z) \in K$, associe $f(qz) \in K$ et v_0 la valuation z-adique de K. Le corps des constantes C_K de K, formé, par définition, des éléments σ_q-invariants, est égal à $\mathbf{C}$ dans les trois cas.

Plus généralement, un *corps aux différences* (L, τ) est un corps L muni d'un automorphisme τ. Le *corps des constantes* de (L, τ) est le corps $C_L = \{x \in L \ / \ \tau(x) = x\}$. Le corps aux différences (L, τ) est une *extension* du corps aux différences (K, σ_q) si $K \subset L$ et $\tau_{|K} = \sigma_q$. Par exemple, les trois corps de base sont des extensions les uns des autres. Autre exemple:

Example 1.1.0.1 *Pour tout entier naturel non nul l, en prenant $z = z_l^l$ et $q = q_l^l$, on obtient une telle extension K_l de K (dans le cas de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$, il s'agit de prendre un revêtement de $\mathbf{C}$). Notons que tous les éléments du groupe de Galois de K_l sur K commutent avec l'automorphisme structural σ_{q_l}.*

Enfin, on note $\mathcal{D}_q$ l'algèbre de Öre des polynômes de Laurent non commutatifs $K\left\langle \sigma, \sigma^{-1} \right\rangle$ caractérisée par la règle: $\forall a \in K \ , \ \sigma a = \sigma_q(a)\sigma$; ses éléments sont les "opérateurs aux q-différences". On parle de polynômes ou opérateurs *entiers* s'ils ne comprennent pas de σ^k avec $k < 0$, *unitaires* si le coefficient dominant est 1. L'algèbre construite de manière analogue avec (L, τ) est notée $\mathcal{D}_L$. Son centre est C_L.

1.1.1 Equations, opérateurs, factorisation

On considère l'équation aux q-différences:

$$P.f := \sum_{i=0}^{n} a_i \sigma_q^{n-i}(f) = 0, \tag{1.1}$$

où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sigma^{n-i}$ est un polynôme (non commutatif) entier de $\mathcal{D}_q$, tel que $a_0 a_n \neq 0$. On peut même supposer P unitaire.

Polygone de Newton d'un opérateur

On définit successivement:

1. Le polygone de Newton $N(P)$ de P comme l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble:
$$\{(i,j) \ / \ 0 \leq i \leq n \ , \ a_i \neq 0 \ , \ j \geq v_0(a_i)\}.$$

2. L'ensemble des pentes $S(P)$ (les pentes des côtés non verticaux du polygone de Newton), que l'on rangera par ordre décroissant: $S(P) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$, avec $\mu_1 > \cdots > \mu_k$.

3. La fonction de Newton r_P de P, qui va de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$. Son support est $S(P)$ et, si l'on écrit $\mu = \frac{d}{r} \in S(P)$, où r (resp. d) est l'abcisse (resp. l'ordonnée) du côté de pente μ, on a $r_P(\mu) = r$. Dans le cas où P est entier unitaire, le sommet gauche de $N(P)$ est calé sur l'origine et la donnée de r_P équivaut à celle de $N(P)$.

Notons que ces définitions s'appliqueraient aussi bien à un polynôme non entier (i.e. avec des puissances négatives de σ). On va ici utiliser $N(P)$ pour étudier la factorisation de P, mais pas du tout pour la résolution de l'équation (bien que cela ait évidemment un rapport).

Manipulations sur P et leur effet sur $N(P)$

1. Si l'on multiplie P par $a \in \mathbf{C}^*$ (resp. par σ^k, $k \in \mathbf{Z}$), $N(P)$ est translaté verticalement de $v_0(a)$ (resp. horizontalement de k).

2. Par ramification $z = z_l^l$, $q = q_l^l$, les pentes sont multipliées par l.

3. Par transformation de jauge (i.e. changement de fonction inconnue dans l'équation) $f = u.g$, où $\sigma_q(u) = \alpha u$, $\alpha \in K^*$, les pentes sont diminuées de $v_0(\alpha)$. Notons que l'opération garde un sens algébrique précis même si u n'est pas dans K, il faut seulement que l'on ait $\alpha \in K^*$.

Theorem 1.1.1.1 *Le polygone de Newton est additif pour le produit, autrement dit,* $r_{P_1 P_2} = r_{P_1} + r_{P_2}$.

Equation caractéristique et exposants attachés à une pente

Si 0 est une pente de P, quitte à diviser P par $z^{\min v_0(a_i)}$, on peut supposer $N(P)$ posé sur l'axe des abcisses. On note alors $\overline{P}^{(0)}$ le polynôme en σ obtenu en remplaçant z par 0. Si μ est une pente entière quelconque de P, on la ramène à 0 par transformation de jauge et on note $P^{(\mu)}$ le polynôme correspondant. C'est, dans tous les cas, un "polynôme commutatif": $P^{(\mu)} \in \mathbf{C}[\sigma]$. L'équation $P^{(\mu)} = 0$ est *l'équation caractéristique attachée à la pente* μ. Les racines non nulles de $P^{(\mu)}$ sont les *exposants de P attachés à la pente* μ. L'exposant c est dit *non résonnant* si aucun cq^l, $l \in \mathbf{N}^*$ n'est exposant (attaché à la même pente).

Factorisation formelle

On suppose ici que l'on est dans le cas formel et que toutes les pentes de P sont entières.

Proposition 1.1.1.2 *Soient $c_1, \ldots, c_p$ les exposants attachés à la pente μ de P , et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que, si $\frac{c_j}{c_i} = q^l$, $l \in \mathbf{N}^*$, alors $i < j$ (les exposants les moins résonnants sont factorisés à droite les premiers). On a alors une factorisation $P = QR$, où $\mu \notin S(Q)$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec:*
$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,1}^{-1},$$
les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$. On a, de plus, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p} (X - c_i)^{m_i}$

On a ainsi "cassé la pente μ" du polygone de Newton. En itérant, on peut donc factoriser P en facteurs de degré 1 (en σ) avec un ordre quelconque des pentes.

Factorisation convergente

On suppose ici que l'on est dans le cas convergent et que toutes les pentes de P sont entières. On obtient le célèbre lemme d'Adams:

Theorem 1.1.1.3 *On reprend les notations de la proposition 1.1.1.2 et l'on suppose de plus que μ est la* plus petite pente *μ_k. La factorisation obtenue est alors convergente.*

En itérant, on peut donc factoriser P en facteurs de degré 1 (en σ) avec les pentes décroissant de gauche à droite.

1.1.2 Modules, suites exactes

Les modèles

On peut vectorialiser l'équation 1.1. Si l'on suppose $a_0 = 1$, elle équivaut au système $\sigma_q X = AX$, où:

$$X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in GL_n(K).$$

Résoudre ce système revient à chercher les points fixes de:

$$\Phi_A : K^n \to K^n \ , \ X \mapsto A^{-1}\left(\sigma_q X\right).$$

Plus intrinsèquement, on appelle *module aux q-différences* un couple (M, Φ), où M est un K-espace vectoriel de dimension finie et Φ est un automorphisme σ_q-linéaire, i.e. $\Phi(\lambda x) = \sigma_q(\lambda)\Phi(x)$. On notera souvent (abusivement) M le module aux q-différences (M, Φ). On appellera *rang* de (M, Φ) la dimension du K-espace vectoriel M. Il revient au même de définir un module aux q-différences comme un $\mathcal{D}_q$-module de longueur finie. Ils forment donc une catégorie abélienne $\mathbf{C}$-linéaire $DiffMod(K, \sigma_q)$. Le passage de l'une à l'autre définition se fait ainsi: un module aux q-différences (M, Φ) peut être vu comme un $\mathcal{D}_q$-module si l'on pose: $P.x = P(\Phi)(x)$. Réciproquement, un $\mathcal{D}_q$-module M peut être vu comme un module aux q-différences si on le munit de l'automorphisme σ_q-linéaire défini par: $\Phi : x \mapsto \sigma.x$. L'équivalence des conditions de finitude sur longueur et dimension est évidente.

Si (K', σ') est une extension de (K, σ), il y a un foncteur "changement de base" $- \otimes_K K'$: $DiffMod(K, \sigma_q) \to DiffMod(K', \sigma')$. Il est exact et $\mathbf{C}$-linéaire. Les exemples typiques sont la ramification et la formalisation.

Structure des modules aux q-différences

Notons $M_P = \mathcal{D}_q / \mathcal{D}_q P$. Du *lemme du vecteur cyclique* et de l'euclidianité à gauche de $\mathcal{D}_q$, on déduit:

Theorem 1.1.2.1 *Tout module aux q-différences est isomorphe à un tel M_P. On a donc une suite exacte:*

$$0 \to \mathcal{D}_q \xrightarrow{\times P} \mathcal{D}_q \to M \to 0. \tag{1.2}$$

Cependant, P n'est pas unique, même à facteur inversible près.

