Equations fonctionnelles analytiques dans le champ complexe

(cours de troisième cycle, premier niveau, 2004/2005)

J. Sauloy [1]

27 mars 2009

[1]Laboratoire Emile Picard, CNRS UMR 5580, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 4

Résumé

Ce résumé reproduit (sans les erreurs) la présentation du cours telle qu'elle figurait dans le syllabus. Je ne prétends pas que ce (vaste) programme soit réalisable.

On présentera de manière unifiée quelques aspects de la théorie des équations différentielles (resp. aux différences, resp. aux q-différences) analytiques linéaires sur la sphère de Riemann, selon un paradigme introduit par G. D. Birkhoff en 1913, mais en tenant compte des modernisations apparues depuis. Après avoir introduit les outils algébriques et transcendants de base ($\mathcal{D}$-modules, fonctions spéciales, représentation de monodromie) on étudiera certains développements récents de la théorie des équations aux q-différences. On se limitera aux systèmes fuchsiens.

1. *Outils algébriques.* - Une équation linéaire d'ordre n ou un système de rang n peuvent être interprétés comme un module à gauche de longueur finie sur une algèbre de Öre $\mathcal{D}$. On étudiera les algorithmes de division et du vecteur cyclique, l'équivalence de systèmes, le lien entre suites exactes de $\mathcal{D}$-modules et factorisation d'opérateurs.

2. *Fonctions spéciales et résolution explicite.* - Après avoir caractérisé les équations et les systèmes fuchsiens, on étendra la méthode de Frobenius pour les équations différentielles aux équations aux différences et aux q-différences à l'aide des fonctions Gamma et Theta. On comparera les corps des constantes des trois théories.

3. *Classification.* - La correspondance de Riemann-Hilbert permet de classifier les systèmes différentiels fuchsiens sur la sphère de Riemann par leurs représentations de monodromie. On l'étendra aux équations aux différences et aux q-différences à l'aide de la matrice de connexion de Birkhoff.

4. *Confluence et théorie de Galois.* - La matrice de connexion de Birkhoff d'une équation aux q-différences permet de retrouver, lorsque $q \to 1$, la représentation de monodromie d'une équation différentielle. Cela donne un sens géométrique à de nombreuses q-analogies classiques et à de modernes problèmes de q-déformation. La matrice de connexion permet également de décrire le groupe de Galois, défini à la Picard-Vessiot ou en termes tannakiens.

5. *Compléments.* - Si le temps le permet, on abordera l'application de l'algèbre homologique aux calculs d'indices, la formulation fonctorielle de la correspondance de Riemann-Hilbert et la dualité tannakienne.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Origines

Riemann a montré que l'on pouvait décrire les fonctions analytiques par leur comportement local au voisinage de chaque singularité et des considérations qualitatives (géométriques ou topologiques) sur leur lieu régulier : il a pu en déduire leur comportement global lors du prolongement analytique sur l'ouvert $X = \mathbf{S} \setminus \Sigma$ de la sphère de Riemann $\mathbf{S}$, où Σ désigne l'ensemble (fini) des singularités. Ce prolongement analytique fait apparaitre le phénomène de *ramification*, autrement dit les fonctions sont multiformes et ont des branches. Le prolongement analytique le long d'un chemin ne dépend que de la classe d'homotopie dans X de ce chemin : c'est le *théorème de monodromie* [1]. Par exemple, si l'on considère les lacets basés en un point $x_0 \in X$ fixé, on en déduit que le groupe fondamental ou premier groupe d'homotopie [2] $\pi_1(X, x_0)$, constitué des classes d'homotopie de tels lacets, opère sur l'ensemble des déterminations au voisinage de x_0. Le *groupe de monodromie* (on devrait plutôt dire polydromie !) est le quotient du groupe fondamental par le noyau de cette action. En termes modernes, la fonction multiforme est plutôt définie (et uniforme) sur un revêtement X' de X et les branches (ou déterminations) correspondent à des feuillets du revêtement ; le groupe fondamental agit sur ceux-ci et le groupe de monodromie s'interprète comme un groupe d'automorphismes du revêtement. Les exemples les plus célèbres sont les fonctions algébriques, pour lesquelles Riemann a inventé en 1851 dans [42] les surfaces qui portent son nom. Dans ce cas, le groupe de monodromie est fini et s'interprète comme le groupe de Galois d'une extension finie du corps $\mathbf{C}(z)$ des fractions rationnelles sur $\mathbf{C}$: outre l'approche géométrique et topologique de l'analyse pronée par Riemann, il y a donc une approche algébrique, dans l'esprit de Galois.

Dans le cas des *solutions d'équations différentielles linéaires homogènes*, considéré dès 1854 par Riemann dans [43], le groupe fondamental opère linéairement sur l'espace vectoriel des solutions sur tout petit domaine simplement connexe, mettons un disque. On obtient ainsi une *représentation linéaire du groupe fondamental* [3], la *représentation de monodromie*. Dans ce cas, le groupe de monodromie s'identifie donc à un groupe de matrices. La *correspondance de Riemann* devient ici *correspondance de Riemann-Hilbert*. Le XIXème siècle l'a abordée pour les *points singuliers réguliers* (méthode de Fuchs-Frobenius) [26], [2]. Le problème fondamental est celui-ci : cette correspondance biunivoque ? De manière plus ouverte : comment décrire les deux côtés de cette correspondance pour qu'elle le soit ?

Birkhoff a ensuite montré en 1913, dans [6], que l'on pouvait formuler un analogue de ce problème dans le cadre des équations aux différences, *resp.* aux q-différences, et que l'on pouvait résoudre le problème dans les trois cas en parallèle.

[1] Les connaissances d'analyse complexe requises pour ce cours sont (très largement) contenues dans [1] dont le chapitre 8 est une introduction idéale à notre sujet ; voir aussi les grands classiques : [9] et [44].

[2] Les rudiments nécessaires sur le groupe fondamental peuvent être trouvés (par exemple) dans [17] ou encore [32].

[3] Un peu de *vocabulaire* de la théorie des représentations nous suffira largement : voir [4] ou [50].

Citons maintenant certaines des évolutions de ce problème au XXème siècle :

1. Théorie de Galois différentielle : peut-on (comme pour les fonctions algébriques) retrouver l'opération du groupe de monodromie par des voies algébriques ? Voir à ce sujet, par exemple, [38].
2. Méthodes "intrinsèques" issues de la géométrie différentielle : fibrés vectoriels holomorphes sur des surfaces de Riemann munis de connexions. Voir à ce sujet, par exemple, [11] et [45].
3. Singularités irrégulières. Voir à ce sujet, par exemple, [40].
4. Riemann-Hilbert à plusieurs variables. Voir à ce sujet, par exemple, [30] et [31].

Enfin, sous l'impulsion d'un programme formulé par Jean-Pierre Ramis [39] et aussi pour des raisons exogènes, la théorie des équations aux q-différences a connu un regain d'activité puis d'interêt au cours de la dernière décennie : voir là dessus [13] ; pour les équations aux différences, voir plutôt [37].

Organisation de ce cours

Ce cours s'inscrit dans la droite ligne de Birkhoff [6] et, pour sa deuxième partie, de Ramis, [39], [40], voir également [13].

Nous avons pris le parti de ne recourir à aucun formalisme global ou intrinsèque sans nécessité vitale. La seule surface de Riemann qui apparait est la sphère de Riemann **S** (et bien sûr des tores complexes pour les équations aux q-différences). Nous ne parlons jamais (sauf allusion "culturelle") de fonctions uniformes sur des revêtements, seulement des fonctions sur des ouverts de **S**. Nous employons des fonctions multiformes, pourtant prohibées en France au XXIème siècle ! En effet, les conditions de croissance modérée des solutions dans les secteurs qui caractérisent les systèmes singuliers réguliers sont tout de même plus commodes à exprimer pour des fonctions multiformes au voisinage d'un point singulier, donc dans un disque épointé. Nous introduisons donc celles-ci au 3.1.2, dans l'esprit de Weierstrass (comme le fait Ahlfors dans [1]).

Nous ne manipulons ni fibrés, ni connexions : seulement des systèmes et des équations sur des ouverts de **S**. Enfin, l'équivalence entre systèmes locaux et représentations du groupe fondamental (qui est une étape cruciale, si triviale, dans la correspondance de Riemann-Hilbert) est montrée à la main, dans notre contexte restreint, donc sans grandes généralités sur les faisceaux. Les seuls prérequis sont donc un peu d'analyse complexe et d'algèbre linéaire élémentaire et quelques notions sur le groupe fondamental. On espère que le savoir-faire artisanal ainsi acquis est une motivation pour investir dans des langages et outils plus puissants.

Pour des raisons pédagogiques, on commence par les équations différentielles ordinaires, suivies par les q-différences : dans chaque cas, on explicite la correspondance de Riemann-Hilbert dans le cas singulier régulier. L'outil le plus sophistiqué est la famille des théorèmes de factorisation de type Birkhoff- Grothendieck. Pour les équations aux q-différences, une rapide description du phénomène de *confluence* vers les équations différentielles a été présentée. Cela permet de donner un sens très précis aux *q-analogies* qui sont l'un des interêts majeurs de la théorie.

Puis, sans ordonnancement prédéfini, des exposés par les étudiants sur :

1. La preuve du théorème de factorisation de Birkhoff,
2. un peu d'algèbre non commutative et différentielle,
3. une introduction à la correspondance de Riemann-Hilbert pour les équations aux différences,
4. l'usage des fibrés vectoriels holomorphes pour décrire les solutions d'équations aux q-différences et aux différences.

Les théorèmes d'origine extérieure sont évoqués avec une référence bibliographique précise et fiable.

Quelques conventions et notations

Espaces

On note $\mathbf{C}$ le corps des complexes et $\mathbf{S} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Le demi-plan de Poincaré est $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Pour tout $z_0 \in \mathbf{C}$ et $R > 0$, on note $\overset{\circ}{D}(z_0, R)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon R, $\overline{D}(z_0, R)$ le disque fermé de centre z_0 et de rayon R et $\partial D(z_0, R)$ le cercle de centre z_0 et de rayon R.

De manière générale, pour toute partie A de $\mathbf{S}$, on note $\overset{\circ}{A}$ son intérieur, $\overline{A}$ son adhérence et ∂A sa frontière.

Fonctions

$\mathbf{C}[[z]]$ désigne l'anneau des séries formelles sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes. C'est un anneau intègre dont le corps des fractions est $\mathbf{C}((z)) = \mathbf{C}[[z]][z^{-1}]$ (séries de Laurent formelles).

$\mathbf{C}\{z\}$ désigne l'anneau des séries entières, *i.e.* des séries formelles dont le rayon de convergence est strictement positif. L'anneau des séries entières est un anneau intègre dont le corps des fractions est le corps $\mathbf{C}(\{z\}) = \mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$ des séries de Laurent convergentes.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{S}$ (ou d'une surface de Riemann quelconque), $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur Ω ; si Ω est connexe, cette algèbre est intègre et $\mathcal{M}(\Omega)$, son corps des fractions, est le corps des fonctions méromorphes sur Ω.

Typographie

Un commentaire sur l'usage (peut-être abusif) des "guillemets" et des *italiques* pour souligner certains mots ou expressions s'impose. Les modalités ainsi exprimées sont les suivantes. L'usage des guillemets est, je crois, canonique : expressions imagées, citations, prise de recul, encapsulation de membres de phrase ... L'usage des italiques est réservé à l'emphase (mise en valeur d'un point important), aux expressions latines et à l'introduction d'une terminologie officielle, ou classique, ou que nous désirons stabiliser.

Dette

Je dédie avec émotion ce cours à la mémoire de Yannis Varouchas, professeur à l'Université de Nancy, qui nous a quittés il y a trois ans maintenant.

Yannis m'a aidé à lire Rudin il y a bien longtemps, à une époque où je comprenais encore moins ce qu'est une fonction que maintenant. Mais surtout, Yannis aimait à répéter (plus récemment) que les cours d'analyse de notre époque ne contiennent pratiquement jamais de "vraies fonctions" : il y a parfois l'exponentielle, mais, en général, seulement f et g ...

Première partie

Equations différentielles

Chapitre 1

Prolongement analytique

Ce premier chapitre du cours se veut une introduction pédagogique aux idées de Riemann sur les fonctions analytiques. Son contenu est très proche du chapitre 8 de [1], dont on recommande sans réserves la lecture : cela signifie, comme on va le voir, que c'est plutôt le point de vue de Weierstrass qui a été adopté.

Les mathématiciens du XIXème siècle ont observé de nombreux exemples de fonctions dont la définition est *a priori* locale et dont les possibles prolongements analytiques présentent le phénomène de ramification : apparition de plusieurs branches. Riemann a inauguré un point de vue géométrique et topologique là dessus, d'abord à propos des fonctions algébriques, puis à propos des équations différentielles. Le phénomène observé est toujours le même. Il y a un certain domaine $X \subset \mathbf{C}$, plus généralement, $X \subset \mathbf{S}$ (la sphère de Riemann) où l'on peut *a priori* résoudre une équation fonctionnelle (typiquement algébrique ou différentielle, avec pour coefficients des fonctions rationnelles).

On obtient tout d'abord une solution locale de ce problème. Une méthode standard est de la chercher sous forme de série entière. On a alors *l'unicité* de l'extension de cette solution aux ouverts connexes de X : cela est dû au principe d'unicité du prolongement analytique (ou parfois plus simplement à des considérations de continuité, comme dans le cas des fonctions algébriques). Bien sûr, on ne peut espérer aucune espèce d'unicité si l'on se place sur des ouverts non connexes de X, car leurs composantes connexes sont des ouverts deux à deux disjoints sur lesquels les restrictions des fonctions recherchées sont totalement indépendantes les unes des autres.

Pour obtenir *l'existence* de solutions sur un ouvert connexe $U \subset X$, on tente de recoller des solutions locales, qui sont définies sur de “petits” ouverts, par exemple des disques. En général, cela marchera bien si X est simplement connexe mais pas autrement : on obtient une fonction *multiforme*, qui a des *branches*. La solution de Riemann consiste alors à remplacer X par ce que l'on appelle (depuis le XXème siècle) un revêtement X' de X, sur lequel la fonction devient uniforme : les branches de la fonction multiforme de départ correspondent à des *feuillets* de ce revêtement ; on dit aussi que chacune de ces branches “vit” sur un tel feuillet.

Dans tout ce cours, les fonctions vivront sur des ouverts de $\mathbf{S}$ et nous ne passerons *jamais* à un revêtement. L'aspect topologique du prolongement analytique et de la ramification sera vu entièrement à travers l'action des classes d'homotopie de chemins sur le faisceau des solutions de notre équation fonctionnelle, dont on verra que c'est un système local, ainsi que de la représentation de monodromie qui lui est associée (ces termes sont définis plus loin). On reconnait là la définition par Weierstrass des *éléments analytiques*, un ancêtre de la théorie des faisceaux.

Cette démarche évite d'introduire un lourd formalisme préliminaire : la dose nécessaire de théorie des faisceaux est homéopathique, et nous supposons le lecteur familier avec le groupe fondamental, ici vu comme groupe de classes d'homotopie de lacets. L'étudiant ambitieux est évidemment encouragé à acquérir en parallèle les connaissances de topologie algébrique (revêtements et faisceaux) qui permettent d'élargir le cadre du cours [1].

Afin d'acquérir un peu de feeling (et de savoir-faire artisanal) [2] pour ces questions, on va traiter de manière concrète et dans le détail trois exemples. Le premier et le troisième exemple introduisent de plus des fonctions fondamentales dont nous aurons besoin par la suite (avec toutes leurs propriétés de ramification). Le deuxième exemple vise à appliquer le premier à l'étude d'une fonction algébrique, puisque nous n'en verrons plus par la suite.

1.1 Les "caractères" z^α , $\alpha \in \mathbf{C}$

Notre but est ici de définir une fonction $z \mapsto z^\alpha$ raisonnable sur $\mathbf{C}$, lorsque l'exposant α lui-même est complexe.