Remark 1.1.2.2 *L'isomorphisme de* (K^n, Φ_A) *avec* (K^p, Φ_B) *équivaut alors à l'équivalence usuelle:* $n = p$ *et* $\exists F \in GL_n(K)\ :\ (\sigma_q F)\, A = BF$. *On peut déduire de ce qui précède que tout système est équivalent à un système provenant d'une équation 1.1, mais il faut prendre garde que l'opérateur* P *n'est pas le même. Pour être précis, si l'on note* ${}_PM$ *le module obtenu par le premier modèle, c'est le dual de* M_P *(au sens de 1.1.4).*

Lemma 1.1.2.3 *Si* $P = QR$*, il y a une suite exacte naturelle :*

$$0 \to M_Q \to M_P \to M_R \to 0.$$

Par ailleurs, les modules de rang 1 sont les M_P avec $P = \sigma - a\ ,\ a \in K^*$. Combinant tout cela avec les théorèmes de factorisation de 1.1.1, on obtient:

Proposition 1.1.2.4 *Après une éventuelle ramification, tout module est triangularisable, i.e. dévissable par des modules de rang* 1 *et donc isomorphe à un* (K^n, Φ_A) *avec* A *triangulaire supérieure.*

Polygone de Newton d'un module

Theorem 1.1.2.5 *On peut associer à tout module* M *un polygone de Newton* $N(M)$ *et une fonction de Newton* r_M *de sorte que:*
(i) Le polygone de Newton est additif pour les suites exactes, i.e., pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$*, on a* $r_M = r_{M'} + r_{M''}$.
(ii) Pour tout opérateur P*,* $N(M_P) = N(P)$.

Les ingrédients pour construire $N(M)$ sont:

1. Le cas des modules de rang 1: pour $M_{\sigma - a}$, le coefficient a est bien déterminé à un facteur $\frac{\sigma_q(u)}{u}$, $u \in K^*$ près, donc $v_0(a)$ est bien déterminé, c'est l'unique pente.
2. Pour un module triangularisable, on utilise un dévissage et l'additivité. D'après Jordan-Holder, ce que l'on obtient ainsi est bien défini.
3. Dans le cas général, on ramifie pour triangulariser puis, à la fin, on divise les pentes par le degré de ramification (le résultat ne dépend pas du niveau de ramification choisi).

L'axiome (ii) du théorème découle alors de l'additivité de $N(P)$. On notera $S(M)$ le support de r_M.

Corollary 1.1.2.6 *(i) Pour la même suite exacte que ci-dessus,* $S(M) = S(M') \cup S(M'')$.
(ii) Soit N *un quotient de* M*, par exemple, l'image* $f(M)$ *de* M *par un morphisme. Alors* $S(N) \subset S(M)$.
(iii) Soient M' *et* M'' *des sous-modules de* M*. Alors* $S(M')\ ,\ S(M'') \subset S(M)$ *et* $S(M' + M'') = S(M') \cup S(M'')$*. Si de plus* $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$*, leur somme est directe.*
(iv) Si $S(M) \cap S(N) = \emptyset$*, tout morphisme de* M *dans* N *est nul.*

Modules purs, modules fuchsiens

Disons que M est *pur* (resp. *fuchsien*) si $S(M)$ n'a qu'un élément (resp. $S(M) = \{0\}$). Il découle de ce qui précède les faits suivants:

Proposition 1.1.2.7 *(i) Tout sous-module, tout module quotient, toute image par un morphisme d'un module pur de pente* μ *sont soit triviaux, soit des modules purs de pente* μ.
(ii) Les sous-modules purs de pente μ *donnée forment une sous-catégorie abélienne stable par extension.*
(iii) Il n'y a pas de morphisme non trivial entre modules purs de pentes différentes.
(iv) Si $\mu \in S(M)$*, la somme* N *des sous-modules purs de pente* μ *de* M *est soit nulle, soit le plus grand sous-module pur de pente* μ *de* M*. Les sous-modules ainsi associés aux différentes pentes* $\mu \in S(M)$ *sont en somme directe.*

1.1.3 Filtration canonique, gradué associé

La filtration canonique

Lemma 1.1.3.1 *Soit μ une pente de M.*
(i) Il existe un unique sous-module $M^{[\mu]}$ de M pur de pente μ et maximal pour cette propriété. Il est maximum. Son rang est inférieur ou égal à $r_M(\mu)$.
(ii) On suppose la pente μ quelconque dans le cas formel (!), égale à $\max S(M)$ dans le cas convergent. Alors le rang de $M^{[\mu]}$ est égal à $r_M(\mu)$.

Le premier point découle des généralités. Le deuxième point découle de la factorisation si les pentes sont entières, d'une ramification et d'un argument de descente galoisienne en général.

Theorem 1.1.3.2 *(i) Tout module M admet une unique filtration décroissante $(F^{\geq\mu}(M))_{\mu\in\mathbf{Q}}$ telle que les sauts aient lieu aux $\mu \in S(M)$ et que chaque quotient correspondant:*

$$gr^{\mu}(M) = \frac{F^{\geq\mu}(M)}{F^{>\mu}(M)}$$

soit pur de pente μ.
(ii) Tout morphisme $f : M \to N$ est strict, autrement dit, $f(F^{\geq\mu}(M)) = F^{\geq\mu}(N) \cap f(M)$ (les filtrations induite et coinduite sur $f(M)$ coincident).

Corollary 1.1.3.3 *Les $F^{\geq\mu}$ sont des foncteurs.*

Le gradué associé

On pose $gr(M) = \bigoplus_{\mu\in\mathbf{Q}} gr^{\mu}(M)$.

Theorem 1.1.3.4 *(i) On définit ainsi le foncteur gradué associé. Il est exact et $\mathbf{C}$-linéaire.*
(ii) Il est isomorphe à l'identité dans le cas formel.

L'exactitude vient (classiquement) de ce que les morphismes sont stricts.

1.1.4 Constructions tensorielles

Produit tensoriel

Proposition 1.1.4.1 *(i) Soient (M, Φ) et (N, Ψ) deux modules aux q-différences. Alors l'unique automorphisme de $M \otimes_K N$ tel que $x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)$ est σ_q-linéaire et en fait un module aux q-différences.*
(ii) Le bifoncteur $- \otimes -$ de $DiffMod(K, \sigma_q)$ est exact et $\mathbf{C}$-linéaire.

Proposition 1.1.4.2 *Le polygone de Newton est multiplicatif vis à vis du produit tensoriel. Précisément:*

$$r_{M_1 \otimes M_2}(\mu) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} r_{M_1}(\mu_1) r_{M_2}(\mu_2).$$

Ca se prouve d'abord au rang 1, car $M_{\sigma-a} \otimes M_{\sigma-b} = M_{\sigma-ab}$, puis par dévissage grace à l'exactitude. Il y a une formulation agréable avec la série génératrice $R_M(T) = \sum r_M(\mu) T^{\mu}$:

Corollary 1.1.4.3 $R_{M_1\otimes M_2}(T) = R_{M_1}(T) R_{M_2}(T)$.

Notons $M = M_1 \otimes M_2$ et, pour $\mu \in S(M)$:

$$G^{\geq\mu}(M) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} F^{\geq\mu_1}(M_1) \otimes F^{\geq\mu_2}(M_2).$$

Lemma 1.1.4.4 *Cette définition s'étend pour donner une filtration décroissante de M, qui est la filtration canonique.*

Cela vient de l'unicité d'icelle avec les axiomes susdits. On en déduit le:

Theorem 1.1.4.5 *Le foncteur "gradué associé" est $\otimes$-compatible et fidèle.*

La fidélité découle de la $\otimes$-compatibilité par tannakiennerie générale (voir *infra*).

Il y a une unité, le module (K, σ_q) (qui modélise l'équation $\sigma_q(f) = f$). On le note $\underline{1}$.