1.1.1 Cas d'un exposant rationnel

Si $\alpha \in \mathbf{Z}$, la définition est complètement triviale et fournit directement une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}^*$ selon le signe de α. Supposons donc $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$. On l'écrit $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ premiers entre eux (donc $q \geq 2$). Mettons de côté la définition en 0, qui dépend uniquement du signe de p. On sait définir $x^{p/q}$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ de manière élémentaire, en invoquant la monotonie et la continuité des fonctions puissances et la complétude de $\mathbf{R}$. Le principe d'unicité du prolongement analytique (qui est en fait un corollaire du théorème des zéros isolés) entraine que l'extension recherchée à un ouvert connexe quelconque de $\mathbf{C}^*$ devra vérifier : $\left(z^{p/q}\right)^q = z^p$.

Nous *définirons* donc la fonction $f(z) = z^{p/q}$ sur $X = \mathbf{C}^*$ de manière axiomatique par les conditions :

$$\begin{cases} (f(z))^q = z^p & \text{(équation fonctionnelle)} \\ f(1) = 1 & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

Ici, l'équation fonctionnelle est une équation algébrique.

Exercice 1.1.1 La condition initiale ponctuelle choisie garantit à elle seule l'unicité d'une solution *continue* sur tout ouvert connexe de X contenant 1.
Indication : si f et g sont deux telles solutions, f/g est bien défini et à valeurs dans l'ensemble μ_q des racines q-èmes de l'unité, lequel est discret.

Exercice 1.1.2 Il n'y a *aucune* solution continue sur X tout entier.
Indication : la fonction $t \mapsto f(e^{2\imath\pi t})\, e^{-2\imath\pi t p/q}$ serait à valeurs dans μ_q ; la fonction $f(e^{2\imath\pi t})$ est 1-périodique, mais pas la fonction $e^{2\imath\pi t p/q}$.

On va cependant déterminer f localement, puis la prolonger.

[1]Le DEA (ou Mastere 2) de mathématiques pures 2004/2005 à l'Université Paul Sabatier comporte au premier semestre un module "Corps de classes". On espère que les étudiants les plus imaginatifs verront l'analogie entre fonctions analytiques (dualité des points de vue : groupe d'homotopie agissant sur des fonctions vivant sur une partie de **S** *vs* groupe fondamental comme groupe des automorphismes d'un revêtement) et nombres algébriques (dualité des points de vue : groupe des classes d'idéaux *vs* groupe de Galois des extensions abéliennes).

[2]Il me semble que ce savoir-faire s'acquiert idéalement lors d'une préparation à l'agrégation, ce qui est une très bonne raison pour pousser les étudiants à en passer par là avant le DEA et la thèse. Malheureusement, la problématique du prolongement analytique (aspects globaux) est rarement présentée aux agrégatifs.

Première méthode : via le théorème des fonctions implicites

Cette méthode se généralise à toutes les fonctions algébriques et nous servira à nouveau en 1.2. Dans le cas général, on considère $P(z,w) \in \mathbf{C}(z)[w]$, *i.e.* P est un polynôme en w dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en z ; on peut de plus supposer ce polynôme w unitaire. L'égalité $P(z,w) = 0$ définit la fonction implicite $w(z)$ qui est, par définition, une fonction algébrique de z. Plus précisément, on part d'un couple (z_0, w_0) tel que $P(z_0, w_0) = 0$. Ce couple est dit singulier si de plus $\frac{\partial}{\partial w} P(z_0, w_0) = 0$. Les valeurs z_0 qui apparaissent ainsi sont les zéros du résultant $\mathrm{Res}_w(P, \frac{\partial}{\partial w} P)$, autrement dit du discriminant $\mathrm{Disc}_w P$, qui est un polynôme en z. Appelons lieu singulier et notons Σ le lieu des zéros de $\mathrm{Disc}_w P$. Pour tout $z_0 \not\in \Sigma$ et pour tout w_0 tel que $P(z_0, w_0) = 0$, il existe, au voisinage de (z_0, w_0), une unique fonction holomorphe $w(z)$ telle que $w(z_0) = w_0$ et $P(z, w(z)) = 0$ identiquement dans ce voisinage (théorème des fonctions implicites). Nous prenons $P(z,w) = w^q - z^p$ et trouvons (sauf erreur ...) $\mathrm{Disc}_w P = q^q z^{p(q-1)}$, d'où $\Sigma = \{0\}$. La méthode s'applique donc au voisinage de $(z_0, w_0) = (1,1)$: il existe bien, dans un voisinage assez petit de $1 \in \mathbf{C}^*$, une fonction unique $z^{p/q}$.

Deuxième méthode : via le théorème d'inversion locale

Cette méthode nous servira à nouveau pour définir localement le logarithme en 1.3. L'application de $\mathbf{C}$ dans lui même $w \mapsto w^q$ est surjective puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos. Sa dérivée est qw^{q-1} qui ne s'annule qu'en 0. D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc, pour tout $z_0 \in \mathbf{C}^*$ et pour tout antécédent w_0 de z_0, une fonction réciproque telle qui envoie z_0 en w_0. Prenant $(z_0, w_0) = (1,1)$, on obtient ainsi la fonction $z^{1/q}$; il est alors facile de définir $F(z) = z^{p/q}$.

1.1.2 Cas d'un exposant quelconque

Il n'y a dans ce cas pas de généralisation naturelle des méthodes précédentes. C'est l'occasion d'en inaugurer une nouvelle.

Troisième méthode : étude locale et globale d'une équation différentielle

C'est cette méthode que nous comptons généraliser et systématiser par la suite. On caractérise la fonction $f(z) = z^\alpha$ axiomatiquement par les conditions :

$$\begin{cases} zf'(z) = \alpha f(z) \quad \text{(équation fonctionnelle)} \\ f(1) = 1 \quad \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

Cette fois, l'équation fonctionnelle est une équation différentielle. Elle est imposée par le principe d'unicité du prolongement analytique : en effet, il est naturel de supposer que f est une extension de la fonction $g(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par voie élémentaire. Cette dernière vérifie notre équation différentielle $xg' = \alpha g$, autrement dit, on sait que la restriction de $zf' - \alpha f$ à $\mathbf{R}_+^*$ est identiquement nulle ; la fonction $zf' - \alpha f$ doit donc être nulle sur tout ouvert connexe qui rencontre $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 1.1.3 Si $\alpha \not\in \mathbf{Z}$, l'équation différentielle n'admet aucune solution non triviale qui soit une série, quelque soit l'espace de séries considéré : $\mathbf{C}\{z\}$, $\mathbf{C}[[z]]$, $\mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}((z))$.
Indication : le vérifier par identification des coefficients.

Exercice 1.1.4 Si $\alpha \not\in \mathbf{Z}$, l'équation différentielle n'admet aucune solution non triviale qui soit holomorphe sur un disque épointé de centre 0.
Indication : invoquer le théorème des résidus (utiliser la version donnée dans [1] ou [9] : celle de [44] est trop faible).

Puisque la condition initiale est donnée en 1, on va commencer par résoudre l'équation différentielle par développement en série entière au voisinage de 1 ; on pose :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n (z-1)^n.$$

L'équation équivaut alors à :

$$\forall n \geq 0\ ,\ (n+1) f_{n+1} = (\alpha - n) f_n,$$

et la condition initiale dit que $f_0 = 1$. On introduit la notation :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

pour les coefficients binomiaux généralisés. La relation de récurrence ci-dessus donne alors :

$$\forall n \geq 0\ ,\ f_n = \binom{\alpha}{n}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} (z-1)^n$ est donc l'unique série formelle satisfaisant l'équation différentielle avec condition initiale (on reconnait en elle le *binôme de Newton généralisé*) ; cette série a pour rayon de convergence 1 et définit donc une fonction holomorphe sur $\mathring{D}(1,1)$. Notons la, temporairement, $f_\alpha(z)$. Il résulte d'ailleurs du calcul précédent que les solutions de l'équation différentielle (sans la condition initiale) qui sont holomorphes au voisinage de 1, c'est-à-dire développables en série entière au voisinage de 1, forment un $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par f_α.C'est évidemment un cas particulier du théorème de Cauchy sur les solutions d'équations différentielles linéaires.

On constate d'abord que, quelque soit l'ouvert connexe U de $\mathbf{C}^*$, l'espace vectoriel des solutions de notre équation différentielle holomorphes sur U est de dimension *au plus* 1 (c'est un cas particulier du *lemme du wronskien* que l'on prouvera plus tard en toute généralité).

Exercice 1.1.5 Le démontrer en remarquant que, si $f \neq 0$ et g sont solutions, alors $(g/f)' = 0$.

On peut en fait *construire* des solutions au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbf{C}^*$ quelconque. On démontre facilement que l'espace vectoriel de ces solutions est engendré par $f_\alpha(z/z_0)$, et que les solutions sont donc holomorphes sur $\mathring{D}(z_0, |z_0|)$.

Exercice 1.1.6 Le démontrer par développement en série entière au voisinage de z_0 (comme ci-dessus).

Exercice 1.1.7 Le démontrer en remarquant que, pour tout $a \in \mathbf{C}^*$, la fonction $g(z)$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si la fonction $g(az)$ l'est.

Extension aux disques voisins

Soit, plus généralement, $V \subset \mathring{D}(z_0, |z_0|)$ un ouvert connexe non vide. D'après le principe d'unicité du prolongement analytique, l'application qui, à $g \in Sol(\mathring{D}(z_0, |z_0|))$ associe sa restriction $g_{|V} \in Sol(V)$ à V est injective. Comme l'espace de départ est de dimension 1 et que l'espace d'arrivée est de dimension ≤ 1, c'est en fait un isomorphisme. *Cette propriété est très importante et sera systématisée plus loin.* Pour l'appliquer au problème du prolongement analytique, on suppose que $\mathring{D}(z_0, |z_0|) \cap \mathring{D}(1,1) \neq \emptyset$. Cela équivaut à $z_0 \notin \mathbf{R}_-$ (faire un petit dessin). Notons temporairement D et D' ces deux disques et soient $Sol(D)$, $Sol(D')$ les espaces vectoriels de solutions holomorphes sur ces disques (qui sont donc de dimension 1). Les applications de restriction de $Sol(D)$ et de $Sol(D')$ sur $Sol(D \cap D')$ sont des isomorphismes. On obtient ainsi un isomorphisme bien défini de $Sol(D)$ sur $Sol(D')$.

En particulier, la fonction f_α introduite plus haut (l'unique élément de $Sol(\overset{\circ}{D}(1,1))$ tel que $f(1) = 1$) admet un unique prolongement analytique à $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$, qui est solution de l'équation différentielle. Les solutions ainsi trouvées *ne sont pas toutes compatibles entre elles* : si en effet elles l'étaient, on pourrait les recoller sur

$$\bigcup_{z_0 \notin \mathbf{R}_-} \overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|) = \mathbf{C}^* \quad \text{(vérifier cette égalité par un petit dessin).}$$

Or, on sait déjà qu'il n'existe pas de solution définie sur $\mathbf{C}^*$.

Cependant, si z_0 et z_1 sont dans le demi-plan ouvert droit (leurs parties réelles sont > 0), l'intersection triple $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|) \cap \overset{\circ}{D}(z_1, |z_1|) \cap \overset{\circ}{D}(1,1)$ est non-vide (petit dessin ...) et les solutions obtenues par prolongement analytique de f_α à $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$ et à $\overset{\circ}{D}(z_1, |z_1|)$ sont compatibles entre elles. On peut donc prolonger f_α à :

$$\bigcup_{\Re(z_0) > 0} \overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|) = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \quad \text{(vérifier cette égalité par un petit dessin),}$$

d'où :

Proposition 1.1.8 *Il existe une unique solution de l'équation différentielle avec condition initiale :*

$$\begin{cases} z f'(z) = \alpha f(z) & \textit{(équation fonctionnelle)} \\ f(1) = 1 & \textit{(condition initiale)} \end{cases}$$

holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ de $\mathbf{C}^*$. Pour tout ouvert connexe U de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, l'espace $Sol(U)$ des solutions est de dimension 1 et engendré par la restriction de cette solution à U. De plus, l'application de restriction de $Sol(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$ dans $Sol(U)$ est alors un isomorphisme. □

Nous noterons z^α cette solution : c'est la *détermination principale* de la fonction puissance.

Corollaire 1.1.9 *Pour $|Im(w)| < \pi$, on a :*

$$(e^w)^\alpha = e^{w\alpha};$$

en particulier, $\imath^\alpha = e^{\imath\pi\alpha/2}$ et $(-\imath)^\alpha = e^{-\imath\pi\alpha/2}$.

Preuve. - La fonction $w \mapsto (e^w)^\alpha e^{-w\alpha}$ est définie et a une dérivée nulle dans l'ouvert connexe considéré, et elle vaut 1 en 0. Par ailleurs, $\imath = e^{\imath\pi/2}$ et $-\imath = e^{-\imath\pi/2}$. □

Corollaire 1.1.10 *On a les formules classiques : $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$, $z^0 = 1$, $(z^\alpha)^{-1} = z^{-\alpha}$. De plus, si $\alpha = p/q$, z^α coïncide avec la fonction déjà définie.*

Preuve. - Chaque fois, les deux membres de l'égalité sont caractérisés par une équation fonctionnelle et une condition initiale qui garantissent l'unicité. □

Corollaire 1.1.11 *L'équation différentielle $z f'(z) = \alpha f(z)$ admet une unique solution holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ de $\mathbf{C}^*$ et telle que $-1 \mapsto 1$. Pour tout ouvert connexe U de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$, l'espace $Sol(U)$ des solutions est de dimension 1 et engendré par la restriction de cette solution à U. De plus, l'application de restriction de $Sol(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+)$ dans $Sol(U)$ est alors un isomorphisme.*

Preuve. - C'est, bien sûr, la fonction $(-z)^{\alpha}$. $\square$

Corollaire 1.1.12 *La fonction $\frac{z^{\alpha}}{(-z)^{\alpha}}$ est définie et localement constante sur l'ouvert $\mathcal{H} \cup (-\mathcal{H})$ de $\mathbf{C}$; elle vaut $e^{\imath\pi\alpha}$ sur $\mathcal{H}$ et $e^{-\imath\pi\alpha}$ sur $-\mathcal{H}$.*

Preuve. - Le domaine de définition est $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+) = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} = \mathcal{H} \cup (-\mathcal{H})$. La fonction y est holomorphe de dérivée nulle, donc constante sur les composantes connexes $\mathcal{H}$ et $-\mathcal{H}$; les valeurs sont données par le corollaire 1. $\square$

Exercice 1.1.13 Soit $a \in \mathbf{C}^*$. Déterminer le lieu de définition et d'holomorphie de la fonction $\frac{(az)^{\alpha}}{z^{\alpha}}$ et la calculer.
Indication : sa dérivée est nulle.

Application : la promenade

On veut analyser l'effet du prolongement analytique le long du lacet basé en 1 :

$$\gamma : \begin{cases} [0;1] \to \mathbf{C}^* \\ t \mapsto e^{2\imath k\pi t} \end{cases}$$

(pour la définition du prolongement analytique le long d'un chemin, voir [1], chap. 8, §1). Pour cela, on introduit les disques $D_k = \overset{\circ}{D}(\gamma(k/4), 1)$, $k = 0, 1, 2, 3$ et l'on note $V_k = Sol(D_k)$ les espaces vectoriels de solutions correspondants (ils sont donc de dimension 1).

Les ouverts connexes D_k et D_l ont une intersection non vide si et seulement si k et l sont consécutifs modulo 4. On a alors des isomorphismes de restriction de V_k et de V_l avec $Sol(D_k \cap D_l)$, donc un isomorphisme bien défini entre V_k et V_l. Cela nous fournit une chaine d'isomorphismes :

$$V_0 \overset{\sim}{\to} V_1 \overset{\sim}{\to} V_2 \overset{\sim}{\to} V_3 \overset{\sim}{\to} V_0.$$

Leur composé est un automorphisme bien défini de V_0 : celui du prolongement analytique le long de γ.

Pour l'expliciter, on va considérer l'image de la base (constituée d'un seul élément) $f_{\alpha} = z^{\alpha}_{|D_0}$ de V_0 :

1. L'image de f_{α} dans V_1 est $z^{\alpha}_{|D_1}$ qui, d'après le corollaire 4 ci-dessus, est égale à $e^{\imath\pi\alpha}\,(-z)^{\alpha}_{|D_1}$.
2. L'image de ce dernier dans V_2 est $e^{\imath\pi\alpha}\,(-z)^{\alpha}_{|D_2}$.
3. L'image de ce dernier dans V_3 est $e^{\imath\pi\alpha}\,(-z)^{\alpha}_{|D_3}$ qui, d'après le corollaire 4 ci-dessus, est égale à $e^{2\imath\pi\alpha}\,z^{\alpha}_{|D_3}$.
4. L'image de ce dernier dans $V_4 = V_0$ est $e^{2\imath\pi\alpha}\,z^{\alpha}_{|D_0} = e^{2\imath\pi\alpha} f_{\alpha}$.

Cela mérite bien un

Théorème 1.1.14 *L'effet du prolongement analytique le long de γ est l'automorphisme $f \mapsto e^{2\imath\pi\alpha} f$ de V_0.*
$\square$

Remarquons que le choix des disques qui entourent le lacet image de γ n'a visiblement pas d'importance.

1.1.3 L'action du groupe fondamental (à la lourdingue)

Soient x_0,x_1 des points de $X = \mathbf{C}^*$ et soient V_0,V_1 les **C**-espaces vectoriels de solutions de l'équation différentielle $zf' = \alpha f$ au voisinage de x_0,x_1 (c'est-à-dire sur n'importe quels voisinages connexes assez petits de x_0,x_1 dans $\mathbf{C}^*$, par exemple des disques de rayons assez petits) [3].

Pour tout chemin $\gamma_1 : [0;1] \to X$ de x_0 à x_1, le prolongement analytique le long de γ_1 (cf. *loc. cit.*) réalise un isomorphisme de V_0 dans V_1. De plus, d'après le *principe de monodromie* ([1], chap. 8, §1.6, th. 2, p. 295), cet isomorphisme dépend seulement de la classe d'homotopie de γ_1 (à points de base fixés). Notons $\bar{\gamma}_1 \in \Pi_1(X;x_0,x_1)$ cette classe, et $f.\bar{\gamma}_1$ l'image d'un élément de $f \in V_0$ dans V_1 par ce prolongement analytique.

Exercice 1.1.15 Prendre $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ et les chemins de x_0 à x_1 définis par $t \mapsto e^{\pm \imath\pi t}$, et appliquer les considérations ci-dessus.
Indication : c'est mâché dans la promenade.

Soient maintenant $x_2 \in X$, V_2 le **C**-espace vectoriel des solutions de $zf' = \alpha f$ au voisinage de x_2 et γ_2 un chemin dans X de x_1 à x_2. Si l'on prolonge $f \in V_0$ en $g = f.\bar{\gamma}_1 \in V_1$ puis ce dernier en $h = g.\bar{\gamma}_2 \in V_2$, il est clair que l'on obtient le même résultat que si l'on avait prolongé f le long du chemin composé $\gamma_1.\gamma_2$. On a donc la formule (voir *loc. cit.*) :

$$(f.\bar{\gamma}_1).\bar{\gamma}_2 = f.(\bar{\gamma}_1.\bar{\gamma}_2).$$

On vérifie aussi que les chemins triviaux (constants, ou homotopes à des chemins constants) agissent trivialement. On dit (si l'on veut) que le groupoïde d'homotopie agit à droite sur le système local des solutions.

Prenons maintenant $x_0 = x_1 = x_2$. Il résulte de toute cet abstract nonsense que le groupe fondamental $\pi_1(X,x_0)$ opère linéairement à droite sur V_0 : le fait que l'opération est à droite est imposé par l'écriture $\gamma_1.\gamma_2$ pour le composé de deux chemins [4]. En tout cas, l'existence de cette opération à droite signifie que l'on a un *anti*homomorphisme de groupes :

$$\pi_1(X,x_0) \to Aut_{\mathbf{C}}(V_0),$$

ou encore un morphisme de groupes :

$$\pi_1(X,x_0)^\circ \to Aut_{\mathbf{C}}(V_0),$$

partant cette fois du *groupe opposé* au groupe fondamental.

Exercice 1.1.16 Démontrer que tout groupe G est isomorphe à son opposé et que l'on peut donc obtenir une opération à gauche et un morphisme normal.
Indication : remplacer $x \in G$ par x^{-1}.

La représentation linéaire de $\pi_1(X,x_0)^\circ$ dans V_0 ainsi obtenue est la représentation de monodromie. On verra plus loin en quoi elle dépend du choix du point base x_0.

Prenons maintenant $x_0 = 1$. Le groupe d'homotopie $\pi_1(X,x_0)$ est monogène infini et la classe du lacet déjà étudié $\gamma_0(t) = e^{2\imath\pi t}$ en est un générateur. Plus précisément, tout lacet γ basé en 1 est homotope à γ_0^n, où n est l'indice de γ en 0 (le nombre de tours qu'il fait autour de 0). Ici γ_0^n désigne la puissance n-ème de γ_0 au sens de la composition des chemins [5]. Mais par ailleurs, il s'agit ici de lacets à valeurs dans le groupe topologique $\mathbf{C}^*$ et, dans ce cas, ce composé itéré est homotope au lacet $t \mapsto (\gamma_0(t))^n$ (voir [17], chap. V, §5),

[3] Chaque telle solution est considérée sur un tel voisinage, sans qu'il soit besoin de fixer celui-ci : on considère en fait le germe. On en verra plus tard la définition.

[4] Par exemple, [11] donne l'écriture opposée pour la loi de composition dans $\pi_1(X,x_0)$, mais nous nous en abstiendrons.

[5] La composition des chemins n'est pas associative : elle ne l'est qu'à homotopie près. On ne peut donc pas vraiment définir les puissances dont on parle ici, mais leurs *classes d'homotopie* sont bien définies

c'est-à-dire au lacet $t \mapsto e^{2\imath\pi nt}$.

En tout cas, la représentation de monodromie est tout entière "codée" par l'image du générateur $\overline{\gamma_0}$ de $\pi_1(X,x_0)$, qui n'est autre que l'automorphisme $f \mapsto e^{2\imath\pi\alpha}$ de V_0. Modulo l'identification canonique de $Aut_{\mathbf{C}}(V_0)$ avec $\mathbf{C}^*$, cet automorphisme s'identifie à $e^{2\imath\pi\alpha} \in \mathbf{C}^*$.

Exercice 1.1.17 Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que z^α soit uniforme sur $\mathbf{C}^*$, autrement dit, pour qu'elle y admette un prolongement analytique.
Indication : il faut et il suffit que la représentation de monodromie agisse trivialement sur cet élément ; cela conduit à une condition sur α.

Exercice 1.1.18 Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que z^α n'ait qu'un nombre fini de transformées par l'action de monodromie. Vérifier que cela se produit si et seulement si z^α est une fonction algébrique. On pourra utilement comparer cela à [42] et à [1], chap. 8, §2 ; voir aussi [27].

Posons, pour tout ouvert U de X :

$$Sol(U) = \{ f \in \mathcal{O}(U) \;/\; zf' = \alpha f \}.$$

On obtient ainsi un *faisceau de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels sur l'espace topologique* X. Essentiellement (une définition précise sera donnée plus loin), cela signifie que l'on peut restreindre un élément de $Sol(U)$ en un élément de $Sol(V)$ lorsque $V \subset U$, et que, si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de U, toit $f \in Sol(U)$ est déterminé par ses restrictions aux U_i, auxquelles on demande seulement d'être compatibles deux à deux sur les $U_i \cap U_j$: on dit qu'une section de Sol sur U s'obtient par recollement à partir de ses restrictions.

Par ailleurs, le faisceau Sol est localement constant ; on dit aussi que c'est un système local de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Cela signifie que l'espace topologique X est recouvert par des ouverts U tels que la restriction du faisceau Sol à U est un faisceau constant. Il y a une définition générale de cette notion, mais, dans notre cas, on peut la formuler de la manière équivalente suivante : si $W \subset V$ sont deux ouverts connexes non vides de U, la restriction $Sol(V) \to Sol(W)$ est un isomorphisme.

Exercice 1.1.19 Démontrer soigneusement que Sol est bien un système local.
Indication : on prendra pour recouvrement d'ouverts de $\mathbf{C}^*$ *celui formé de* $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ *et de* $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$.

Exercice 1.1.20 Vérifier que, pour tout ouvert simplement connexe U, la restriction du faisceau Sol à U est un faisceau constant (au sens qui a été donné ci-dessus). Vérifier également que l'on obtient un tel ouvert en opérant une coupure de 0 à ∞ dans $\mathbf{C}$: on choisit un chemin simple γ de 0 à ∞ dans $\mathbf{S}$, et l'on pose $U = \mathbf{S} \setminus \mathrm{image}(\gamma)$.

1.1.4 Solutions au voisinage de $\infty \in \mathbf{S}$

Pour étudier une équation différentielle au voisinage de $\infty \in \mathbf{S}$, on change de carte : on se restreint à l'ouvert $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{S} \setminus \{0\}$ de $\mathbf{S}$, sur lequel on utilise la carte $w = 1/z$.

Pratiquement, le plus simple est de poser $w = 1/z$ et $g(w) = f(z) = f(1/w)$, d'où $w^2 g'(w) = -f'(1/w)$. L'équation différentielle $zf'(z) = \alpha f(z)$ équivaut donc à l'équation différentielle $wg'(w) = -\alpha g(w)$ (calcul facile). Cette dernière est régulière en tout point $w \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{C}_\infty$: c'est compatible avec l'étude qui précède !

La même étude montre que, si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, il n'y a pas de solution uniforme sur $\mathbf{C}^*$. Le lacet fondamental $w = e^{2\imath\pi t}$ induit l'automorphisme de monodromie de rapport $e^{-2\imath\pi\alpha}$. Mais c'est bien normal, parce qu'il s'agit en fait du lacet γ_0^{-1} ! La topologie de $\mathbf{S}$ imposait que la singularité en 0 soit compensée en ∞.

1.2 Un exemple de fonction algébrique : $\sqrt{z}+\sqrt{1-z}$

Première méthode : via le théorème des fonctions implicites

Elle s'appliquerait à l'identique (avec toutefois des calculs plus compliqués) à toute fonction de la forme $z^\alpha+(1-z)^\beta$, avec $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$.

Exercice 1.2.1 Le polynôme minimal de $\sqrt{z}+\sqrt{1-z}$ sur $\mathbf{C}(z)$ est $P(w,z)=w^4-2w^2+(4z^2-4z+1)$. Son discriminant est (sauf erreur) $4^6(z-z^2)^2(1-2z)^2$.

Les singularités sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire les points où l'on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites, sont 0, 1 et $1/2$.

Exercice 1.2.2 Vérifier que $\infty\in\mathbf{S}$ est également une singularité.

A priori, on devrait donc prendre $X=\mathbf{C}\setminus\{0,1,1/2\}$. En fait, il découle de l'étude précédente que $1/2$ est une *singularité apparente*, qui n'a pas d'effet sur la monodromie : le prolongement analytique le long d'un petit lacet autour de $1/2$ ne modifie ni $\sqrt{z}$ ni $\sqrt{1-z}$.

Le groupe fondamental $\pi_1(X,x_0)$ est librement engendré par trois générateurs. Prenons, par exemple, $x_0=\imath$. On introduit trois lacets γ_0, $\gamma_{1/2}$ et γ_1 de base x_0, chaque γ_a ayant pour indice 1 par rapport à a et 0 par rapport aux deux autres singularités (par exemple, on peut prendre γ_a rectiligne jusque tout près de a, puis parcourant un petit cercle de centre a une fois dans le sens direct, puis revenant le long du segment de départ). Alors $\pi_1(X,x_0)$ admet pour générateurs γ_0, $\gamma_{1/2}$ et γ_1 et ceux-ci ne satisfont aucune relation non triviale.

La fonction $\sqrt{z}+\sqrt{1-z}$ est bien définie sur $\overset{\circ}{D}(1/2,1/2)$ (on pourra calculer une série entière qui y converge) et admet quatre images distinctes par prolongement analytique : les fonctions $\pm\sqrt{z}\pm\sqrt{1-z}$. Le groupe $\pi_1(X,x_0)$ opère à droite sur cet ensemble, mais $\overline{\gamma_{1/2}}$ est dans le noyau de cette action. C'est donc le groupe quotient de $\pi_1(X,x_0)$ par le sous-groupe distingué engendré par $\overline{\gamma_{1/2}}$ qui opère vraiment ; il est isomorphe à $\pi_1(\mathbf{C}\setminus\{0,1\},x_0)$ et librement engendré par les classes d'homotopie des deux lacets γ_0 et γ_1. On vérifie sans peine que les actions de $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{\gamma_1}$ sont involutives, non triviales et commutent : le groupe de monodromie est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 1.2.3 Décrire la surface de Riemann de cette fonction.
Indication : se référer à [1], chap. 8, §2 ou bien à [27], chap. 4.

Deuxième méthode : étude locale et globale d'une équation différentielle

On peut, pour le même prix, étudier plus généralement la fonction $f(z)=z^\alpha+(1-z)^\beta$, avec $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$. Sous cette forme, elle est bien définie pour $z,1-z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$, soit $z\in\mathbf{C}\setminus(]-\infty,0[\cup]1;+\infty[)$.

Exercice 1.2.4 En donner un développement en série entière au voisinage de $1/2$. Prévoir *a priori* le rayon de convergence de celui-ci.

Comme toutes les dérivées de la fonction z^α (resp. de la fonction $(1-z)^\beta$) appartiennent au $\mathbf{C}(z)$-espace vectoriel de dimension 1 de base z^α (resp. de base $(1-z)^\beta$), toutes les dérivées de f appartiennent au $\mathbf{C}(z)$-espace vectoriel de dimension 2 de base $(z^\alpha,(1-z)^\beta)$, et l'on sait *a priori* que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients rationnels.

Exercice 1.2.5 Déterminer cette équation et ses singularités.
Indication : éliminer z^α *et* $(1-z)^\beta$ *du système de relations :*

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^\alpha + (1-z)^\beta \\
f'(z) &= \frac{\alpha}{z} z^\alpha - \frac{\beta}{1-z}(1-z)^\beta \\
f''(z) &= \frac{\alpha-\alpha^2}{z^2} z^\alpha + \frac{\beta-\beta^2}{(1-z)^2}(1-z)^\beta.
\end{aligned}$$

On peut trouver sans calcul l'action de monodromie (et donc tous les prolongements analytiques de f). Les seules singularités dans $\mathbf{C}$ de notre équation différentielle sont 0 et 1. On peut donc ici choisir comme point-base $x_0 = 1/2$. Le groupe $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, x_0)$ et librement engendré par les classes d'homotopie des deux lacets γ_0 et γ_1 (attention ! ce ne sont pas les mêmes qu'auparavant) définis par les formules :

$$\begin{aligned}
\gamma_0(t) &= \frac{1}{2} e^{2\imath\pi t} \\
\gamma_1(t) &= 1 - \frac{1}{2} e^{2\imath\pi t}.
\end{aligned}$$

Soit $D = \mathring{D}(1/2, 1/2)$. Sur D, les deux fonctions $f_\alpha = z^\alpha_{|D}$ et $g_\beta = (1-z)^\beta_{|D}$ sont définies et holomorphes et forment une base de $Sol(D)$. De plus, il découle de l'étude faite en 1.1 que les prolongements analytiques sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
f_\alpha \cdot \overline{\gamma_0} &= e^{2\imath\pi\alpha} f_\alpha \\
f_\alpha \cdot \overline{\gamma_1} &= f_\alpha \\
g_\beta \cdot \overline{\gamma_0} &= g_\beta \\
g_\beta \cdot \overline{\gamma_1} &= e^{2\imath\pi\beta} g_\beta
\end{aligned}$$

Finalement, on décrit la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, x_0)^\circ$ dans $Sol(D)$ en exprimant les images des générateurs $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{\gamma_1}$ de $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, x_0) = \mathbf{Z}\overline{\gamma_0} * \mathbf{Z}\overline{\gamma_1}$ dans $Aut_{\mathbf{C}}(Sol(D))$ via leurs matrices dans la base (f_α, g_β) : on a donc un anti-homomorphisme de $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, x_0)$ dans $GL_2(\mathbf{C})$ défini par :

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma_0} &\mapsto \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\overline{\gamma_1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\beta} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2.6 En déduire la structure du groupe de monodromie.
Indication : c'est le produit de deux groupes monogènes ou cycliques (selon la rationnalité des exposants).