Hom interne et dual

Proposition 1.1.4.6 *(i) Soient (M, Φ) et (N, Ψ) deux modules aux q-différences. Alors l'automorphisme $f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ de $\mathcal{L}_K(M, N)$ est σ_q-linéaire et en fait un module aux q-différences, noté $\underline{Hom}$, le "Hom interne".*
(ii) Le bifoncteur $\underline{Hom}$ de $DiffMod(K, \sigma_q)$ est exact et $\mathbf{C}$-linéaire.
(iii) Il est adjoint du produit tensoriel:

$$Hom(M \otimes N, P) = Hom(M, \underline{Hom}(N, P)).$$

Corollary 1.1.4.7 *Le dual $\underline{Hom}((M, \Phi), \underline{1})$ est le dual $M^\vee$ du K-espace vectoriel M muni de $\Phi^\vee$, la contragrédiente de Φ. Le foncteur "passage au dual" est exact et $\otimes$-compatible. On a l'isomorphisme:*

$$\underline{Hom}(M, N) = M^\vee \otimes N.$$

Proposition 1.1.4.8 *Le polygone de Newton de $M^\vee$ est le symétrique de celui de M: $r_{M^\vee}(\mu) = r_M(-\mu)$.*

Remark 1.1.4.9 *On peut maintenant comprendre le lien entre les deux modèles de l'équation 1.1: M_P et ${}_PM$ sont duaux l'un de l'autre.*

Solutions

En posant $\Gamma(M) = Hom(\underline{1}, M)$, on définit un foncteur covariant $\mathbf{C}$-linéaire et exact à gauche. De même, le foncteur $\Gamma^\vee$ défini, par $\Gamma^\vee(M) = Hom(M, \underline{1})$ est contravariant, $\mathbf{C}$-linéaire et exact à gauche. On a d'ailleurs $\Gamma^\vee(M) = \Gamma(M^\vee)$.

On vérifie que $\Gamma({}_PM) = \Gamma^\vee(M_P)$ s'identifie à l'espace vectoriel des solutions de 1.1 dans K. Les foncteurs Γ et $\Gamma^\vee$ sont appelés respectivement "foncteur des cosolutions" et "foncteur des solutions" (dans K). Il est suggestif d'appeler aussi Γ le "foncteur des sections globales" (voir le deuxième exposé).

Pour une extension L, on peut de même introduire les foncteurs "(co)solutions dans L", définis par composition avec le changement de base: $\Gamma_L(M) = \Gamma(M \otimes_K L)$ et $\Gamma_L^\vee(M) = \Gamma^\vee(M \otimes_K L)$.

Lemma 1.1.4.10 *Soit C_L le corps des constantes de L. Alors $\Gamma_L(M)$ et $\Gamma_L^\vee(M)$ sont des C_L-espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale au rang de M.*

Cela découle du lemme du "q-wronskien".

Disons maintenant que L est un "corps de solutions" si, quelque soit le module aux q-différences M, la dimension de $\Gamma_L(M)$ est *égale* au rang de M.

Proposition 1.1.4.11 *Si L est un corps de solutions, Γ_L est un foncteur fibre sur C_L.*

C'est en particulier vrai, dans le cas convergent, si l'on prend $L = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$. On a alors un foncteur fibre sur $C_L = \mathcal{M}(\mathbf{E})$, où $\mathbf{E}$ est la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Dans le cas formel, il faudrait plutôt prendre pour L une algèbre définie à l'aide de “solutions symboliques”, *voir* [2].

Corollary 1.1.4.12 *La catégorie* $DiffMod(K, \sigma_q)$ *est tannakienne sur* $\mathbf{C}_L$.

Elle est même tannakienne neutre, mais c'est plus compliqué à démontrer (on peut le faire avec la théorie fuchsienne et le foncteur gr).

1.2 Aspects algébriques de la classification (deuxième exposé)

A partir de maintenant, on donne des définitions et des preuves complètes (pour autant qu'on y arrive).

1.2.1 Algèbre homologique

La principale référence est [1], mais une bonne partie des constructions, preuves et calculs peut se faire de manière directe, comme dans [4]. Puisque $DiffMod(K, \sigma_q)$ est une sous-catégorie de la catégorie des modules à gauche sur l'anneau $\mathcal{D}_q$, on peut lui appliquer l'essentiel des résultats de [1], §5 à 8 (les notations qui nous concernent se trouvent au début du §4 de *loc. cit.*). En particulier, le centre de $\mathcal{D}_q$ étant $C_K = \mathbf{C}$, on pourra prendre $A = \mathcal{D}_q$ et $k = \mathbf{C}$. Les $Ext^i(M, N)$ sont donc munis d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel et les suites exactes de cohomologie sont des suites exactes de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. On notera $\omega(M)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel sous-jacent au module M.

Les $\Gamma^i(M)$ et les $Ext^i(M, N)$

Definition 1.2.1.1 *Les foncteurs Γ^i sont définis sur $DiffMod(K, \sigma_q)$ par:*

$$\Gamma^i(M) = Ext^i(\underline{1}, M).$$

Ce sont donc les foncteurs dérivés droits du foncteur (exact à gauche) $\Gamma = \Gamma^0 = Hom(\underline{1}, -)$.

Proposition 1.2.1.2 *On a un isomorphisme naturel:*

$$Ext^i(M, N) = \Gamma^i(M^\vee \otimes N).$$

En effet, le foncteur covariant exact à gauche $N \rightsquigarrow Hom(M, N) \simeq M^\vee \otimes N$ est composé du foncteur covariant exact à gauche Γ et du foncteur covariant exact $M^\vee \otimes -$. $\square$

Proposition 1.2.1.3 *(i) $Ext^i(M, N)$ est nul pour $i \geq 2$.*
(ii) On a la suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:

$$0 \to Hom(M, N) \to Hom(\mathcal{D}_q, N) \to Hom(\mathcal{D}_q, N) \to Ext^1(M, N) \to 0.$$

La proposition est valable pour des $\mathcal{D}_q$-modules à gauche M, N quelconques d'après [1],§8.5 (exemple). Pour un module aux q-différences $M = M_P$, elle se se déduit facilement (comme dans [4], II.1.3) de la longue suite exacte de cohomologie du foncteur $Hom(-, N)$ associée à la suite exacte 1.2. Comme il pleut et que l'on ne peut rien faire au jardin, je détaille. La longue suite exacte est celle-ci:

$$\begin{gathered} 0 \to Hom(M, N) \to Hom(\mathcal{D}_q, N) \to Hom(\mathcal{D}_q, N) \\ \to Ext^1(M, N) \to Ext^1(\mathcal{D}_q, N) \to Ext^1(\mathcal{D}_q, N) \\ \to Ext^2(M, N) \to Ext^2(\mathcal{D}_q, N) \to Ext^2(\mathcal{D}_q, N) \to \cdots \end{gathered}$$

Mais, $\mathcal{D}_q$ étant libre, $Ext^i(\mathcal{D}_q, N)$ est nul pour $i \geq 1$, d'où la proposition. $\square$

Le complexe des solutions de M dans N

On va maintenant expliciter la suite exacte ci-dessus.

Lemma 1.2.1.4 *Soit $M = M_P$ et notons N le module aux q-différences (N, Ψ). La longue suite exacte de cohomologie du foncteur $Hom(-, N)$ appliquée à la suite exacte 1.2 est isomorphe à la suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:*

$$0 \to Hom(M, N) \to \omega(N) \xrightarrow{P(\Psi)} \omega(N) \to Ext^1(M, N) \to 0. \tag{1.3}$$

Comme déjà dit, on a la suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:

$$0 \to Hom(M,N) \to Hom(\mathcal{D}_q,N) \to Hom(\mathcal{D}_q,N) \to Ext^1(M,N) \to 0.$$

Pour expliciter la flèche centrale, notons temporairement d_P la multiplication à droite par P dans $\mathcal{D}_q$ (précédemment notée $\times P$ dans 1.2). C'est un morphisme de $\mathcal{D}_q$-modules à gauche (elle est $\mathcal{D}_q$-linéaire à gauche). L'identification de $\omega(N)$ avec $Hom(\mathcal{D}_q,N)$ se fait en associant à $x \in \omega(N)$ l'unique morphisme $\mathcal{D}_q$-linéaire à gauche $\phi_x : \mathcal{D}_q \to N$ qui, à un opérateur aux q-différences $Q \in \mathcal{D}_q$, associe $Q.x = Q(\Psi)(x)$. Le morphisme $d_P : \mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q$ induit le morphisme $\phi \mapsto \phi \circ d_P$ de $Hom(\mathcal{D}_q,N)$ dans $Hom(\mathcal{D}_q,N)$, et l'image de ϕ_x est $\phi_x \circ d_P$ qui, à $Q \in \mathcal{D}_q$, associe:

$$\begin{aligned} \phi_x(QP) &= (QP)(\Psi)(x) \\ &= Q(\Psi)(y), \end{aligned}$$

où $y = P(\Psi)(x)$; c'est donc ϕ_y. Ainsi, modulo l'identification de $\omega(N)$ avec $Hom(\mathcal{D}_q,N)$, le morphisme $\omega(N) \to \omega(N)$ dans la suite exacte est bien $P(\Psi)$. □

Definition 1.2.1.5 *Si $(M,\Phi) = M_P$, le complexe des solutions de (M,Φ) dans (N,Ψ) est le complexe de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:*

$$\omega(N) \xrightarrow{P(\Psi)} \omega(N).$$

Les degrés indiqués sont les degrés 0 et 1. Bien sur, P n'est pas déterminé par M mais, d'après [1], §6.1, la classe d'homotopie du complexe l'est.

Corollary 1.2.1.6 *Sa cohomologie en degré i est $Ext^i(M,N)$.*

C'est une conséquence immédiate du lemme. □

Trois interprétations des modules d'extensions

On va maintenant instancier diversement la suite exacte 1.3, dont on conserve les notations.

Proposition 1.2.1.7 *(i) On a une suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:*

$$0 \to \Gamma(M^\vee) \to K \xrightarrow{P(\sigma_q)} K \to \Gamma^1(M^\vee) \to 0. \tag{1.4}$$

(ii) On a une suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:

$$0 \to \Gamma(N) \to \omega(N) \xrightarrow{\Psi - Id} \omega(N) \to \Gamma^1(N) \to 0.$$

(iii) On a une suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:

$$0 \to Hom(M,N) \to \mathcal{L}_K(M,N) \xrightarrow{T_{\Phi,\Psi}} \mathcal{L}_K(M,N) \to Ext^1(M,N) \to 0, \tag{1.5}$$

où $T_{\Phi,\Psi}$ désigne l'application $f \mapsto \Psi \circ f - f \circ \Phi$.

On obtient (i) (resp. (ii)) en prenant $N = \underline{1}$ (resp. $M = \underline{1} = M_{\sigma-1}$).

Pour prouver (iii), on remplace M par $\underline{1}$ et N par $\underline{Hom}(M,N) = M^\vee \otimes N$; puis on compose à droite le $\mathbf{C}$-endomorphisme du milieu, $\Phi^\vee \otimes \Psi - Id : f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} - f$ par l'automorphisme ${}^t\Phi : f \mapsto f \circ \Phi$. Cette opération ne change pas le noyau, mais elle modifie la surjection vers le conoyau. □

Corollary 1.2.1.8 *On a une suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:*

$$0 \to \Gamma(K^n, \Phi_A) \to K^n \xrightarrow{\sigma_q - A} K^n \to \Gamma^1(K^n, \Phi_A) \to 0.$$

C'est une traduction matricielle de (ii), quitte à remarquer que $\Phi_A - Id$ et $\sigma_q - A$ sont le composé l'un de l'autre par le de $\mathbf{C}$-automorphisme A. Bien sur, σ_q opère sur K^n composante par composante. □

1.2.2 Indice et caractéristique d'Euler-poincaré

Notre but est de calculer des dimensions d'espaces d'extensions en vue de la classification. Tous les modules sont supposés à pentes entières.

Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un module

Definition 1.2.2.1 *La* caractéristique d'Euler-Poincaré *du module aux q-différences M est donnée par la formule:* $\chi(M) = \gamma^0(M) - \gamma^1(M)$, *où* $\gamma^i(M) = \dim_{\mathbf{C}}(\Gamma^i(M))$.

Nous allons voir que ces quantités sont bien définies pour tout M.

Soit M un module aux q-différences de rang 1: il est donc pur. Soient μ sa pente et c l'exposant attaché. Celui-ci est bien défini modulo $q^{\mathbf{Z}}$, on le supposera pris dans la couronne fondamentale, c'est à dire tel que $1 \leq |c| < |q|$.

Lemma 1.2.2.2 *Les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $\Gamma^0(M)$ et $\Gamma^1(M)$ sont de dimension finie. Leurs dimensions et la caractéristique d'Euler-Poincaré de M sont données par le tableau suivant:*

(μ, c)	$\gamma^0(M)$	$\gamma^1(M)$	$\chi(M)$
$(0, 1)$	1	1	0
$(0, \neq 1)$	0	0	0
$(< 0, -)$	0	0	0
$(> 0, -)$	0	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ \mu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ -\mu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$

On écrit $M = M_{\sigma - a}$, où $a = cz^\mu b$ et $b \in K$, $b(0) = 1$. On utilise la suite exacte 1.4, mais appliquée à $M^\vee = M_{\sigma - u}$, où $u = a^{-1}$; elle devient:

$$0 \to \Gamma(M) \to K \xrightarrow{\sigma - u} K \to \Gamma^1(M) \to 0.$$

On pourrait d'ailleur aussi bien faire appel au corollaire. Les formules sont alors conséquence immédiate de la proposition qui suit, appliquée à $d = c^{-1}$ et $\nu = -\mu$. □

Proposition 1.2.2.3 *Soit $u = dz^\nu v$, $v \in K$, $v(0) = 1$, avec $d \in \mathbf{C}^*$. Notons $\overline{d}$ la classe de d modulo $q^{\mathbf{Z}}$. L'opérateur $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - u : K \to K$ est à indice. Les dimensions de son noyau et de son conoyau et son indice sont donnés par le tableau suivant:*

$(\nu, \overline{d})$	*Noyau*	*Conoyau*	*Indice*
$(0, 1)$	1	1	0
$(0, \neq 1)$	0	0	0
$(> 0, -)$	0	0	0
$(< 0, -)$	0	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ -\nu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ \nu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$

La démonstration est d'un esprit un peu différent (elle fait appel à de l'analyse !!!!!!!!!!!!!!!!!!!), elle est reportée au paragraphe suivant.

Proposition 1.2.2.4 *(i) Pour tout module aux q-différences M, $\Gamma^0(M)$ et $\Gamma^1(M)$ sont de dimension finie (et la caractéristique d'Euler-Poincaré existe donc).*
(ii) La caractéristique d'Euler-Poincaré χ est additive vis à vis des suites exactes.
(iii) Dans le cas formel, elle est toujours nulle. Dans le cas convergent, on a la formule:

$$\chi(M) = -\sum_{\mu > 0} r_M(\mu)\mu.$$

Le module M étant à pentes entières est triangularisable, ce qui va permettre un dévissage. Toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne lieu à la (pas très) longue suite exacte de cohomologie:

$$0 \to \Gamma^0(M') \to \Gamma^0(M) \to \Gamma^0(M'') \to \Gamma^1(M') \to \Gamma^1(M) \to \Gamma^1(M'') \to 0.$$

Si l'assertion (i) est vraie pour M' et M'', on voit donc qu'elle est vraie pour M. Il suffit donc de l'établir pour un module de rang 1, ce qui est le contenu du lemme ci-dessus. D'autre part, dans cette suite exacte, la somme alternée des dimensions est nulle, d'où la conclusion (ii). Enfin, l'additivité, combinée avec le tableau du lemme, donne les formules (iii). □

Corollary 1.2.2.5 *Soit P un module pur de pente $\mu \neq 0$ et de rang r. Alors $\gamma^0(P) = 0$, $\gamma^1(P) = r \max(0, \mu)$.*

La nullité de $\gamma^0(P)$ s'obtient par le même dévissage que la proposition. □

Remarquons que $\chi(M)$ est toujours *négative*. Dans le cas convergent, on trouve une description combinatoire de $\chi(M)$. On écrit $S(M) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$, et $\mu_i = \frac{d_i}{r_i}$, où le numérateur et le dénominateur sont respectivement l'ordonnée et l'abcisse du côté (orienté) correspondant. La formule s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= -\sum_{\mu>0} r_M(\mu)\mu \\ &= -\sum_{\mu_i>0} r_i\mu_i \\ &= -\sum_{d_i>0} d_i. \end{aligned}$$

C'est donc, au signe près, la hauteur de l'extremité droite de $N(M)$ au dessus du point le plus bas. De même, le nombre $\chi(M) + \chi(M^\vee)$ est, au signe près, la variation absolue: un bon candidat pour être appelé "irrégularité".

Noyau et conoyau de $\sigma_q - u$

Nous allons démontrer la proposition 1.2.2.3. On écrit $u = dq^k z^\nu v$, $v \in K$, $v(0) = 1$, avec $k \in \mathbf{Z}$ et $d \in \mathbf{C}^*$ tel que $1 \leq |d| < |q|$.

Lemma 1.2.2.6 *(i) Les dimensions du noyau et du conoyau de $\sigma_q - u$ ne dépendent que de la classe de $u \in K^*$ modulo le sous-groupe $\{\frac{\sigma_q(w)}{w} \ / \ w \in K^*\}$ de K^*.*
(ii) u est équivalent à dz^ν modulo ce sous-groupe.

On conjugue l'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - u$ de K par $w \in K^*$, identifié à l'automorphisme $\times w$. On trouve:

$$w \circ (\sigma_q - u) \circ w^{-1} = \frac{w}{\sigma_q(w)} \circ (\sigma_q - u'), \text{ avec } u' = u\frac{\sigma_q(w)}{w}.$$

Ceci établit (i).

On vérifie que $q^k v = \frac{\sigma_q(w)}{w}$, où $w = z^k \prod_{i\geq 1} \sigma_q^{-i}(v) \in K$ (et que cela marche dans le cas convergent), ce qui prouve (ii). □

On peut donc supposer que $u = dz^\nu$, ce que nous ferons désormais (c'est d'ailleurs une bribe de la mise sous forme canonique des modules purs et on aurait pu se passer de ce lemme).