Exercice 1.2.7 Montrer que la représentation de monodromie est ici somme directe de deux représentations de dimension 1.

1.3 Génèse d'un héros : le logarithme

Le point de départ est la fonction exponentielle, $z \mapsto e^z$ (voir le prologue de [44] pour l'essentiel sur cette fonction). La fonction exponentielle de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$ est surjective et non injective ; on ne peut donc lui trouver de réciproque (la formule $g(e^w) = w$ conduit immédiatement à une contradiction si on l'applique à $w + 2\imath\pi$), mais on peut espérer lui trouver une section : en fait, la surjectivité entraine l'existence d'une application $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ telle que $\forall w \in C^*$, $e^{f(w)} = w$.

Exercice 1.3.1 Il n'y a aucune section continue sur $\mathbf{C}^*$.
Indication : si l'on supposait $e^{f(w)} = w$, on aurait $f(e^z) - z$ constant par connexité de $\mathbf{C}$ et discrétude de $2\imath\pi\mathbf{Z}$.

On va donc reprendre la démarche : définition locale, puis prolongement analytique.

Première méthode : via le théorème d'inversion locale

On obtient ainsi, sur tout disque assez petit de $\mathbf{C}^*$, une fonction logarithme entièrement déterminée par l'image du centre du disque (qui doit, bien sûr, être un antécédent de ce centre par la fonction exponentielle).

Deuxième méthode : par intégration

L'égalité $e^{f(w)} = w$ entraine facilement que $f' = 1/w$. On pose donc $\log z = \int_1^z dt/t$. Mais, pour calculer cette intégrale, il faut choisir un chemin de 1 à z dans $\mathbf{C}^*$. Le théorème des résidus de Cauchy garantit que l'intégrale dépend seulement de la classe d'homotopie (dans $\mathbf{C}^*$ et à points base fixés) de ce chemin. D'autre part, si l'on prend deux chemins non homotopes, ils définissent un lacet γ basé en 1 dans $\mathbf{C}^*$ et la différence des deux intégrales ainsi calculées vaut (toujours d'après le théorème des résidus) : $2\imath\pi\, Ind_0(\gamma)$.

Troisième méthode : par résolution d'une équation différentielle

L'équation $zf'(z) = 1$ satisfaite par le logarithme entraine $zf'' + f' = 0$ qui a l'avantage d'être homogène : ses solutions holomorphes sur un ouvert $U \in \mathbf{C}^*$ forment donc un espace vectoriel $Sol(U)$.

Exercice 1.3.2 Expliciter $Sol(\mathbf{C}^*)$.

On définira le logarithme comme la solution f de cette équation différentielle soumise aux conditions initiales : $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$.

Au voisinage de 1, on écrit f comme série entière :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n (z-1)^n.$$

L'équation différentielle se traduit par la relation :

$$\forall n \geq 0 \ , \ (n+2) f_{n+2} + (n+1) f_{n+1} = 0,$$

qui est une relation de récurrence à deux pas. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des séries formelles solution est donc de dimension 2, et l'application $f \mapsto (f_0, f_1) = (f(1), f'(1))$ est un isomorphisme avec $\mathbf{C}^2$. On produit une base comme suit :

1. Avec $(f_0, f_1) = (1, 0)$, on obtient $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n = 0$, soit $f(z) = 1$ (rayon de convergence infini).
2. Avec $(f_0, f_1) = (0, 1)$, on obtient $f_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n = (-1)^{n-1}/n$, soit une série de rayon de convergence 1 qui est le développement bien connu de $\log(1 + (z-1))$.

Finalement, toutes les solutions formelles sont convergentes et l'on a un isomorphisme $f \mapsto (f(1), f'(1))$ de $Sol(\overset{\circ}{D}(1,1))$ avec $\mathbf{C}^2$; la solution $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (z-1)^n/n$ est celle qui satisfait aux conditions initiales que nous avons imposées.

On remarque que $f(z)$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si $f(z/z_0)$ l'est, ce qui permet d'étendre le résultat à tous les disques $\overset{\circ}{D}(z_0, |z_0|)$. Comme pour les caractères, on prouve l'existence d'un unique prolongement analytique de $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (z-1)^n/n$ à l'ouvert simplement connexe $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$: on le note $\log(z)$, c'est la *détermination principale du logarithme*.

Exercice 1.3.3 Pour $|\mathrm{Im}(w)| < \pi$, $\log(e^w) = w$. En particulier, $\log(\pm\imath) = \pm\imath\pi/2$.

Exercice 1.3.4 Sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on a $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

Exercice 1.3.5 Soit $a \in \mathbf{C}^*$. Etudier $\log(az) - \log(z)$.

Pour résumer, Les espaces $Sol(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$ et $Sol(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+)$ ont respectivement pour bases $(1, \log(z))$ et $(1, \log(-z))$; et, pour tout ouvert connexe non vide U inclus dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ (resp. dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$), la restriction de $(1, \log(z))$ (resp. de $(1, \log(-z))$) est une base de $Sol(U)$.

Exercice 1.3.6 Prouver cette toute dernière affirmation.
Indication : c'est une famille libre parce que l'application de restriction est injective (unicité du prolongement analytique). Le point délicat est que $\dim_{\mathbf{C}} Sol(U) \leq 2$ *: c'et un cas particulier du lemme du wronskien qui sera démontré en 2.1.3. Ici, on peut choisir une famille libre* (f, g) *de* $Sol(U)$ *(par exemple, la restriction de la base* $(1, \log z)$*, prendre une solution quelconque* $h \in \mathcal{O}(U)$ *de l'équation différentielle* $zh'' + h' = 0$*, résoudre le système :*

$$\begin{cases} uf + vg = h \\ uf' + vg' = h' \end{cases},$$

et chercher enfin à montrer que les fonctions u,v sont constantes.

1.3.1 L'action du groupe fondamental

On reprend les notations : $D_k = \overset{\circ}{D}(e^{2k\imath\pi/4}, 1)$, $V_k = Sol(D_k)$ (pour $k = 0, 1, 2, 3$). Comme précédemment, il y a des isomorphismes canoniques restriction-prolongement entre les espaces associés à deux disques consécutifs. On considère particulièrement deux isomorphismes ; ce sont les composés : $\Phi_+ : V_0 \to V_1 \to V_2$ et $\Phi_- : V_0 \to V_3 \to V_2$, de sorte que l'automorphisme de monodromie associé au lacet $\gamma(t) = e^{2\imath\pi t}$ agit sur V_0 comme $\Phi = (\Phi_-)^{-1} \circ \Phi_+ \in Aut_{\mathbf{C}}(V_0)$. Pour décrire Φ_+, Φ_- et Φ, on va utiliser la base $(1, \log(z))$ de V_0 et la base $(1, \log(-z))$ de V_2 (on devrait plutôt écrire $\log_{|D_0}$, etc ..., mais l'écriture simplifiée ne crée pas d'ambiguité).

Soient M_+ et M_- les matrices respectives de Φ_+ et de Φ_- relativement à ces bases : autrement dit, Φ_+ envoie $(1, \log(z))$ sur $(1, \log(-z))M_+$ et Φ_- envoie $(1, \log(z))$ sur $(1, \log(-z))M_-$. Si l'on fait la promenade de D_0 vers D_2 en passant par le demi-plan supérieur $\mathcal{H}$, $(1, \log(z))$ est se prolonge donc en $(1, \log(-z))M_+$. Si l'on fait la promenade de D_2 vers D_0 par le demi-plan inférieur $-\mathcal{H}$, $(1, \log(-z))M_-$ se prolonge en $(1, \log(z))$, donc, par linéarité du prolongement analytique, $(1, \log(-z))$ se prolonge en $(1, \log(z))M_-^{-1}$, donc, toujours par linéarité, $(1, \log(-z))M_+$ se prolonge en $(1, \log(z))M_-^{-1}M_+$. Ainsi, Φ est l'automorphisme qui envoie la base $(1, \log(z))$ de V_0 sur la base $(1, \log(z))M_-^{-1}M_+$, autrement dit, la matrice de Φ dans cette base est $M = M_-^{-1}M_+$.

Pour déterminer M_+ et M_-, il faut comparer les deux bases $(1, \log(z))$ et $(1, \log(-z))$ de $Sol(\mathcal{H})$, et de même pour $Sol(-\mathcal{H})$. Pour cela, les valeurs prises en un point (par exemple $\pm\imath$) ne suffisent plus car une solution de l'équation différentielle n'est pas déterminée par une condition initiale unique ; il faut les conditions initiales complètes : valeurs de la fonction et de sa dérivée. On écrit donc :

$$\begin{aligned} (1, \log z)(\imath) &= (1, \log(-z))(\imath)\, M_+ \\ (1, \log z)'(\imath) &= (1, \log(-z))'(\imath)\, M_+, \end{aligned}$$

ce qui nous donne (en utilisant les valeurs de $\log(\pm\imath)$ calculées en exercice) :

$$M_+ = \begin{pmatrix} 1 & \imath\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$\begin{array}{rcl}(1,\log z)(-\imath) & = & (1,\log(-z))(-\imath)\, M_- \\ (1,\log z)'(-\imath) & = & (1,\log(-z))'(-\imath)\, M_-,\end{array}$$

ce qui nous donne :

$$M_- = \begin{pmatrix} 1 & -\imath\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Φ dans la base $(1,\log z)$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2\imath\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3.7 Décrire complètement l'action du groupe fondamental.

Exercice 1.3.8 Retrouver l'action du groupe fondamental sur z^α.
Indication : la relation $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ est préservée par prolongement analytique.

1.3.2 Ecriture sous forme de système

Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, on constate que $zf'' + f' = 0$ équivaut au système :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/z \end{pmatrix} X.$$

En fait, pour bien des systèmes qui nous intéressent (ceux qui sont fuchsiens en 0, voir chap. 2), il est plus commode d'introduire l'opérateur d'Euler $\delta = z\, d/dz$. On pose donc plutôt $X = \begin{pmatrix} f \\ \delta f \end{pmatrix}$. Notre équation différentielle devient $\delta^2 f = 0$, qui donne lieu au système :

$$\delta X = AX\ ,\ \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3.9 Montrer que, pour les fonctions holomorphes [6], les deux équations sont bien équivalentes.

Le théorème de Cauchy (pour les systèmes linéaires) garantit que, pour tout $z_0 \in \mathbf{C}^*$, il existe une unique *solution fondamentale matricielle* $\mathcal{X}$ telle que $\mathcal{X}(z_0) = I_2$. Toute solution (vectorielle) au voisinage de z_0 s'écrit alors $\mathcal{X}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{C}$.

On prouve l'existence de $\mathcal{X}$ au voisinage de $z_0 = 1$ par développement en série entière. On écrit :

$$\mathcal{X}(z) = I_2 + (z-1)\mathcal{X}_1 + \cdots\ ,\quad \text{les } \mathcal{X}_k \in M_2(\mathbf{C}).$$

Le système donne :

$$\forall k \geq 0\ ,\ (k+1)\mathcal{X}_{k+1} + k\mathcal{X}_k = A\mathcal{X}_k,$$

ce qui donne :

$$\forall k \geq 0\ ,\ \mathcal{X}_k = \frac{1}{k!} A(A - I_2)\cdots(A-(k-1)I_2),$$

[6] En fait, le passage de $\delta^2 f = 0$ à $zf'' + f' = 0$ comporte une division par z, qui ne pose pas de prolème dans l'anneau intègre des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe. Mais, pour des solutions *distributions*, on n'obtiendrait pas du tout le même espace de solutions : voir par exemple [36].

que l'on pourrait écrire $\mathcal{X}(z) = z^A$! Plus prosaiquement, du fait que $A^2 = 0$, on tire :

$$\forall k \geq 1 \; , \; \mathcal{X}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} A,$$

d'où :

$$\mathcal{X}(z) = I_2 + \log(z)A = \begin{pmatrix} 1 & \log(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de solutions vectorielles est donc formée des colonnes de $\mathcal{X}(z)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \log(z) \\ 1 \end{pmatrix}$: ce sont les $\begin{pmatrix} f \\ \delta f \end{pmatrix}$, où f parcourt la base $(1, \log(z))$ de V_0.

Exercice 1.3.10 Montrer que l'effet de la monodromie sur la base (f,g) mentionnée est décrit par la même matrice que son effet sur la famille $(\delta f, \delta g)$: multiplication à droite par M. Montrer que c'est aussi l'effet sur $\mathcal{X}(z)$.

1.3.3 Solution en $\infty \in \mathbf{S}$

On sait d'avance, par voie topologique, qu'il ne peut y avoir de solution définie au voisinage de $\infty \in \mathbf{S}$. En effet, la seule singularité serait alors 0 et le groupe de monodromie serait un quotient du groupe fondamental de $\mathbf{C}_\infty$ (basé en un point quelconque), lequel est trivial. On aurait donc un logarithme uniforme sur $\mathbf{C}_\infty$ sonc aussi sur $\mathbf{C}^*$, ce qui n'est point.

Pour étudier l'équation différentielle en $\infty \in \mathbf{S}$, on se place dans la carte $w = 1/z$. Pratiquement, on écrit la fonction f sous la forme $f(z) = g(w) = g(1/z)$. L'équation $zf'' + f' = 0$ équivaut (calcul facile) à $wg'' + g' = 0$. Une base de solutions dans un disque qui approche l'infini (par exemple le disque $|w-1| < 1$) est donc $(1, \log w)$. En fait, $\log(w) = \log(1/z) = -\log z +$ constante (la constante dépend de l'endroit où l'on se place) et le résultat était prévisible.

Exercice 1.3.11 Etudier l'action de monodromie sur $\mathbf{S}$.

Exercice 1.3.12 Comparer les opérateurs d'Euler $z\, d/dz$ et $w\, d/dw$.

Deux exercices plus substantiels

1.3.4 Equation d'ordre 1 sur S

Puisque $\mathcal{M}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}(z)$, l'équation a la forme $f' = af$, avec où $f \in \mathbf{C}(z)$. Quelle est la forme de l'équation en ∞ ? Quelles sont ses singularités sur $\mathbf{S}$?

Dans le cas spécial où $a(z) = \alpha(z - z_0)^k$, écrire l'équation en ∞. Vérifier que, si $k \neq -1$, il y a une seule singularité sur $\mathbf{S}$ (c'est z_0 ou ∞) et que le groupe de monodromie est alors trivial. Dans le cas où $k = -1$, on a un pôle simple en z_0 et un pôle simple en ∞ et la monodromie est celle d'un caractère.

Dans le cas général, décomposer la fraction rationnelle $a(z)$ en élément simples et montrer que les singularités qui contribuent à la monodromie sont les pôles à résidu non entier.
Indication : si $a = b + c$, on trouve les solutions sous la forme $f = gh$, où $g' = bg$ et $h' = ch$.

On sait que le groupe fondamental de $\mathbf{S} \setminus \Sigma$ (avec Σ une partie finie de $\mathbf{S}$) est engendré par les classes de lacets autour de chaque point de Σ, avec pour seule relation : le produit de ces lacets est l'élément neutre ; dit autrement, le lacet autour de ∞ est l'inverse du produit des autres. Cela se reflète dans la représentation ci-dessus grâce au théorème classique que la somme des résidus d'une forme différentielle méromorphe sur une surface de Riemann compacte (ici $\mathbf{S}$) est nulle.

1.3.5 Polylogarithmes

Il s'agit des fonctions :

$$\ln_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k},$$

où $k \in \mathbf{N}^*$. Pour $k = 1$, on reconnait $-\log(1-z)$, dont le comportement se déduit de ce qui précède. Le but de cet exercice est d'étudier le cas général. A défaut d'idée brillante (ce n'est pas facile !), on pourra consulter avec profit [10], [35] ou [23].