Lemma 1.2.2.7 *Le noyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1 si $(\nu, d) = (0, 1)$, nul sinon.*

La série $f = \sum f_n z^n$ appartient au noyau si et seulement si $\forall n$, $q^n f_n = d f_{n-\nu}$. S'agissant de séries de Laurent, cela entraine $f = 0$ sauf peut-être si $\nu = 0$. Dans ce dernier cas, cela entraine $f = 0$, sauf peut-être si $d \in q^{\mathbf{Z}}$. Vue la condition sur $|d|$, ceci n'est possible que si $d = 1$, donc $u = 1$. Dans ce cas, le noyau est $\mathbf{C}$. □

Lemma 1.2.2.8 *L'application $\sigma_q - u : K \to K$ est surjective si $\nu > 0$ et si $\nu = 0$, $d \neq 1$.*

Soit $g \in K$. On veut résoudre (en f) $\sigma_q f - dz^\nu f = g$ dans K. Cette équation équivaut à $\forall n$, $q^n f_n - d f_{n-\nu} = g_n$, soit encore $\forall n$, $f_n = q^{-n}(d f_{n-\nu} + g_n)$. Si $\nu \geq 1$, on peut calculer les coefficients f_n par récurrence à partir des ν premiers d'entre eux. De plus, dans le cas convergent, la forme des dénominateurs montre que la série f obtenue converge si g converge, et l'équation fonctionnelle garantit la méromorphie s'il y a lieu. Si $\nu = 0$ et $d \neq 1$ (donc en fait $d \notin q^{\mathbf{Z}}$), on obtient directement $f_n = \frac{g_n}{q^n - d}$. La convergence (resp. la méromorphie) est encore immédiate le cas échéant.

Variante lorsque $\nu \geq 1$: On doit résoudre l'équation au point fixe $F(f) = f$, où $F(f) := \sigma_q^{-1}(g + dz^\nu f)$. Il est facile de voir que cet opérateur est contractant à la fois pour la topologie z-adique et pour la topologie transcendante. □

Lemma 1.2.2.9 *Si $(\nu, d) = (0, 1)$, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1.*

Il est facile de voir que $\sigma_q - u$ annule $\mathbf{C}$ et induit un automorphisme du sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel $K^\bullet$ de K formé des séries sans terme constant (c'est détaillé dans [7], 1.3.1). □

Lemma 1.2.2.10 *On suppose $\nu < 0$. Alors $\sigma_q - u : K \to K$ est surjectif dans le cas formel.*

On pose $F'(f) = d^{-1} z^{-\nu}(\sigma_q(f) - g)$. Comme $\nu > 0$, cet opérateur est z-adiquement contractant, d'où l'existence et l'unicité d'un point fixe dans le cas formel. □

Remark 1.2.2.11 *C'est le premier endroit où le cas formel et le cas convergent diffèrent. L'opérateur F' est (fortement)* dilatant *pour la topologie transcendante, il produit des Stokes. C'est donc ici qu'un argument analytique va être nécessaire dans le cas convergent.*

Lemma 1.2.2.12 *On suppose $\nu = -1$. Alors, dans le cas convergent, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1.*

Remarquons d'abord que l'automorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $f(z) \mapsto f(dz)$ de K conjugue $\sigma_q - dz^{-1}$ à $\sigma_q - z^{-1}$. On peut donc supposer $d = 1$ et $u = z^{-1}$, ce que nous ferons. Par ailleurs, l'endomorphisme $\sigma_q - z^{-1}$ a le même conoyau que $1 - z\sigma_q$ et nous considèrerons plutôt ce dernier. On prendra $K = \mathbf{C}(\{z\})$, l'autre cas s'en déduisant comme d'habitude.

On considère la *transformation de q-Borel-Ramis* (terminologie en voie de stabilisation) définie par:

$$\mathcal{B}_{q,1} : \sum f_n z^n \mapsto \sum \frac{f_n}{q^{n(n-1)/2}} z^n,$$

qui envoie $\mathbf{C}(\{z\})$ sur l'espace $\mathbf{C}(\{z\})_1$ des séries q-Gevrey de niveau 1 (*voir* [3]), c'est à dire les $\sum \phi_n z^n$ telles qu'il existe $A > 0$ tel que $\phi_n = O(A^n q^{-n(n-1)/2})$ lorsque $n \to \infty$. L'interêt est que la transformation $\mathcal{B}_{q,1}$ conjugue $1 - z\sigma_q$ à la multiplication par $1 - z$, d'où le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}(\{z\}) & \xrightarrow{1 - z\sigma_q} & \mathbf{C}(\{z\}) \\
{\scriptstyle \mathcal{B}_{q,1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{B}_{q,1}} \\
\mathbf{C}(\{z\})_1 & \xrightarrow{\times(1-z)} & \mathbf{C}(\{z\})_1
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes.

D'autre part, l'image de la flèche du bas est exactement formée des séries telles que $\phi(1) = 0$. En effet, l'une des inclusions est évidente. Pour prouver l'autre, on prend $\phi \in \mathbf{C}(\{z\})_1$ tel que $\phi(1) = 0$. On pose $\gamma_n = \sum_{k \leq n} \phi_k$, de sorte que $\gamma(z) = \sum \gamma_n z^n \in \mathbf{C}(\{z\})$ est égal à $\frac{1}{1-z}\phi(z)$ et il reste à vérifier la condition q-Gevrey sur γ. Mais la condition $\phi(1) = 0$ entraine $\gamma_n = -\sum_{k>n} \phi_k$. Soient $C, A > 0$ tels que $\forall n \ , \ |\phi_n| \leq CA^n |q^{-n(n-1)/2}|$. Alors, pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \sum_{k>n} |\phi_k| \\ &\leq CA^n |q|^{-n(n-1)/2} \sum_{l>0} A^l |q|^{-l(2n+l-1)/2} \\ &\leq C'A^n |q|^{-n(n-1)/2}, \text{ où } C' = C \sum_{l>0} A^l |q|^{-l(l-1)/2} < \infty, \end{aligned}$$

d'où l'estimation q-Gevrey voulue. L'image de la flèche du bas est donc supplémentaire de $\mathbf{C}$ et le conoyau a bien pour dimension 1. □

Lemma 1.2.2.13 *On suppose $\nu = -r, r \in \mathbf{N}^*$. Alors, dans le cas convergent, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension r.*

On peut évidemment supposer $r \geq 2$. Notons provisoirement K' le sous-corps de K formé des fonctions de z^r, d'où une décomposition:

$$K = K' \oplus zK' \oplus \cdots \oplus z^{r-1}K',$$

dans laquelle chaque sous-espace $z^i K'$ est stable par $\sigma_q - u$. De plus, on a un isomorphisme $f(z) \mapsto z^i f(z^r)$ de K avec $z^i K'$, qui conjugue $q^i \sigma_{q^r} - dz^{-1}$ à $\sigma_q - u$. On applique alors le lemme précédent. □

Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un couple de modules

Lemma 1.2.2.14 *Soient M et N deux modules aux q-différences. Alors $Ext^0(M,N)$ et $Ext^1(M,N)$ sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Ces dimensions valent respectivement $\gamma^0(M^\vee \otimes N)$ et $\gamma^0(M^\vee \otimes N)$.*

Cela découle immédiatement de l'égalité $Ext^i(M,N) = \Gamma^i(M^\vee \otimes N)$. □

Definition 1.2.2.15 *La caractéristique d'Euler-Poincaré du couple (M,N) est*

$$\chi(M,N) = \gamma^0(M,N) - \gamma^1(M,N), \ \textit{où} \ \gamma^i(M,N) = \dim_{\mathbf{C}}(Ext^i(M,N)).$$

Proposition 1.2.2.16 *(i) On a $\chi(M,N) = \chi(M^\vee \otimes N)$.*
(ii) La caractéristique d'Euler-Poincaré χ est additive en chaque argument.

C'est une conséquence immédiate du lemme. □

Nous pouvons traduire numériquement les différentes interprétations de la proposition 1.2.1.7, dont nous reprenons les notations:

Proposition 1.2.2.17 *(i) $\chi(M,N)$ est l'indice de $P(\Psi) : \omega(N) \to \omega(N)$.*
(ii) $\chi(M^\vee)$ est l'indice de $P(\sigma_q) : K \to K$.
(iii) $\chi(N)$ est l'indice de $\Psi - Id : \omega(N) \to \omega(N)$.
(iv) $\chi(K^n, \Phi_A)$ est l'indice de $\sigma_q - A : K^n \to K^n$.
(v) $\chi(M,N)$ est l'indice de $T_{\Phi,\Psi} : \mathcal{L}_K(M,N) \to \mathcal{L}_K(M,N)$.