Chapitre 2

Equations et systèmes différentiels

2.1 Le faisceau des solutions d'une équation ou d'un système

2.1.1 Faisceaux de C-espaces vectoriels

Pour le formalisme général des faisceaux (dont nous n'avons d'ailleurs pas besoin), consulter [18].

Définition 2.1.1 Un faisceau $\mathcal{F}$ de **C**-espaces vectoriels sur un espace topologique X est constitué des données et des conditions suivantes :

- Pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U)$ est un **C**-espace vectoriel.
- Si $V \subset U$ sont deux ouverts de X, on se donne un morphisme d'espaces vectoriels $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$; ces morphismes sont appelés *morphismes de restriction*. On note souvent, pour abréger, $f_{|V} = \rho_V^U(f)$.
- Les morphismes de restrictions sont compatibles : quelque soit U, ρ_U^U est l'identité de $\mathcal{F}(U)$ et, si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts de X, on a $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.
- On a une propriété d'existence et d'unicité du recollement d'éléments locaux compatibles. Formellement, elle s'exprime comme suit : soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $U \subset X$. Soit

  $$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$$

  une famille compatible, c'est-à-dire telle que :

  $$\forall i, j \in I \ , \ \rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j).$$

  Alors, il existe un unique $f \in \mathcal{F}(U)$ qui est un recollement des f_i, autrement dit, tel que :

  $$\forall i \in I \ , \ \rho_{U_i}^U(f) = f_i.$$

  On remarquera que cette condition a un sens, en ce que, si l'on part de $f \in \mathcal{F}(U)$, la famille de ses restrictions $f_i = \rho_{U_i}^U(f)$ est bien compatible : cela découle de l'axiome précédent sur les faisceaux.

Un sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors un faisceau $\mathcal{F}'$ de vectoriels tel que chaque $\mathcal{F}'(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U)$ et que les morphismes de restriction de $\mathcal{F}'$ sont induits par les morphismes de restriction de $\mathcal{F}$.

On définit de façon analogue la structure moins riche de faisceau d'ensembles (les $\mathcal{F}(U)$ sont des ensembles et les ρ_V^U des applications) ; la structure plus riche de faisceau de **C**-algèbres (les $\mathcal{F}(U)$ sont des **C**-algèbres et les ρ_V^U des morphismes de **C**-algèbres) ; etc ... De même, si *truc* est une structure, on définit un sous-faisceau de *trucs* : chaque $\mathcal{F}'(U)$ est un sous-truc de $\mathcal{F}(U)$ et les morphismes de restriction sont compatibles.

Exercice 2.1.2 Soit X un espace topologique quelconque. On note $\mathcal{C}_X(U)$ la **C**-algèbre des fonctions continues sur l'ouvert U de X à valeurs dans **C** (par exemple) et, pour $f \in \mathcal{C}_X(U)$, $\rho_V^U(f)$ la restriction de la fonction f à l'ouvert $V \subset U$. Montrer que l'on obtient ainsi un faisceau de **C**-algèbres.

Exercice 2.1.3 Soit Ω une surface de Riemann, par exemple un ouvert de **S** ou de **C**. On note $\mathcal{O}_\Omega(U)$ la **C**-algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert U de Ω. Pour $f \in \mathcal{O}_\Omega(U)$, on note $\rho_V^U(f)$ la restriction de la fonction f à l'ouvert $V \subset U$. Montrer que l'on obtient ainsi un faisceau de **C**-algèbres.

Exercice 2.1.4 On prend Ω comme ci-dessus. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quelconque sur Ω et soient (U_i) les composantes connexes de l'ouvert U de Ω. Vérifier qu'elles sont ouvertes et que les $\rho_{U_i}^U$ induisent un isomorphisme de $\mathcal{F}(U)$ avec le produit des $\mathcal{F}(U_i)$.

Faisceaux de solutions

Les deux exemples fondamentaux pour nous sont donnés par les solutions d'équations et de systèmes différentiels.

Exemple 2.1.5 Soit Ω un ouvert de **S** et soient $a_1, \ldots, a_n$ des fonctions holomorphes sur Ω. Typiquement, les a_i seront des fonctions méromorphes sur **S** (c'est-à-dire, en fait, des fonctions rationnelles, puisque $\mathcal{M}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}(z)$) et l'on prendra pour Ω leur domaine de définition commun : $\Omega = \mathbf{S} \setminus \{ \text{pôles des } a_i \}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E_{\underline{a}}) \quad f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f = 0.$$

Pour tout ouvert U de Ω, on note $\mathcal{F}_{\underline{a}}(U)$ le **C**-espace vectoriel des solutions de $(E_{\underline{a}})$ sur U. En prenant pour $\rho_V^U(f)$ la restriction de la fonction f à l'ouvert $V \subset U$, on obtient un sous-faisceau de **C**-espaces vectoriels du faisceau $\mathcal{O}_\Omega$. Attention : ce n'est pas un sous-faisceau de **C**-algèbres !

Exemple 2.1.6 Soit Ω un ouvert de **S** et soit $A(z) \in M_n(\mathcal{O}(\Omega))$ une matrice carrée de fonctions holomorphes sur Ω. Typiquement, les coefficients $a_{i,j}$ de A seront des fonctions méromorphes sur **S** (donc des fonctions rationnelles) et l'on prendra pour Ω leur domaine de définition commun : $\Omega = \mathbf{S} \setminus \{ \text{pôles des } a_{i,j} \}$. On considère le système différentiel :

$$(S_A) \quad X' = AX.$$

Pour tout ouvert U de Ω, on note $\mathcal{F}_A(U)$ le **C**-espace vectoriel des solutions vectorielles de (E_A) sur U. En prenant pour $\rho_V^U(X)$ la restriction de la fonction vectorielle X à l'ouvert $V \subset U$, on obtient un sous-faisceau de **C**-espaces vectoriels du faisceau $\mathcal{O}_\Omega^n$.

Bien que le système (S_A) concerne des solutions X vectorielles, la relation $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$ garde un sens pour toute matrice à n lignes : elle signifie simplement que chaque colonne de $\mathcal{X}$ est une solution de (S_A). Dans ce cas, quelque soit le vecteur colonne $C \in \mathbf{C}^n$, la fonction vectorielle $X = \mathcal{X}C$ est encore une solution de (S_A). Nous serons spécialement intéressés par des solutions matricielles $\mathcal{X}$ carrées (donc des fonctions à valeurs dans $M_n(\mathbf{C})$).

Exercice 2.1.7 Démontrer soigneusement que $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et $\mathcal{F}_A$ sont bien des faisceaux d'espaces vectoriels sur Ω. *Indication : prendre son temps.*

Le lien entre les faisceaux $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et $\mathcal{F}_A$ (vectorisation des solutions d'équations) sera explicité plus loin. Pour les équations comme pour les systèmes, le théorème fondamental, dû à Cauchy, dit que, pour tous les ouverts connexes non vides U "assez petits" (cette expression sera précisée en 2.2), les espaces $\mathcal{F}_{\underline{a}}(U)$ (resp. $\mathcal{F}_A(U)$) sont tous de dimension n et que les morphismes de restriction entre ces espaces sont des isomorphismes. L'exercice qui suit donne la moitié facile de cette dernière propriété.

Exercice 2.1.8 On prend pour $\mathcal{F}$ l'un des faisceaux $\mathcal{O}_\Omega$, $\mathcal{F}_{\underline{a}}$, $\mathcal{F}_A$ définis ci-dessus. Montrer que, si U est un ouvert connexe de Ω et si V est un ouvert non vide de U, le morphisme $\rho_V^U(X)$ est injectif.
Indication : c'est le principe d'unicité du prolongement analytique.

Exercice 2.1.9 Reprendre la question précédente pour le faisceau $\mathcal{C}_X$.

2.1.2 Des équations aux systèmes

On sait, depuis le DEUG, vectoriser une solution f de l'équation $(E_{\underline{a}})$ pour obtenir une solution vectorielle X du système S_A ; on pose pour cela :

$$X_f = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

et l'on vérifie sans peine que f est solution de l'équation $(E_{\underline{a}})$ si et seulement si X_f est solution du système S_A de matrice :

$$A = A_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1.10 *Pour tout ouvert U de Ω, l'application $f \mapsto X_f$ définit un isomorphisme $\mathcal{F}_{\underline{a}}(U) \to \mathcal{F}_A(U)$.*

Preuve. - Le fait que l'application est bien définie, linéaire et injective est évident. Si X est une solution, il découle de la forme même de la matrice $A_{\underline{a}}$ qu'elle est de la forme X_f et que f est solution de l'équation. □

Proposition 2.1.11 *Les faisceaux $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et $\mathcal{F}_A$ sont isomorphes.*

Preuve. - Cela signifie simplement que les isomorphismes ci-dessus commutent aux morphismes de restriction, ce qui est clair. □

Considérons maintenant la question réciproque : la résolution d'un système (S_A) peut-elle se ramener à celle d'une équation $E_{\underline{a}}$?

Exemple 2.1.12 On part d'un système de rang 2 générique :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut au système d'équations :

$$\begin{cases} f' = af + bg \\ g' = cf + dg \end{cases}.$$

Supposons, par exemple, $b \neq 0$. On écrit alors $g = \frac{f'-af}{b}$, soit encore :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/b & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix},$$

et le système équivaut (sauf erreur) à l'équation $f'' + (-d-a-b'/b)f' + (ab'/b - a' - bc + ad)f = 0$. Ainsi les solutions de S_A sont de la forme FX_f où F est explicite et où f est solution d'une équation d'ordre 2.

Pour formaliser la transformation ci-dessus, nous introduisons la notion de *transformation de jauge* $X \mapsto FX$ qui transforme les solutions d'un système (S_A) en celles d'un système (S_B). Il faut noter que les calculs ont pu faire apparaitre des pôles supplémentaires (ici, les zéros de b), d'où la nécessité d'une définition qui englobe les transformations à coefficients méromorphes.

Définition 2.1.13 Si $F \in GL_n(\mathcal{M}(\Omega))$ (resp. $F \in GL_n(\mathcal{O}(\Omega))$) est une matrice inversible de fonctions méromorphes (resp. holomorphes), et si A est la matrice d'un système, on note $B = F[A]$ la matrice $F'F^{-1} + FAF^{-1}$. La matrice F est appelée *transformation de jauge* et les systèmes (S_A) et (S_B) sont dits méromorphiquement (resp. holomorphiquement) équivalents.

On montrera plus loin (2.2.3) qu'en fait tout système est équivalent à un système provenant d'une équation.

Exercice 2.1.14 Vérifier que $F[A] = B$ est la matrice du système dont $Y = FX$ est solution lorsque X est solution de S_A. De plus, si F est une transformation de jauge holomorphe sur Ω, les applications $X \mapsto FX$ définissent un isomorphisme des faisceaux $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_B$.

Des réciproques de ces assertions seront également données en 2.2.3.

Exercice 2.1.15 Vérifier que l'on obtient ainsi une opération à gauche du groupe des transformations de jauge sur le groupe des matrices, autrement dit : $I_n[A] = A$ et $F[G[A]] = (FG)[A]$.

Remarque 2.1.16 Si le système S_A admet pour solution matricielle une matrice inversible de fonctions $\mathcal{X}$, on voit que $\mathcal{X}[0] = A$: si l'on autorisait des transformations de jauges quelconques (au lieu de les vouloir méromorphes), il résulterait du théorème de Cauchy (prouvé en 2.2.2) que tous les systèmes seraient essentiellement équivalents.

2.1.3 Le lemme du wronskien

Nous allons prouver la moitié facile de la partie du théorème de Cauchy qui concerne les dimensions, à savoir la *majoration* de la dimension de l'espace des solutions sur un ouvert connexe. En fait, une fois admis le fait que $f' = 0 \Rightarrow f$ constante, c'est une propriété purement algébrique et elle sera prouvée dans cet esprit en exposé (voir 8.5) ; alors que l'égalité est un théorème d'existence (il y a "assez" de solutions) de nature analytique, que nous prouverons dans ce chapitre, en 2.2.

Proposition 2.1.17 *Soit U un ouvert connexe de Ω. Alors* $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}_{\underline{a}}(U) \leq n$.

Preuve. - Nous noterons, pour $N \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{O}_\Omega(U)$:

$$W_N(f_1, \ldots, f_N) = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_j & \cdots & f_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(i)} & \cdots & f_j^{(i)} & \cdots & f_N^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(N-1)} & \cdots & f_j^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{pmatrix},$$

la *matrice wronskienne* et $w_N(f_1, \ldots, f_N) = \det W_N(f_1, \ldots, f_N)$ le *déterminant wronskien* (ou wronskien tout court) des f_j. Il est clair que, si $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_{\underline{a}}(U)$, la dernière ligne de la matrice wronskienne $W_{n+1}(f_0, \ldots, f_n)$ est combinaison linéaire des précédentes (à coefficients les a_i). La proposition découle alors du lemme ci-dessous. $\square$

Lemme 2.1.18 *(du wronskien). Soient $f_1, \ldots, f_N$ des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe U. Alors $w_N(f_1, \ldots, f_N) = 0$ si et seulement si les f_i sont liés sur* $\mathbf{C}$.

Preuve. - Toute relation linéaire non triviale $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N = 0$ à coefficients constants : $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbf{C}$ entraine une relation similaire entre les dérivées i-èmes : $\forall i \geq 0$, $\lambda_1 f_1^{(i)} + \cdots + \lambda_N f_N^{(i)} = 0$; les colonnes de la matrice wronskienne $W_N(f_1, \ldots, f_N)$ sont alors liées et le wronskien est nul.

Supposons donc $w_N(f_1, \ldots, f_N) = 0$. Soit k le plus grand entier tel qu'il existe $f_{j_1}, \ldots, f_{j_k}$ de wronskien non nul : $w_k(f_{j_1}, \ldots, f_{j_k}) \neq 0$. On peut supposer $k \geq 1$, car $w_1(f) = f$ (et si l'un des f_j est nul, ils sont trivialement liés sur $\mathbf{C}$). Quitte à réindexer les f_j (ce qui ne fait que changer les signes des déterminants), on supposera donc que le sous-wronskien $w_k(f_1, \ldots, f_k)$ n'est pas identiquement nul et que $w_{k+1}(f_1, \ldots, f_k, f_j) = 0$ pour tout $j > k$; cette dernière égalité est d'ailleurs également vraie si $1 \leq j \leq k$ car elle concerne alors un déterminant ayant deux colonnes identiques.

La relation $w_{k+1}(f_1, \ldots, f_k, f) = 0$ est équivalente à une équation différentielle d'ordre k :

$$f^{(k)} + a_1 f^{(k-1)} + \cdots + a_k f = 0.$$

On le voit en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, puis en divisant par le coefficient de $f^{(k)}$, qui est $w_k(f_1, \ldots, f_k)$ (les a_i sont donc des fonctions méromorphes). En reprenant les notations antérieures, on a donc $X_f' = A_{\underline{a}} X_f$ pour toute telle fonction f. Cela vaut en particulier pour toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_N$. La *matrice* $\mathcal{X}$ dont les colonnes sont les X_{f_j} $1 \leq j \leq k$ vérifie donc la mme relation : $\mathcal{X}' = A_{\underline{a}} \mathcal{X}$; mais cette matrice n'est autre que la matrice wronskienne $W_k(f_1, \ldots, f_k)$, laquelle est inversible par hypothèse. Posons, pour simplifier les notations, $X = X_f$, $W = W_k(f_1, \ldots, f_k)$ et $A = A_{\underline{a}}$. On a donc $X' = AX$, $W' = AW$ et $X = WC$ pour un certain vecteur colonne de fonctions méromorphes. On en tire $WC' = (WC)' - W'C = X' - W'C = AX - AWC = 0$, d'où $C \in \mathbf{C}^n$ et l'on a démontré que toute fonction $f \in \{f_1, \ldots, f_N\}$ est combinaison linéaire à coefficients constants de $f_1, \ldots, f_k$. □

Corollaire 2.1.19 *Avec les notations du lemme, $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_1, \ldots, f_N)$. Avec les notations de la proposition, toute famille maximale de wronskien non nul dans $\mathcal{F}_{\underline{a}}(U)$ en est une base.* □

Exercice 2.1.20 Prouver l'analogue de la proposition pour les systèmes.