□

1.2.3 Classification

Classes isoformelles

D'après 1.1 (premier exposé), la classification analytique à l'intérieur d'une classe formelle revient à la classification des modules dont le gradué associé est fixé. Ceci motive ce qui suit.

Definition 1.2.3.1 *Soient $P_1, \dots, P_k$ des modules purs de pentes $\mu_1 > \dots > \mu_k$. On pose:*

$$\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k) = \{\textit{classes d'isomorphies de couples } (M, g)\},$$

où les couples (M, g) sont formés d'un module M et d'un isomorphisme $g : gr(M) \to P_1 \oplus \dots \oplus P_k$ et (M, g) est isomorphe à (M', g') s'il existe un isomorphisme de modules $u : M \to M'$ tel que $g = g' \circ gr(u)$.

Notre but est de décrire cet ensemble (et même, en fin de compte, cette variété). Remarquons que tous les modules d'une même classe formelle ont même polygone de Newton. On désignera celui-ci par $N(P_1, \dots, P_k)$.

Par ailleurs, on peut identifier chaque P_i à un module (K^{r_i}, Φ_{A_i}), où $A_i \in z^{-\mu_i} GL_{r_i}(\mathbf{C})$. Notant $n = \sum r_i$, on peut alors identifier un couple (M, g) à un module (K^n, Φ_A), la matrice A étant triangulaire supérieure par blocs, avec pour blocs diagonaux les A_i. Nous noterons en général, pour $1 \le i < j \le k$, $U_{i,j} \in M_{r_i, r_j}(K)$ les autres blocs, ce qui donne l'écriture:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & U_{1,i} & \dots & U_{1,j} & \dots & U_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_i & \dots & U_{i,j} & \dots & U_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & A_j & \dots & U_{j,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Classification à deux pentes

On se donne P, P' purs de pentes $\mu > \mu'$ et de rangs r, r'. On va décrire précisément $\mathcal{F}(P, P')$. Les résultats sont ici plus complets et serviront en outre à dévisser le cas général.

Lemma 1.2.3.2 *(i) On a une bijection:*

$$\mathcal{F}(P, P') \xrightarrow{\sim} Ext^1(P', P).$$

(ii) Cet espace est de dimension $(\mu - \mu')rr'$.

Un module filtré de gradué $P \oplus P'$ est un module M muni d'une injection $i : P \to M$ et d'un isomorphisme $M/i(P) \to P'$. Cela revient à la donnée d'une extension de P' par P. La relation d'équivalence entre de tels objets correspond à l'isomorphie entre extensions. D'après [1], §7.5, on obtient la bijection indiquée en (i).

On a $\dim_{\mathbf{C}} Ext^1(P', P) = \gamma^1(P'^{\vee} \otimes P)$. Le module $P'^{\vee} \otimes P$ est pur de pente $\mu - \mu' > 0$ et de rang rr'. La formule (ii) découle alors de 1.2.2.5. $\square$

Avec les notations $\mu = \frac{d}{r}$, $\mu' = \frac{d'}{r'}$, cette dimension vaut $dr' - d'r$, aire du triangle bordé par $N(P, P')$! Mais on verra bien plus pire.

Description matricielle des classes d'extensions

On identifie P à (K^r, Φ_A), où $A_0 = z^\mu A \in GL_r(\mathbf{C})$ (notations analogues pour P', A', A'_0) [1]. Soit $U \in M_{r,r'}(K)$ et soit M_U le module (K^n, B), où $n = r + r'$ et où B est la matrice triangulaire supérieure par blocs $B = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. Le module M_U est naturellement muni d'une inclusion $i : P \to M_U$ et d'un isomorphisme : $M_U / i(P) \to P'$, donc définit une classe $\overline{M_U}$ dans $\mathcal{F}(P, P')$.

Proposition 1.2.3.3 *(i) On a une application surjective:*

$$\begin{cases} M_{r,r'}(K) \to Ext^1(P', P) \\ U \to \overline{M_U} \end{cases}$$

(ii) $U, V \in M_{r,r'}(K)$ ont même image si et seulement si:

$$\exists X \in M_{r,r'}(K) \ : \ V - U = (\sigma_q X)\, A' - AX.$$

(iii) On obtient ainsi une bijection entre le conoyau de l'application $\mathbf{C}$-linéaire $T_{A,A'}$ définie par:

$$\begin{cases} M_{r,r'}(K) \to M_{r,r'}(K) \\ X \mapsto (\sigma_q X)\, A' - AX \end{cases}$$

et l'espace vectoriel $Ext^1(P', P)$.

La première assertion ne fait que traduire les considérations précédentes, compte tenu de l'identification de $\mathcal{F}(P, P')$ avec $Ext^1(P', P)$. La troisième assertion découle alors immédiatement de la seconde, que nous allons prouver.

L'équivalence entre les couples (M, g) définis comme ci-dessus à partir des modules M_U et M_V équivaut à l'existence d'un morphisme $M_U \to M_V$ qui respecte l'injection de P et la surjection sur P'. Un tel morphisme est défini par une matrice:

$$F = \begin{pmatrix} I_r & X \\ 0 & I_{r'} \end{pmatrix}, \quad X \in M_{r,r'}(K),$$

telle que:

$$(\sigma_q F) \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & A' \end{pmatrix} F.$$

Cette condition revient à l'égalité indiquée. □

Remark 1.2.3.4 *Il n'est nullement évident* a priori *que la bijection ci-dessus soit $\mathbf{C}$-linéaire !*

Avant d'énoncer et de prouver le théorème correspondant, donnons une description plus intrinsèque de l'application $M_{r,r'}(K) \to Ext^1(P', P)$ en cause. On se donne, plus généralement, deux modules (M, Φ_M) et (N, Φ_N) de rangs r et s (et l'on abrègera, comme d'habitude, leurs noms en M et N). Toute extension:

$$0 \to (N, \Phi_N) \to (X, \Phi_X) \to (M, \Phi_M) \to 0$$

est scindée en tant que suite de K-espaces vectoriels, autrement dit, on peut identifier X à $N \times M$ et Φ_X à un automorphisme σ_q-linéaire de $N \times M$ compatible avec la suite exacte. Cela signifie que Φ_X s'écrit: $\Phi_X(n, m) = (\Phi_N(n) + x(m), \Phi_M(m))$, où $x : M \to N$ est une application σ_q-linéaire (et Φ_X est alors automatiquement inversible). Notons X_x le module ainsi obtenu; c'est canoniquement une extension de (M, Φ_M) par (N, Φ_N). Notons aussi $\mathcal{L}_\sigma(M, N)$ le K-espace vectoriel des applications σ_q-linéaires de M

[1] En fait, la description qui suit vaut pour des modules P et P' quelconques (pas nécessairement purs).

dans N. Modulo un choix de bases, il est isomorphe à $M_{s,r}(K)$. En associant à x la classe de l'extension X_x, on obtient une application surjective:

$$\mathcal{L}_\sigma(M,N) \to Ext^1(M,N).$$

Un isomorphisme d'extensions $X_x \tilde{\to} X_y$ est de la forme $\xi : (n,m) \mapsto (n+u(m), m)$, où $u \in \mathcal{L}_K(M,N)$ doit vérifier $\Phi_{X_y} \circ \xi = \xi \circ \Phi_{X_x}$, c'est à dire, pour tout $(n,m) \in N \times M$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_y} \circ \xi(n,m) &= \Phi_{X_y}(n+u(m), m) \\
&= (\Phi_N(n+u(m)) + y(m), \Phi_M(m)) \\
&= \\
\xi \circ \Phi_{X_x}(n,m) &= \xi(\Phi_N(n) + x(m), \Phi_M(m)) \\
&= (\Phi_N(n) + x(m) + u(\Phi_M(m)), \Phi_M(m)),
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $x - y = \Phi_N \circ u - u \circ \Phi_M$.

On a donc retrouvé, sous une forme plus intrinsèque la proposition 1.2.3.3. Notons provisoirement T l'application qui, à $x \in \mathcal{L}_\sigma(M,N)$, associe la classe dans $Ext^1(M,N)$ de l'extension X_x. Il reste à voir que l'application T est linéaire. On peut le faire en l'identifiant à l'application définie au (iii) de 1.2.1.7; ceci utilise [1] §6.3, mais c'est pénible (bien que plus informatif). On va donc plutôt passer par la description explicite de la structure de module sur l'ensemble des classes d'extensions. On utilise les deux faits suivants:

1. Soit
$$0 \to N \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} M \to 0$$
une suite exacte ayant pour image $\theta \in Ext^1(N,M)$. Alors, si $\lambda \neq 0$, la suite exacte
$$0 \to N \xrightarrow{\lambda^{-1} i} X \xrightarrow{p} M \to 0$$
a pour image $\lambda\theta$ ([1], §7, cor.2 de la prop. 3, p. 120).