Exercice 2.1.21 A quelle condition le wronskien s'annule-t'il dans le cas de fonctions de classe $\mathbf{C}^{n-1}$ sur un intervalle de $\mathbf{R}$?
Indication : regarder [8], chapitre IV, §2, exercice 9.

2.2 Le théorème de Cauchy

2.2.1 Solutions fondamentales

Dans les définitions et les énoncés qui suivent, les conventions sont celles des exemples 2.1.5 et 2.1.6. De plus, on ne considère que des ouverts connexes $U \subset \Omega$.

Définition 2.2.1 On appelle *base fondamentale de solutions* de l'équation $(E_{\underline{a}})$ sur un ouvert connexe $U \subset \Omega$ une famille $\mathbf{C}$-libre $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_\Omega(U)^n$ de solutions holomorphes sur U de $(E_{\underline{a}})$.

Il découle du lemme du wronskien qu'une famille $\mathbf{C}$-libre de solutions ne peut comporter plus de n éléments et qu'une base de solutions fondamentales, *si elle existe*, est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}_{\underline{a}}(U)$.

Exercice 2.2.2 Soit $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_\Omega(U)^n$ une famille de solutions de $(E_{\underline{a}})$ et soit w le wronskien de celles-ci. Vérifier que $w' = -a_1 w$ et en déduire que, soit w est identiquement nul, soit il ne s'annule pas.
Indication : on peut (par exemple) poser $f(t) = w(\gamma(t))$, où γ est un chemin continument différentiable d'un point $z_0 \in U$ où w s'annule à un point $z \in U$ quelconque. On montre alors que :

$$w(z) = w(z_0)\, e^{-\int_0^1 a_1'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt}.$$

Proposition 2.2.3 *Soit $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}_\Omega(U)^n$ une famille de solutions de $(E_{\underline{a}})$ sur l'ouvert connexe U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) C'est une base de solutions fondamentales.
(ii) L'évaluation en un point de U de la matrice wronskienne de $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbf{C}^n$.
(iii) L'évaluation en tout point de U de la matrice wronskienne de $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbf{C}^n$.

Preuve. - C'est une conséquence facile de l'exercice précédent. $\square$

Définition 2.2.4 On appelle *solution (matricielle) fondamentale* du système (S_A) sur un ouvert connexe $U \subset \Omega$ une matrice inversible $\mathcal{X} \in GL_n(\mathcal{O}_\Omega(U))$ de fonctions holomorphes sur U qui est de plus solution (matricielle) de (S_A).

S'il existe une solution (matricielle) fondamentale $\mathcal{X}$, toute solution vectorielle $X \in \mathcal{O}_\Omega(U)^n$ peut s'écrire $X = \mathcal{X}C$ avec $C \in \mathcal{O}_\Omega(U)^n$. Mais les relations $X' = AX$ et $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$ entrainent $C' = C$, d'o'u $C \in \mathbf{C}^n$. Autrement dit, les colonnes de $\mathcal{X}$ forment alors une base de $\mathcal{F}_A(U)$, et $C \mapsto \mathcal{X}C$ réalise un isomorphisme $\mathbf{C}^n \to \mathcal{F}_A(U)$.

Exercice 2.2.5 Soit $\mathcal{X} \in M_n(\mathcal{O}_\Omega(U))$ une solution matricielle de (S_A) et soit w son déterminant. Vérifier que $w' = Tr(A)w$ et en déduire que, soit w est identiquement nul, soit il ne s'annule pas.

Proposition 2.2.6 *Soit $\mathcal{X} \in M_n(\mathcal{O}_\Omega(U))$ une solution matricielle de (S_A) sur l'ouvert connexe U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) C'est une solution fondamentale.
(ii) Son évaluation en un point de U est un élément de $GL_n(\mathbf{C})$.
(iii) Son évaluation en tout point de U est un élément de $GL_n(\mathbf{C})$.

Preuve. - C'est une conséquence facile de l'exercice précédent. $\square$

2.2.2 Le théorème de Cauchy

Le théorème qui suit est un cas particulier du théorème complet de Cauchy, qui embrasse le cas des équations différentielles non linéaires ; pour une version générale, voir (par exemple) les *théorèmes d'existence* dans [12].

Théorème 2.2.7 *(Cauchy).*
(i) Tout $z_0 \in \Omega$ admet un voisinage ouvert connexe $U \subset \Omega$ sur lequel il existe une solution fondamentale $\mathcal{X}$ telle que $\mathcal{X}(z_0) = I_n$. En particulier, les applications

$$\begin{cases} \mathcal{F}_A(U) \to \mathbf{C}^n \\ X \mapsto X(z_0) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \mathbf{C}^n \to \mathcal{F}_A(U) \\ C \mapsto \mathcal{X}C \end{cases}$$

sont alors des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.
(ii) Tout $z_0 \in \Omega$ admet un voisinage ouvert connexe $U \subset \Omega$ sur lequel il existe une base fondamentale $(f_1, \dots, f_n)$ dont la matrice wronskienne évaluée en z_0 est la matrice identité : $W(f_1, \dots, f_n)(z_0) = I_n$. En particulier, les applications

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\underline{a}}(U) \to \mathbf{C}^n \\ f \mapsto (f(z_0), f'(z_0), \dots, f^{(n-1)}(z_0)) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \mathbf{C}^n \to \mathcal{F}_{\underline{a}}(U) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{cases}$$

sont alors des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Preuve. - La deuxième assertion est évidemment une conséquence de la première, dont le seul point substantiel est l'existence d'une solution matricielle holomorphe en z_0 telle que $\mathcal{X}(z_0) = I_n$; on peut ensuite prendre pour U un disque centré en z_0 sur lequel $\det \mathcal{X}$ ne s'annule pas. Cette existence est établie dans le lemme qui suit. $\square$

Lemme 2.2.8 *Il existe une unique solution matricielle formelle de* (S_A) *:*

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{X}_k (z - z_0)^k \quad (\text{où les } \mathcal{X}_k \in M_n(\mathbf{C}))$$

telle que $\mathcal{X}_0 = I_n$. *Le rayon de convergence de cette série est* > 0.

Preuve. - On écrit d'abord :

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} A_k (z - z_0)^k \quad (\text{série entière à coefficients matriciels}).$$

Le système (S_A) équivaut alors à :

$$\forall k \geq 0 \ , \ (k+1)\mathcal{X}_{k+1} = A_0 \mathcal{X}_k + \cdots + A_k \mathcal{X}_0.$$

On définit donc les $\mathcal{X}_k$ par récurrence :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 = I_n \\ \forall k \geq 0 \ , \ \mathcal{X}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(A_0 \mathcal{X}_k + \cdots + A_k \mathcal{X}_0 \right). \end{cases}$$

Cela établit l'existence et l'unicité d'une solution formelle. Pour prouver la convergence, on va majorer la taille des coefficients. On choisit donc sur $M_n(\mathbf{C})$ une norme subordonnée à une norme de $\mathbf{C}^n$. Puisque A est holomorphe sur Ω, la série $\sum_{k \geq 0} A_k (z - z_0)^k$ a un rayon de convergence > 0. Il existe donc $C, R > 0$ tels que $\forall k \geq 0 \ , \ ||A_k|| < CR^{-k}$. On peut de plus choisir R (assez petit) tel que $CR < 1$. On a donc :

$$\forall k \geq 0 \ , \ ||\mathcal{X}_{k+1}|| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i+j=k} ||\mathcal{X}_i|| \, CR^{-j},$$

et l'on voit (facilement) par récurrence que $\forall k \geq 0 \ , \ ||\mathcal{X}_k|| < R^{-k}$. □

Exercice 2.2.9 Démontrer *a posteriori* (c'est-à-dire après avoir lu ce chapitre du cours) que le rayon de convergence de $\mathcal{X}$ est au moins égal à celui de A. Peut-il être strictement plus grand ?

Exercice 2.2.10 Démontrer directement le théorème de Cauchy pour une équation d'ordre n (cela a pour but d'inspirer du respect pour la *commodité* de l'écriture matricielle).

2.2.3 Le lemme du vecteur cyclique

Avant de l'aborder, on va profiter de l'existence de solutions fondamentales pour justifier un peu mieux la notion de transformation de jauge.

Proposition 2.2.11 *Soient* (S_A) *et* (S_B) *deux systèmes sur* Ω. *Alors tout isomorphisme entre les faisceaux* $\mathcal{F}_A$ *et* $\mathcal{F}_B$ *est de la forme* $X \mapsto FX$, *où* F *est une transformation de jauge holomorphe de* A *dans* B.

Preuve. - Commençons par nous restreindre à un ouvert connexe U sur lequel les deux faisceaux sont constants, ce qui revient à dire que les systèmes (S_A) et (S_B) y admettent des solutions fondamentales respectives $\mathcal{X}_U$ et $\mathcal{Y}_U$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(U) &= \mathcal{X}_U \, \mathbf{C}^n \\ \mathcal{F}_B(U) &= \mathcal{Y}_U \, \mathbf{C}^n. \end{aligned}$$

Un isomorphisme $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ est de la forme $C \mapsto MC$, avec $M \in GL_n(\mathbf{C})$; un isomorphisme $\mathcal{F}_A(U) \to \mathcal{F}_B(U)$ est donc de la forme $\mathcal{X}_U C \mapsto \mathcal{Y}_U MC$, c'est-à-dire de la forme $X \mapsto F_U X$, où $F_U = \mathcal{Y}_U M (\mathcal{X}_U)^{-1}$. La relation

$F_U \mathcal{X}_U = \mathcal{Y}_U M$ entraine, par dérivation (et multiplication à droite par $(\mathcal{X}_U)^{-1}$) que $F_U[A] = B$.

Les isomorphismes $\mathcal{F}_A(V) \to \mathcal{F}_B(V)$ où V est un ouvert connexe non vide de U sont nécessairement de la même forme, avec une transformation de jauge F_V qui est la restriction de F_U à V : cela, parce que les restrictions de $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_B$ à U sont des faisceaux constants. En particulier, si U' est un autre ouvert connexe sur lequel les deux faisceaux sont constants, les restrictions de F_U et $F_{U'}$ à $U \cap U'$ coïncident. Par recollement, on obtient le F désiré. □

On va maintenant établir un cas particulier du lemme vecteur cyclique qui sera démontré de manière purement algébrique en exposé (voir 8.5). En substance, ce résultat remonte à Birkhoff.

Théorème 2.2.12 *Tout système à coefficients méromorphes sur l'ouvert connexe Ω y est méromorphiquement équivalent au système obtenu en vectorisant une équation.*

Preuve. - On écrit $F' + FA = BF$, où B est de la forme $A_{\underline{a}}$ (les a_i étant inconnus). Soient $F_0, \ldots, F_{n-1}$ les lignes de F. La relation ci-dessus dit que $F_{i+1} = F_i' + F_i A$ pour $i = 0, \ldots, n-2$, plus une autre relation (fournie par l'égalité des dernières lignes) qui est de toutes façons conséquence de la condition que le déterminant de $F_0, \ldots, F_{n-1}$ n'est pas nul. Le calcul un peu mystérieux qui va suivre est motivé par le fait que la relation de récurrence ci-dessus est équivalente à la relation $(F_i \mathcal{X})' = F_{i+1} \mathcal{X}$ si $\mathcal{X}$ est une solution fondamentale de S_A, c'est-à-dire une matrice inversible de fonctions telle que $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$. Grâce au théorème de Cauchy, on choisit donc une telle solution fondamentale telle que $\mathcal{X}(z_0) = I_n$ où $z_0 \in \Omega$ est un point régulier de A. Soit $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{-1}$: on voit que $\mathcal{Y}(z_0) = I_n$ et que $\mathcal{Y}' = -\mathcal{Y}A$.

On note maintenant $\Gamma = (1, z - z_0, \ldots, (z - z_0)^{n-1}/(n-1)!)$. Posons $F_0 =$ la troncature de $\Gamma\mathcal{Y} \pmod{(z - z_0)^n}$ et, pour $i = 0, \ldots, n-2$, $F_{i+1} = F_i' + F_i A$. On vérifie par récurrence que $F_k \equiv \Gamma^{(k)} \mathcal{Y} \pmod{(z - z_0)^{n-k}}$; en particulier, pour $k = 0, \ldots, n-1$, $F_k(z_0)$ est le $(k+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^n$. La matrice F est à coefficients dans la $\mathbf{C}[z]$-algèbre engendrée par les coefficients de A et de ses dérivées et, en tout cas, méromorphe ; par ailleurs $F(z_0) = I_n$, elle est donc inversible. □

En réalité, le lemme du vecteur cyclique est de nature purement algébrique et ne dépend pas du théorème de Cauchy. Nous le retrouverons sous une forme plus générale dans l'exposé correspondant (voir 8.5) , mais en voici une approche à la main.

Exercice 2.2.13 Si l'on pose $X_0 = I_n$ et $X_{i+1} = AX_i - X_i'$, la matrice $\mathcal{X} = \sum_{k \leq 0} X_k (z - z_0)^k / k!$ est une solution fondamentale formelle. De même, on peut poser $Y_0 = I_n$, $Y_{i+1} = Y_i' + Y_i A$ et $\mathcal{Y} = \sum_{k \leq 0} Y_k (-1)^k (z - z_0)^k / k!$. En déduire une nouvelle définition possible de F_0.

2.3 Conséquences formelles du théorème de Cauchy

2.3.1 Le système local des solutions

Nous allons donner des définitions des notions de faisceau constant et localement constant adaptées à notre contexte. Pour les "vraies" définitions (équivalentes aux notres dans le cas particulier traité ici), voir, par exemple [11] ou [45].

Définition 2.3.1 (système local).
(i) Le faisceau $\mathcal{G}$ sur l'espace connexe U est dit constant si, quelque soit l'ouvert connexe non vide $V \subset U$, le morphisme de restriction $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ est un isomorphisme.
(ii) Le faisceau $\mathcal{F}$ sur l'espace X est dit localement constant si X peut être recouvert par des ouverts connexes U tels que les faisceaux restrictions $\mathcal{F}_{|U}$ [1] sont constants.
(iii) Un système local sur X est un faisceau localement constant de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

[1] Naturellement, on appelle restriction $\mathcal{F}_{|U}$ du faisceau $\mathcal{F}$ à l'ouvert U de X le faisceau sur U qui, à l'ouvert $V \subset U$, associe $\mathcal{F}(V)$.

Corollaire 2.3.2 *(du théorème de Cauchy). Les faisceaux $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et $\mathcal{F}_A$ sont des systèmes locaux.*

Preuve. - Notons $\mathcal{F}$ indifféremment le faisceau $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et le faisceau $\mathcal{F}_A$. Soit U un ouvert connexe tel qu'en fournit le théorème de Cauchy et soit $V \subset$ un ouvert connexe non vide U. On savait déjà depuis 2.1 que le morphisme de restriction est injectif et que $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(V) \leq n$; le théorème de Cauchy nous assure de plus que $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(U) = n$, ce qui suffit pour conclure. $\square$

On va maintenant se donner les moyens de parler de solutions sur un voisinage "assez petit" de z_0 mais sans être obligé de préciser ce voisinage.

Définition 2.3.3 (sections et germes de sections). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace X. Un germe de section de $\mathcal{F}$ en $z_0 \in X$ est une classe d'équivalence de couples (f,U), où U est un voisinage ouvert de z_0, $f \in \mathcal{F}(U)$ une section du faisceau $\mathcal{F}$ sur U et où deux tels couples (f_1,U_1) et (f_2,U_2) sont déclarés équivalents s'il existe un voisinage ouvert $V \subset U_1 \cap U_2$ de z_0 tel que $\rho_V^{U_1}(f_1) = \rho_V^{U_2}(f_2)$. On note $\mathcal{F}_{z_0}$ l'ensemble (le $\mathbf{C}$-espace vectoriel, la $\mathbf{C}$-algèbre, le truc ...) des germes en z_0.

Il y a donc également des morphismes de restriction naturels $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{z_0}$ (U voisinage ouvert de z_0).

Exemple 2.3.4 Les germes en $z_0 \in \Omega$ du faisceau $\mathcal{O}_\Omega$ des fonctions holomorphes sur (les ouverts de) Ω forment la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{O}_{\Omega,z_0} = \mathbf{C}\{z - z_0\}$ des séries entières en $z - z_0$.

Exercice 2.3.5 (i) Soit $\mathcal{F}$ l'un quelconque des faisceaux $\mathcal{O}_\Omega$, $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ et $\mathcal{F}_A$; alors les morphismes de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{z_0}$ (U voisinage ouvert *connexe* de z_0) sont injectifs.
(ii) Le morphisme de restriction $\mathcal{O}_\Omega(U) \to \mathcal{O}_{\Omega,z_0}$ n'est jamais surjectif.
(iii) Discuter l'injectivité et la surjectivité du morphisme de restriction $\mathcal{C}_\Omega(U) \to \mathcal{C}_{\Omega,z_0}$.

Exercice 2.3.6 Soit $\mathcal{F}$ un système local sur X. Alors l'application de X dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ qui, à $z \in X$, associe $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}_z$ est localement constante ; en particulier, elle est constante sur chaque composante connexe.

Si le faisceau $\mathcal{F}$ est localement constant, les morphismes de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{z_0}$ (où U est un voisinage ouvert connexe *assez petit* de z_0) sont de plus surjectifs. "Assez petit" signifie ici : inclus dans un ouvert sur lequel la restriction de $\mathcal{F}$ est un faisceau constant.

Corollaire 2.3.7 *(du théorème de Cauchy). Quelque soit $z_0 \in \Omega$, les espaces vectoriels $\mathcal{F}_{\underline{a},z_0}$ et $\mathcal{F}_{A,z_0}$ sont de dimension n et les morphismes "conditions initiales en z_0" du théorème de Cauchy induisent des isomorphismes de ces espaces sur $\mathbf{C}^n$.* $\square$

2.3.2 La représentation de monodromie

Soit $\mathcal{F}$ un système local sur Ω et soit γ un chemin dans Ω d'origine z_0 et d'extrémité z_1. Le "prolongement analytique" le long de γ permet de définir un isomorphisme de $\mathcal{F}_{z_0}$ sur $\mathcal{F}_{z_1}$. Comme pour le prolongement analytique usuel, la procédure est la suivante :

1. Pour tout $t \in [0;1]$, on choisit un voisinage ouvert connexe V_t assez petit de $\gamma(t)$. Le segment $[0;1]$ étant compact et connexe, on peut supposer qu'il y a des temps $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$ tels que les V_{t_i} recouvrent le chemin image $\gamma([0;1])$ et que, pour $0 \leq i \leq N-1$, V_{t_i} rencontre $V_{t_{i+1}}$.
2. $\mathcal{F}$ étant un système local, les morphismes de restriction fournissent des isomorphismes $F(t_i \to \mathcal{F}(V_{t_{i+1}})$ et leur composé fournit un isomorphisme de $\mathcal{F}_{z_0}$ sur $\mathcal{F}_{z_1}$. Si l'on remplace le recouvrement des V_{t_i} par un raffinement, on ne change pas le résultat, et l'on peut en déduire que le résultat ne dépend pas du choix des V_{t_i}.

En fait, l'isomorphisme ainsi défini ne dépend que de la classe d'homotopie (dans Ω, à extrémités fixées) de γ. De plus, dans le cas d'un système local, les isomorphismes ainsi définis sont des isomorphismes de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

Principe de monodromie. *On définit ainsi des applications :*

$$\Pi_1(\Omega; z_0, z_1) \to Isom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_{z_0}, \mathcal{F}_{z_1}).$$

Ces applications sont compatibles à la composition des chemins et des isomorphismes et la classe du chemin constant z_0 a pour image l'identité de $\mathcal{F}_{z_0}$.

La preuve dans le cas général d'un système local est entièrement analogue à la preuve dans le cas classique du véritable prolongement analytique (de fonctions) telle qu'elle est donnée dans [1] ; le formalisme plus général est dans [11]. On peut résumer l'énoncé ci-dessus en terme d'opération du groupoïde fondamental, mais nous nous en tiendrons à une formulation plus classique.

Proposition 2.3.8 *On obtient ainsi un antihomomorphisme de $\pi_1(\Omega; z_0)$ dans $Aut_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_{z_0})$. De manière équivalente : le groupe $\pi_1(\Omega; z_0)$ opère linéairement à droite sur $\mathcal{F}_{z_0}$.* □

Remarque 2.3.9 De manière encore équivalente : on a une représentation linéaire du groupe *opposé* $\pi_1(\Omega; z_0)^\circ$ dans $\mathcal{F}_{z_0}$. Réciproquement, on peut prouver en toute généralité que toute telle représentation provient d'un système local, voir [11] et surtout [45]. Nous montrerons dans le cas où $\Omega = \mathbf{S} \setminus \{$ ensemble fini $\}$ qu'elle provient d'un système différentiel linéaire, donc également d'un système local.

Les exercices qui suivent doivent être regardés comme des résultats fondamentaux, dont la preuve est laissée au lecteur consciencieux.

Exercice 2.3.10 Démontrer que les éléments de $\mathcal{F}_{z_0}$ qui sont fixés par l'action du groupe fondamental sont exactement les germes de sections uniformes, c'est-à-dire qui sont la restriction d'une section globale $f \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Exercice 2.3.11 Démontrer que, pour tout voisinage ouvert simplement connexe U de Ω, le morphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{z_0}$ est un isomorphisme.

On peut donc caractériser les germes de solutions uniformes (c'est-à-dire qui admettent un prolongement analytique à Ω tout entier) comme ceux qui sont invariants par l'action de monodromie. Il faut comparer cet énoncé à celui qui dit que les éléments qui sont fixés par l'action d'un groupe de Galois sont les éléments du corps de base. Dans le cas des fonctions algébriques, il s'agit d'ailleurs d'un peu plus que d'une analogie : le corps des fonctions multiformes est alors une extension galoisienne du corps des fonctions uniformes et son groupe de Galois est exactement le groupe de monodromie.

Choix non canoniques

Lorsque l'on parle de "la" représentation de monodromie attachée à un système local $\mathcal{F}$ sur Ω, on a implicitement choisi un point-base $z_0 \in \Omega$. Si z_1 est un autre point de Ω, et si γ est un chemin de z_0 à z_1, la conjugaison par $\overline{\gamma}$ définit un isomorphisme des groupes fondamentaux :

$$\phi : \begin{cases} \pi_1(\Omega, z_0) \to \pi_1(\Omega, z_1) \\ \overline{\lambda} \mapsto \overline{\gamma}^{-1}.\overline{\lambda}.\overline{\gamma} \end{cases} .$$

Cet isomorphisme n'est pas canonique : il dépend de la classe d'homotopie de γ ; plus précisément, soit γ' un autre chemin de z_0 à z_1, qui définit de même $\phi' : \pi_1(\Omega, z_0) \to \pi_1(\Omega, z_1)$. On en déduit des lacets $\lambda_0 = \gamma'.\gamma^{-1}$ basé en z_0 et $\lambda_1 = \gamma'^{-1}.\gamma$ basé en z_1 et l'on voit que les automorphismes $\phi'^{-1} \circ \phi$ de $\pi_1(\Omega, z_0)$ et $\phi' \circ \phi^{-1}$ de $\pi_1(\Omega, z_1)$ sont des automorphismes intérieurs induits par les classes de λ_0 et λ_1 (*i.e.* $\overline{\lambda} \mapsto \overline{\lambda_0}.\overline{\lambda}.\overline{\lambda_0}^{-1}$ et $\overline{\lambda} \mapsto \overline{\lambda_1}.\overline{\lambda}.\overline{\lambda_1}^{-1}$ respectivement).

Exercice 2.3.12 Ecrire les formules exactes.

Par ailleurs, le chemin γ induit aussi un isomorphisme de prolongement analytique $\psi : \mathcal{F}_{z_0} \to \mathcal{F}_{z_1}$. Notant $M_0 : \pi_1(\Omega, z_0) \to Aut_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_{z_0})$ et $M_1 : \pi_1(\Omega, z_1) \to Aut_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_{z_1})$ les antihomomorphismes de monodromie, on a la relation de conjugaison entre les représentations :

$$\forall \overline{\lambda} \in \pi_1(\Omega, z_0)\ ,\ \psi \circ M_0(\overline{\lambda}) \circ \psi^{-1} = M_1(\phi(\overline{\lambda})).$$

Pour le vérifier, prendre $f \in \mathcal{F}_{z_0}$ et écrire l'égalité des prolongements analytiques :

$$(f.\lambda).\gamma = (f.\gamma).(\gamma^{-1}.\lambda.\gamma).$$

En fait, seule la classe d'homotopie de $\gamma^{-1}.\lambda.\gamma$ est bien définie, mais l'égalité ci-dessus est non ambigue.

Un autre choix intervient lorsque l'on veut donner une forme matricielle à la représentation de monodromie : il faut tout d'abord chosir une base de $\mathcal{F}_{z_0}$. L'antihomomorphisme M_0 donne alors lieu à un morphisme de groupes de $\pi_1(\Omega, z_0)^\circ$ dans $GL_n(\mathbf{C})$ (en supposant [2] $\mathcal{F}_{z_0}$ de dimension finie n). Naturellement, ce morphisme dépend du choix de la base.

Exercice 2.3.13 Un peu d'algèbre linéaire ! Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de V. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{B}P = \mathcal{B}'$. Si $\phi \in Aut_{\mathbf{C}}(V)$, les matrices de ϕ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont respectivement les matrices $M, M' \in GL_n(\mathbf{C})$ telles que $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}M$ et $\phi(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'M'$. On a donc $M' = P^{-1}MP$.

La représentation de monodromie sous forme matricielle $M_{0,\mathcal{B}} : \pi_1(\Omega, z_0)^\circ \to GL_n(\mathbf{C})$ associe à $\overline{\lambda} \in \pi_1(\Omega, z_0)$ la matrice de $M_0(\overline{\lambda})$ relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc :

$$M_{0,\mathcal{B}'} = Int(P)^{-1} \circ M_{0,\mathcal{B}},$$

où l'on a noté $Int(P)$ l'automorphisme intérieur $M \mapsto PMP^{-1}$ de $GL_n(\mathbf{C})$.

2.3.3 Culture : Corps de classes et surfaces de Riemann

On se contentera d'une suggestion de lecture : les commentaires de Hilbert sur son 12ème problème, par exemple dans [24], t.1, p. 19.

[2] En fait, la définition usuelle des systèmes locaux suppose que les *fibres* $\mathcal{F}_{z_0}$ sont de dimension finie.

Chapitre 3

Etude locale des singularités

Le but de la première partie du cours (chapitres 1 à 4) est l'étude *globale* des équations différentielles linéaires sur la sphère de Riemann. Nous avons mené au chapitre 2 l'étude *locale* au voisinage des points réguliers, puis nous en avons tiré des conséquences globales. Dans ce chapitre, nous mènerons l'étude locale au voisinage d'un certain type de points singuliers, dont nous tirerons au chapitre 4 des conséquences globales.

3.1 Outils pour l'étude locale

3.1.1 Changements d'écriture de l'équation différentielle

De même que l'on peut parler d'applications linéaires ou différentiables indépendamment d'un choix de base ou de coordonnées, de même, il est possible de développer un formalisme intrinsèque (surfaces de Riemann, fibrés, connexions) dans lequel l'écriture de l'équation différentielle ne dépend ni de la coordonnée locale ni de la dérivation de base choisies ; voir [45], ou bien [2], [11] ou [52]. Faute d'avoir investi dans de telles généralités (ce n'est pas un regret), nous nous contenterons de quelques recettes de calcul.

Changement d'origine

On peut ramener l'étude en un point quelconque $z_0 \in \mathbf{S}$ à l'étude en $0 \in \mathbf{S}$ par un changement de variable. Si l'on part de $z_0 \in \mathbf{C}$, il suffit d'opérer la translation $w = z - z_0$ et les calculs sont triviaux. Si l'on part de $z_0 = \infty$, on prend $w = 1/z$, et l'on calcule comme suit.

Lemme 3.1.1 *Il existe des entiers naturels $\lambda_{i,k}$, $0 \leq i \leq k$, tels que, si l'on pose $f(z) = g(1/z)$, on a les relations :*

$$\forall k \geq 0 \text{ , } (-1)^k z^k f^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} w^i g^{(i)}(w).$$

Pour $k \geq 1$, on a $\lambda_{0,k} = 0$ et $\lambda_{k,k} = 1$.

Preuve. - Pour $k = 0$, on a $\lambda_{0,0} = 1$. Pour le reste, on raisonne par récurrence en dérivant la formule énoncée, ce qui donne :

$$\forall k \geq 0 \text{ , } \forall i \in \{0, \ldots, k+1\} \text{ , } \lambda_{i,k+1} = \lambda_{i-1,k} + (i+k)\lambda_{i,k},$$

avec la convention naturelle $\lambda_{i,k} = 0$ si $i \notin \{0, \ldots, k\}$. □

Proposition 3.1.2 *L'équation différentielle $f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \cdots + a_n(z) f(z) = 0$ équivaut, lorsque l'on pose $f(z) = g(w) = g(1/z)$, à l'équation différentielle $g^{(n)}(w) + b_1(w) g^{(n-1)}(w) + \cdots + b_n(w) g(w) = 0$,*

où :
$$\forall j \in \{0,\dots,n\}\ ,\ w^j b_j(w) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \lambda_{n-j,n-i}\, z^i a_i(z).$$

Preuve. - On note $a_0 = 1$. D'après le lemme, on peut écrire :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(z) f^{k)}(z) &= \sum_{0\leq i\leq k\leq n} (-1)^k w^k a_{n-k}(z) \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} w^i g^{(i)}(w) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} a_{n-k}(z)(-1)^k w^{i+k} \lambda_{i,k} \right) g^{(i)}(w) \\
&= (-1)^n w^{2n} \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}(w) g^{(i)}(w),
\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $0 \leq j \leq n$:
$$\begin{aligned}
b_j(w) &= \sum_{l=0}^{j} (-1)^{j-l} a_{j-l}(1/w) w^{l-2j}\, \lambda_{n-j,n-j+l} \\
&= w^{-j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \lambda_{n-j,n-i}\, z^i\, a_i(z);
\end{aligned}$$

on a bien $b_0 = 1$ et la formule voulue. □

Exercice 3.1.3 Les translations et la transformation $w = 1/z$ appartiennent au groupe des homographies $Aut(\mathbf{S}) = PGL_2(\mathbf{C})$. Ecrire directement l'effet sur une équation différentielle du changement de variable :
$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Indication : chercher dans un livre de taupe la formule de Faa di Bruno.

Remarque 3.1.4 Nous n'avons considéré que des changements de coodonnée globale, car ce sont les seuls qui nous serviront pour l'étude globale qui est notre objectif final ; mais des calculs similaires sont possibles pour des changements de coordonnée locale, par exemple, en 0, des changements d'uniformisante $u(z) = u_1 z + u_2 z^2 + \cdots \in \mathbf{C}\{z\}$, $u_1 \neq 0$.

Dorénavant, on se placera en $z_0 = 0 \in \mathbf{S}$.

Changement de dérivation

On a vu dans l'étude du logarithme qu'il pouvait être commode de calculer avec la dérivation $\delta = z\,d/dz$ (opérateur d'Euler) au lieu de la dérivation $D = d/dz$. Ce sera encore plus justifié lors de l'étude des équations fuchsiennes, dans la suite de ce chapitre.