2. Soient
$$0 \to N \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} M \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to N \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{p'} M \to 0$$
deux suites exactes ayant pour images θ et θ'. Alors $\theta + \theta'$ est l'image de la suite exacte
$$0 \to N \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{q} M \to 0$$
obtenue en prenant
$$\begin{aligned}
Y &= \frac{\{(u,u') \in X \times X' \ / \ p(u) = p'(u')\}}{\{(-i(n), i'(n)) \ / \ n \in N\}} \\
j &: n \mapsto \text{classe de}(i(n), 0) = \text{classe de } (0, i'(n)) \\
q &: \text{classe de } (u,u') \mapsto p(u) = p'(u')
\end{aligned}$$
("somme de Baer de deux extensions", [1], §7.6, rq 2, p. 124; ou, plus explicite: Cartan-Eilenberg XIV.1, p. 290).

Pour appliquer le premier fait, on part des deux suites exactes

$$0 \to N \xrightarrow{i} X_x \xrightarrow{p} M \to 0$$

$$0 \to N \xrightarrow{\lambda i} X_{x'} \xrightarrow{p} M \to 0,$$

où l'on a posé $x' = \lambda x$. Le morphisme $(n,m) \mapsto (\lambda n, m)$ de X_x dans $X_{x'}$ fournit un isomorphisme d'extensions (la vérification des commutations et des compatibilités avec les automorphismes σ-linéaires structuraux est facile). On voit donc que $\lambda^{-1}T(x') = T(x)$, c'est à dire $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Ceci a été prouvé pour $\lambda \neq 0$, mais le cas $\lambda = 0$ est immédiat.

Pour appliquer le deuxième fait, avec les notations évidentes, on voit que le numérateur de Y est isomorphe à $N \times N \times M$ muni de l'automorphisme σ-linéaire structural $(n,n',m) \mapsto (\Phi_N(n) + x(m), \Phi_N(n') + x'(m), \Phi_M(m))$. L'application $(n,n',m) \mapsto (n+n',m)$ identifie le quotient Y de ce module par le dénominateur $\{(-n,n,0) \;/\; n \in N\}$ à $N \times M$ muni de l'automorphisme σ-linéaire structural $(n,m) \mapsto (\Phi_N(n) + x(m) + x'(m), \Phi_M(m))$, autrement dit, à $X_{x+x'}$, ce qui entraine $T(x+x') = T(x) + T(x')$.

On a donc prouvé le

Theorem 1.2.3.5 *La bijection définie au (iii) de la proposition 1.2.3.3 est un isomorphisme.*

$\square$

Deux paramétrisations de $\mathcal{F}(P,P')$

On suppose maintenant les pentes entières et l'on reprend les notations précédentes; on note de plus $k = -\mu$ et $k' = -\mu'$, de sorte que et $d = k' - k$ est un entier strictement positif. Pour tout sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de K, on note $M_{r,r'}(E)$ le sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel de $M_{r,r'}(K)$ formé des matrices dont tous les coefficients sont dans K.

Lemma 1.2.3.6 *Soit D une partie de $\mathbf{Z}$ formée d'entiers deux à deux non congrus modulo d. Soit E_A le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de K formé des polynômes de Laurent à degrés dans D. Alors $M_{r,r'}(E_D)$ est en somme directe avec l'image de $T_{A,A'}$ (cf. 1.2.3.3, (iii)).*

Quitte à élargir D, on peut supposer que c'est un système complet de représentants modulo d. Un élément de l'intersection s'obtient en résolvant l'équation:

$$(\sigma_q X)\, A' - AX = \sum_{i \in D} U_i z^i,$$

avec X convergent et les $U_i \in M_{r,r'}(\mathbf{C})$. La démonstration suit alors le même chemin que celle de 1.2.2.3. L'équation ci-dessus équivaut à

$$z^d\, (\sigma_q X)\, A'_0 - A_0 X = \sum_{i \in D} U_i z^{i-k}.$$

On décompose X en somme de d termes:

$$X = \sum_{i \in D} X_i(z^d) z^{i-k}$$

(car les $i-k$ forment aussi un système complet de représentants modulo d). On a donc, pout tout $i \in A$, l'équation suivante:

$$z^d X_i(q^d z^d)(q^{i-k} A'_0) - A_0 X_i(z^d) = U_i.$$

On pose $q' = q^d, z' = z^d$ et l'on se retrouve avec une équation du type:

$$z' X'(q'z') B' - C' X'(z') = U',$$

où $B' = q^{i-k} A'_0$ et $C' = A_0$ sont constantes inversibles, $U' = U_i$ est constante et $X'(z') = X_i(z^d)$ converge. D'après la preuve de 1.2.2.3, les équations obtenues pour chacun des rr' coefficients n'ont de solution que si le second membre est nul. □

Remarquons maintenant que la preuve du théorème 1.2.3.5 dit en particulier que l'application définie au (i) de la proposition 1.2.3.3 est linéaire. Ce qui suit en découle.

Theorem 1.2.3.7 *Cette application induit un isomorphisme de* $M_{r,r'}(\mathbf{C}[z]_{d-1})$ *avec* $\mathcal{F}(P,P')$.

□

Pour décrire la "paramétrisation elliptique", nous supposerons, pour simplifier que $d = 1$ ("deux pentes, niveau 1"). Nous anticipons sur le chapitre 3; il y sera entre autres prouvé les faits suivants:

1. Soit $\hat{X}_{A,A'}(U)$ l'unique solution série formelle de l'équation:
$$(\sigma_q X)\, A' - AX = U. \tag{1.6}$$
On peut l'obtenir, par exemple, par itération de l'opérateur z-adiquement contractant de $M_{r,r'}(\mathbf{C}((z)))$: $X \mapsto A^{-1}(-U + (\sigma_q X)\, A')$, dont elle est l'unique point fixe. Alors $\mathcal{B}_{q;1}\hat{X}_{A,A'}(U)$ définit une fonction matricielle $\Xi(z)$ méromorphe sur $\mathbf{C}$ et dotée de bonnes propriétés de croissance, etc ... (de type "q-sommabilité").

2. Il existe une union finie Σ de q-spirales discrètes (c.a.d. des ensembles de la forme $aq^{\mathbf{Z}}$) telle que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^* - \Sigma$, on peut définir la *transformée de q-Laplace discrète*:
$$L_{q;1}^{[\lambda]}\Xi(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\theta_q(q^n \lambda / z)} \Xi(q^n \lambda).$$
C'est une fonction (matricielle) méromorphe sur $\mathbf{C}^*$, à pôles simples portés par $\lambda q^{\mathbf{Z}}$, et solution de l'équation 1.6. Nous la noterons $S_\lambda \hat{X}_{A,A'}(U)$ ("somme dans la direction λ").

3. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}^* - \Sigma$ non congrus modulo $q^{\mathbf{Z}}$. Alors:
$$S_{\lambda_1}\hat{X}_{A,A'}(U) = S_{\lambda_2}\hat{X}_{A,A'}(U) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{X}_{A,A'}(U) \text{ converge.}$$

Pour de tels λ_1, λ_2, nous noterons $S_{\lambda_1,\lambda_2} = S_{\lambda_1} - S_{\lambda_2}$. Ainsi, $S_{\lambda_1,\lambda_2}\hat{X}_{A,A'}(U)$ est une solution méromorphe sur $\mathbf{C}^*$ de l'équation $(\sigma_q X)\, A' = AX$, à pôles simples portés par $\lambda_1 q^{\mathbf{Z}} \cup \lambda_2 q^{\mathbf{Z}}$ et nulle si et seulement si $\hat{X}_{A,A'}(U)$ converge; avec les notations de la proposition 1.2.3.3 (i), cette dernière condition équivaut à la trivialité de la classe d'extension $\overline{M_U}$. En particulier, $S_{\lambda_1,\lambda_2}\hat{X}_{A,A'}(U)$ ne dépend que de la classe $\overline{M_U}$.

Nous noterons $\mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'espace des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ et à pôles simples portés par $\lambda_1 q^{\mathbf{Z}} \cup \lambda_2 q^{\mathbf{Z}}$ et $\mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}(P,P')$ l'espace des matrices X à coefficients dans $\mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}$ et telles que $(\sigma_q X)\, A' = AX$.

Theorem 1.2.3.8 *L'application* $\overline{M_U} \mapsto S_{\lambda_1,\lambda_2}\hat{X}_{A,A'}(U)$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{F}(P,P')$ *dans* $\mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}(P,P')$.

Cette application est bien définie et injective d'après ce qui précède. Il reste à calculer la dimension de l'espace d'arrivée. Une méthode consiste à identifier les éléments de cet espace à des morphismes méromorphes entre deux fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, donc à des sections méromorphes d'un certain fibré, soumises à une condition sur leur diviseur. Le théorème de Riemann-Roch donne alors la réponse.

Une méthode plus concrète consiste à poser $Y(z) = \theta_q(z/\lambda_1)\theta_q(z/\lambda_2)X(z)$. Alors $X \in \mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}(P,P')$ si et seulement si Y est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et telle que $Y(qz) = \frac{q^2 z}{\lambda_1 \lambda_2} A_0 Y(z) {A'_0}^{-1}$. Le développement en série de Laurent $Y(z) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} Y_i z^i$ ramène aux équations $q^{i+1} Y_{1+1} = \frac{q^2}{\lambda_1 \lambda_2} A_0 Y_i {A'_0}^{-1}$. On voit que Y_0 détermine biunivoquement Y (la convergence de la série obtenue sur $\mathbf{C}^*$ se prouve facilement). Ainsi, la dimension de $\mathcal{E}_{\lambda_1,\lambda_2}(P,P')$ est bien rr'. □

Classification à plusieurs pentes

On reprend le cas de k pentes $\mu_1 > \cdots > \mu_k$, que l'on suppose entières. On note, pour $1 \leq i < j \leq k$, $d_{i,j} = \mu_i - \mu_j \in \mathbf{N}^*$ les niveaux (de sommation, etc ...). On identifie le module pur P_i de pente μ_i à (K^{r_i}, A_i), où $A_{i,0} = z^{\mu_i} A_i \in GL_{r_i}(\mathbf{C})$.

Soit $U = (U_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k} \in \prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K)$. La matrice

$$A_U = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & U_{1,i} & \ldots & U_{1,j} & \ldots & U_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_i & \ldots & U_{i,j} & \ldots & U_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_j & \ldots & U_{j,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}$$

définit un module $M_U = (K^n, \Phi_{A_U})$, dont le gradué associé $M_0 = (K^n, \Phi_{A_0}) = \bigoplus (K^{r_i}, \Phi_{A_i})$ est canoniquement muni d'un isomorphisme g_U avec $P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. On a donc un élément bien défini $\overline{M_U}$ de $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$.

Proposition 1.2.3.9 *(i) L'application:*

$$\begin{cases} U \mapsto \overline{M_U} \\ \prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K) \to \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k) \end{cases}$$

est surjective.
(ii) Deux éléments U et V ont même image si et seulement si il existe $X = (X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k} \in \prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K)$ tel que:

$$\forall i,j \ \text{t.q.} \ 1 \leq i < j \leq k \ , \ U_{i,j} + \sum_{l=i+1}^{j-1} (\sigma_q X_{i,l}) \, U_{l,j} + (\sigma_q X_{i,j}) \, A_j = A_i X_{i,j} + \sum_{l=i+1}^{j-1} V_{i,l} X_{l,j} + V_{i,j},$$

où l'on convient que $\sum_{l=i+1}^{i} = 0$.

La surjectivité est tautologique. La condition $\overline{M_U} = \overline{M_V}$ signifie qu'il existe un isomorphisme $F : M_U \to M_V$ compatible avec le passage au gradué associé. La matrice d'un tel isomorphisme est nécessairement de la forme:

$$F_X = \begin{pmatrix} I_{r_1} & \ldots & X_{1,i} & \ldots & X_{1,j} & \ldots & X_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & I_{r_i} & \ldots & X_{i,j} & \ldots & X_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & I_{r_j} & \ldots & X_{j,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & I_{r_k} \end{pmatrix}.$$

La condition $(\sigma_q F_X) \, A_U = A_V F_X$ donne le système ci-dessus. □

Theorem 1.2.3.10 *La restriction de l'application $U \mapsto \overline{M_U}$ à $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(\mathbf{C}[z]_{d_{i,j}-1})$ est bijective. En conséquence, $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$ est munie d'une structure de variété algébrique affine de dimension $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j d_{i,j} = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_i - \mu_j)$.*

La preuve se fait par récurrence sur k. Pour $k = 2$, cela a déjà été démontré. Pour passer de $k-1$ à k, on utilise le fait suivant: il y a une surjection canonique de $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$ sur $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_{k-1})$ qui, à la classe du module M, associe la classe du module $M' = F^{\geq \mu_{k-1}}(M)$. L'image réciproque de la classe de M' par cette application est en bijection (canonique, comme tout le monde) avec $Ext^1(P_k, M')$. Il suffit donc de prouver que l'application induite de $\prod\limits_{1 \leq i < k} M_{r_i,r_k}(\mathbf{C}[z]_{d_{i,k}-1})$ dans $Ext^1(P_k, M')$ est elle-même bijective. A son tour, cette assertion est prouvée par dévissage de M' en ses composants purs. Le calcul de la dimension est immédiat. □

Comme à côté amusant, on constate que la dimension obtenue est l'aire de l'intérieur du polygone de Newton.

Remark 1.2.3.11 *Il sera tout de même nécessaire de donner un caractère plus fonctoriel à la structure de variété algébrique sur $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$.*

On va maintenant aborder l'équivalent général de la paramétrisation elliptique. Notons $G \subset GL_n$ le groupe des matrices de la forme donnée plus haut à F_X. Il s'agit donc d'un sous-groupe algébrique de GL_n, de dimension $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j$. Soit $\hat{K} = \mathbf{C}((z))$. Alors $G(K)$ est un sous-groupe de $G(\hat{K})$ et l'on a un *ensemble* quotient $G(\hat{K})/G(K)$ (ensemble pointé, mais pas mieux, car ce n'est évidemment pas un sous-groupe distingué).

Lemma 1.2.3.12 *Pour $U, V \in \prod\limits_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K)$ donnés, l'équation $(\sigma_q F_X) A_U = A_V F_X$ admet une unique solution $\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, V) \in G(\hat{K})$. On a $\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, W) = \hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(V, W)\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, V)$.*

La première affirmation se prouve en résolvant le sytème en les $X_{i,j}$ par récurrence sur $j - i$. Chaque équation en $X_{i,j}$:

$$(\sigma_q X_{i,j}) A_j - A_i X_{i,j} = \sum_{l=i+1}^{j-1} V_{i,l} X_{l,j} - \sum_{l=i+1}^{j-1} (\sigma_q X_{i,l}) U_{l,j} + V_{i,j} - U_{i,j}$$

admet une unique solution dans $M_{r_i,r_j}(\hat{K})$ car c'est une équation au point fixe d'un opérateur z-adiquement contractant. La deuxième affirmation en découle. □

On peut aussi le voir comme une conséquence de l'étude générale de la filtration canonique dans le cas formel: $\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, 0)$ est l'unique isomorphisme formel de M_U avec son gradué et l'on a nécessairement $\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, V) = \left(\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(V, 0)\right)^{-1} \hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, 0)$.

Proposition 1.2.3.13 *L'application $M_U \mapsto \hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, 0)$ induit une application injective de l'ensemble pointé $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$ (où l'on a distingué la classe triviale, c.a.d. totalement scindée) dans l'ensemble pointé $G(\hat{K})/G(K)$.*

Cela résulte de l'équivalence entre l'égalité des classes $\overline{M_U} = \overline{M_V}$ et la convergence de l'isomorphisme formel $\hat{F}_{A_1,\ldots,A_k}(U, V)$. □

La partie effectivement atteinte est l'ensemble $G^{P_1,\ldots,P_k}(\hat{K})/G(K)$, où $G^{P_1,\ldots,P_k}(\hat{K})$ désigne l'ensemble des $F \in G(\hat{K})$ tels que $(\sigma_q F)^{-1} A_0 F$ converge.

Remark 1.2.3.14 *Pour obtenir à partir de là la paramétrisation elliptique, il faudra évidemment une théorie de la multisommabilité.*

Chapter 2

Géométrie

Ce chapitre *devrait* être rédigé par Jean-Pierre Ramis.

Chapter 3

Analyse

Ce chapitre *devrait* être rédigé par Changgui Zhang.

Bibliography

[1] **Bourbaki N., 1980.** *Algèbre, Chapitre 10, Algèbre homologique*, Masson.

[2] **van der Put M. and Singer M.F., 1997.** *Galois theory of difference equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1666, Springer Verlag.

[3] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, *Annales de Fac. des Sciences de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, pp. 53-94.

[4] **Sabbah C., 1993.** Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations, *in: $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Maisonnobe P. & Sabbah C. eds, Hermann.

[5] **Sauloy J., 2002.** La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences, C.R. Acad. Sci. Paris, janvier 2002.

[6] **Sauloy J., 2002.** La filtration canonique par les pentes des modules aux q-différences et le gradué associé, *Article in preparation.*

[7] **Sauloy J., 2001.** La filtration canonique par les pentes des modules aux q-différences et le gradué associé, Rédaction d'exposés au Groupe de Travail "Equations aux q-différences", `url: picard.ups-tlse.fr/~sauloy`.