On part de l'équation différentielle $f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \cdots + a_n(z) f(z) = 0$, que l'on peut écrire $P(D)(f) = 0$, où l'on a noté $P(D)$ l'opérateur différentiel $D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$. Dans l'écriture d'un tel opérateur, chaque fonction holomorphe (ou fonction méromorphe ou série convergente ou formelle) a est identifiée à l'opérateur $f \mapsto af$ et le produit aD^k désigne la composition des opérateurs. Celle-ci n'est pas une loi commutative : les opérateurs $f \mapsto af$ commutent entre eux, les puissances D^k commutent entre elles, mais les $f \mapsto af$ ne commutent pas avec les D^k. Le défaut de commutation est entièrement "codé" dans les commutateurs $[D^k, a] \underset{def}{=} D^k a - aD^k$. La règle de base est l'égalité :
$$[D,a] = D(a),$$

qui exprime simplement le fait que D est une dérivation, c'est-à-dire que $D(af) - aD(f) = D(a)f$.

Exercice 3.1.5 Calculer $[D^k, a]$. En déduire la formule :

$$P(D).a = \sum_{i \geq 0} \frac{P^{(i)}(D)(a)}{i!} D^i.$$

On prendra garde que dans cette formule, les coefficients du polynôme P sont des fonctions de z, mais c'est par rapport à "l'indéterminée" D que l'on dérive P :

$$P^{(i)}(D) = \frac{n!}{(n-i)!} D^{n-i} + \cdots + i! a_i.$$

Indication : $D^k a$ est donné par la règle de Leibnitz.

Pour convertir l'équation différentielle ci-dessus en termes d'opérateur d'Euler, nous devons comparer entre eux les *polynômes non commutatifs* $a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$ et $b_o \delta^p + b_1 \delta^{p-1} + \cdots + b_p$.

Lemme 3.1.6 *Il existe des entiers $\alpha_{i,k} \in \mathbf{N}$, $\beta_{i,k} \in \mathbf{Z}$, $0 \leq i \leq k$ tels que :*

$$\forall k \geq 0 \text{ , } \delta^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z^i D^i$$

et

$$\forall k \geq 0 \text{ , } z^k D^k = \sum_{i=0}^{k} \beta_{i,k} \delta_i.$$

De plus, $\forall k \geq 0$, $\alpha_{k,k} = \beta_{k,k} = 1$.

Preuve. - La deuxième relation découle de la première par résolution d'un système triangulaire. Pour prouver la première, on prend d'abord $\alpha_{0,0} = 1$, puisque $\delta^0 = z^0 D^0$. Pour la récurrence, on multiplie à gauche par $\delta = zD$ et on remplace partout Dz^i par $z^i D + iz^{i-1}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\delta^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z D z^i D^i \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z (z^i D + i z^{i-1}) D^i \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z^{i+1} D^{i+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} i z^i D^i \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (\alpha_{i-1,k} + i\alpha_{i,k}) z^i D^i
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence :

$$\forall k \geq 0 \text{ , } \forall i \in \{0, \ldots, k\} \text{ , } \alpha_{i,k+1} = \alpha_{i-1,k} + i\alpha_{i,k},$$

avec la convention naturelle : $\alpha_{i,k} = 0$ pour $i \notin \{0, \ldots, k\}$. □

Proposition 3.1.7 *(i) Soit R l'une des algèbres $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{C}(\{z\})$, $\mathbf{C}((z))$. Tout polynôme non commutatif unitaire $Q(\delta)$ de degré k à coefficients dans R peut s'écrire (de manière unique) sous la forme $z^k P(D)$, où $P(D)$ est un polynôme non commutatif unitaire à coefficients dans R et de degré k , et réciproquement.*
*(ii) Soient $P(D) = D^k + a_1 D^{k-1} + \cdots + a_k$ et $Q(\delta) = \delta^k + b_1 \delta^{k-1} + \cdots + b_k$ tels que $z^k P(D) = Q(\delta)$. Alors les b_i sont holomorphes en 0 (*i.e.* n'y ont pas de pôle, dans le cas d'une série formelle) si et seulement si les $z^i a_i$ le sont.*

Preuve. - Notant $a_i' = z^i a_i$, il découle du lemme que l'égalité $z^k P(D) = Q(\delta)$ équivaut à des relations du type $a_i' = b_i +$ une combinaison linéaire à coefficients entiers des $b_j, j > i$, et réciproquement $b_i = a_i' +$ une combinaison linéaire à coefficients entiers des $a_j, j > i$. La conclusion est immédiate. □

Exercice 3.1.8 Donner des formules explicites de conversion.

Le but de ces calculs troubles est d'introduire des opérateurs différentiels particulièrement importants.

Définition 3.1.9 Un *opérateur différentiel fuchsien* est un opérateur de la forme $az^k P(D) = aQ(\delta)$, où P et Q sont comme ci-dessus et où a est un élément de l'algèbre de base (de séries ou de fonctions).

Exercice 3.1.10 Retrouver les règles de transformation d'équations différentielles par changement de variable $w = 1/z$ de la proposition 3.1.2 en remarquant que $z\, d/dz = -w\, d/dw$.

3.1.2 Fonctions multiformes

Fonctions multiformes dans un disque épointé

On fixe ici un réel $R > 0$ et l'on note D^* le disque épointé $\mathring{D}(0,R) \setminus \{0\}$. On veut définir la notion de fonction multiforme sur D^*, et de déterminations d'une telle fonction. On appellera *petit* un ouvert connexe non vide qui est contenu dans un ouvert simplement connexe de D^*. On admet dans ces conventions le cas (extrême !) où R est infini et $D^* = \mathbf{C}^*$.

Définition 3.1.11 (i) Un *élément analytique* sur D^* est un couple (f,U), où f est une fonction holomorphe sur le petit ouvert connexe non vide $U \subset D^*$.
(ii) La relation de *prolongement analytique* est la cloture transitive de la relation d'adjacence, qui est la relation réflexive symétrique vérifiée par (f,U) et (g,V) lorsque $U \cap V \neq \emptyset$ et $f_{|U\cap V} = g_{|U\cap V}$.

Autrement dit, (f,U) et (g,V) sont des prolongements analytiques l'un de l'autre s'il existe un chemin γ d'un point a de U à un point b de V tel que le prolongement analytique de f le long de γ définisse le même germe que g en b. On dira qu'un élément analytique (f,U) est *prolongeable à tout D^** s'il peut être prolongé le long de tout chemin dans D^* dont l'origine est dans U ; dans ce cas, les domaines V de ses prolongements analytiques recouvrent D^*, mais la réciproque n'est pas vraie. Il serait donc plus correct de dire que (f,U) est prolongeable à tout le revêtement universel de D^*.

Définition 3.1.12 On appelle *fonction multiforme* sur D^* La classe d'un élément analytique (f,U) prolongeable à tout D^* dans le sens expliqué ci-dessus. Les eléments analytiques (f,U) qui appartiennent à cette classe sont appelés *déterminations* de cette fonction multiforme.

Les déterminations d'une fonction multiforme donnée sur un petit ouvert connexe non vide $U \subset D^*$ forment donc une orbite sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(D^*, z_0)$, pour $z_0 \in U$. Soit γ un lacet dans D^* basé en z_0 et d'indice 1 par rapport à 0 : sa classe d'homotopie est donc un générateur de $\pi_1(D^*, z_0)$. Si f est une telle détermination, la détermination $f.\overline{\gamma}^k$ est parfois notée $f(ze^{2k\imath\pi})$.

Le prolongement analytique "préserve les relations algébriques et analytiques", en particulier, il est compatible avec l'addition, la multiplication et la dérivation : la dérivée de la fonction $f(ze^{2k\imath\pi})$ est la fonction $f'(ze^{2k\imath\pi})$. Les fonctions multiformes forment donc une $\mathbf{C}$-*algèbre différentielle* et les transformations de monodromie $f(z) \mapsto f(ze^{2k\imath\pi})$ sont des automorphismes différentiels.

Exemple 3.1.13 (i) Toute fonction f holomorphe sur D^* y définit une fonction multiforme, à savoir l'ensemble de ses restrictions $(f_{|U}, U)$: cette fontion multiforme est *uniforme*. Elle est caractérisée par le fait que le groupe fondamental opère trivialement sur l'une quelconque de ces déterminations. De façon imagée, on a les égalités $f(z) = f(ze^{2k\imath\pi})$.

(ii) Appelons *caractère d'exposant* α la fonction multiforme sur $\mathbf{C}^*$ qui est la classe de l'élément analytique $(z^\alpha, \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$. Les déterminations de ce caractère sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ sont les fonctions $(ze^{2k\imath\pi})^\alpha = e^{2k\imath\pi\alpha} z^\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$. Attention ! cette formule bien agréable ne découle pas d'une règle de calcul mais de la définition du prolongement analytique. C'est également vrai de la formule analogue dans l'exemple suivant.
(iii) Appelons *logarithme* la fonction multiforme sur $\mathbf{C}^*$ qui est la classe de $(\log, \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$. Les déterminations du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ sont les fonctions $\log(ze^{2k\imath\pi}) = \log z + 2k\imath\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

La notion de fonction multiforme est étroitement liée à la notion de système local de la façon suivante. Fixons une telle fonction multiforme sur D^* et notons temporairement, pour tout petit ouvert connexe non vide $V \subset D^*$, $\Delta(V)$ l'ensemble de ses déterminations sur V. On définit alors un faisceau $\mathcal{F}$ sur D^* en posant, pour tout ouvert non vide $U \subset D^*$ (quelconque) :

$$\mathcal{F}(U) = \{ f \in \mathcal{O}(U) \ : \ \text{pour tout petit ouvert connexe non vide } V \subset U \ , \ f_{|V} \in Vect_{\mathbf{C}}(\Delta(V)) \}.$$

On vérifie sans peine que c'est bien un système local, et un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{O}_{D^*}$. Réciproquement, toute section d'un système local sur D^* qui est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{O}_{D^*}$ permet de définir une fonction multiforme. Dans les exemples ci-dessus, on retombe sur le système local des solutions d'une équation différentielle.

Exercice 3.1.14 Une fonction multiforme sur D^* est essentiellement la même chose qu'une fonction holomorphe sur le revêtement universel $\tilde{D^*}$ de D^*. Les petits ouverts connexes sont ceux sur lesquels l'application de revêtement $\tilde{D^*} \to D^*$ admet une section holomorphe. Que représentent alors les déterminations sur de tels ouverts ?

Fonctions multiformes et équations différentielles

Définition 3.1.15 Une fonction multiforme est dite *de détermination finie* si, pour tout petit ouvert connexe non vide $U \subset D^*$, ses déterminations sur U engendrent un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}_{D^*}(U)$.

Exemple 3.1.16 (i) Toute fonction uniforme est de détermination finie.
(ii) Les caractères z^α sont de détermination finie.
(iii) Toute fonction algébrique est de détermination finie.
(iv) Le logarithme est de détermination finie.

Les exemples qui suivent sont essentiels.

Exemple 3.1.17 (i) Soit f une solution sur un petit ouvert connexe non vide $U \subset D^*$ d'une équation différentielle $(E_{\underline{a}})$ dont les coefficients sont holomorphes sur D^*. Alors (U, f) définit une fonction multiforme sur D^*, dont tous les éléments sont des solutions de $(E_{\underline{a}})$. Cette fonction est de détermination finie.
(ii) Les coefficients d'une solution vectorielle d'un système (S_A) régulier sur D^* définissent également des fonctions de détermination finie.

La réciproque est vraie :

Proposition 3.1.18 *Toute fonction de détermination finie est solution d'une équation différentielle régulière sur D^*.*

Preuve. - Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de l'espace vectoriel des déterminations sur U d'une telle fonction multiforme. Soit ϕ l'automorphisme de monodromie (action d'un générateur du groupe fondamental). Alors $\phi(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_n)C$ pour une certaine matrice $C \in GL_n(\mathbf{C})$. Comme ϕ commute à la dérivation, on a de même $\phi(f_1^{(i)}, \ldots, f_n^{(i)}) = (f_1^{(i)}, \ldots, f_n^{(i)})C$ pour $0 \leq i \leq n-1$, d'où $\phi(W) = WC$, où W est la matrice wronskienne des f_i. Pour la même raison, $\phi(W') = W'C$.

Comme les f_i ne sont pas liés, W est inversible et il existe donc une matrice A holomorphe sur U telle que $W' = AW$. *A priori*, A est, comme W et W' une matrice de fonctions multiformes. Des relations $\phi(W) = WC$ et $\phi(W') = W'C$ on tire $\phi(A) = A$, autrement dit, A se prolonge en une matrice holomorphe (uniforme) sur D^* et les colonnes de W sont solutions du système S_A qui est régulier sur D^*. Cela implique en particulier la conclusion. □

Exercice 3.1.19 (i) Les fonctions de détermination finie forment une algèbre sur $O(D^*)$.
Indication : si les déterminations de f (resp. de g) engendrent le **C***-espace vectoriel V (resp. W), alors celles de $f+g$ (resp. de fg) sont dans $V+W$ (resp. dans $V.W$).*
(ii) L'inverse du logarithme n'est pas de détermination finie.
Indication : si les a_i sont des complexes deux à deux distincts, les fonctions $\frac{1}{\log(z)-a_i}$ sont linéairement indépendantes sur **C**.

3.1.3 Conditions de croissance modérée dans les secteurs

Pour étudier maintenant la croissance dans les secteurs, il nous faut d'abord définir la classe de croissance la plus importante (en ce qui concerne les systèmes singuliers réguliers). Comme la définition semble un peu contournée, il faut la justifier en montrant comment une définition trop simple ne marcherait pas. Pour cela, on considère la "vraie" fonction logarithme, qui est multiforme au voisinage de 0. Cela signifie que l'on devra distinguer $logarithme(z)$ de $logaritme(ze^{2\imath\pi})$. Concrètement, on peut calculer avec cette fonction en posant :

$$logarithme(re^{\imath t}) = \ln r + \imath t\ ,\ (r,t) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}.$$

Dans cette formule, on n'identifie pas $re^{\imath t}$ avec $re^{\imath t'}$ même si $t' \equiv t \pmod{2\pi}$.

Exercice 3.1.20 Interpréter tout cela de manière rigoureuse à l'aide du revêtement universel de $\mathbf{C}^*$.

Avec ces conventions, si t est autorisé à varier librement, il n'est pas possible de borner $|logarithme(z)| = \sqrt{(\ln r)^2 + t^2}$ en fonction de $|z| = r$. Mais on peut le faire si t est borné, autrement dit, si z varie dans un *secteur angulaire*.

On ne considérera que des secteurs angulaires stricts, c'est-à-dire non égaux à D^* : un tel secteur est simplement connexe. On notera donc, pour deux arguments $a,b \in \mathbf{R}$ tels que $0 < b-a < 2\pi$:

$$S_{a,b} = \{re^{\imath t}\ /\ 0 < r < R \text{ et } a < t < b\}.$$

L'amplitude du secteur $S_{a,b}$ est le réel $b-a$.

Définition 3.1.21 On dit qu'une fonction multiforme sur D^* est *à croissance modérée (ou polynomiale) dans les secteurs* si, pour tout secteur $S_{a,b}$ et pour toute détermination f de cette fonction sur ce secteur, on a :

$$f(z) = O(z^N) \text{ lorsque } z \to 0,$$

l'entier N pouvant d'ailleurs être négatif ; il suffit évidemment de vérifier cette condition sur des secteurs qui recouvrent D^*.

On dit également, dans ce cas, que la détermination f (qui définit sans ambiguité la fonction multiforme) est elle-même à croissance modérée. Notons que l'entier N dépend en principe du secteur et de la détermination concernés ; cependant, dans le cas de fonctions de détermination finie (*e.g.*, solutions d'équations différentielles), il existe un N valable pour tout le monde. En effet, il suffit d'en trouver un qui convient pour deux bases de déterminations sur deux secteurs qui recouvrent D^*, et ils valent pour tous, puisque la monodromie opère par multiplication de ces bases par des matrices constantes.

Exemple 3.1.22 Toute fonction méromorphe est à croissance modérée.

Les fonctions à croissance modérée forment évidemment une **C**-algèbre, en particulier un **C**-espace vectoriel. Par conséquent, si *une* base fondamentale d'une équation $(E_{\underline{a}})$ (resp. *une* solution fondamentale d'un système (S_A)) est à croissance modérée dans les secteurs, alors *toutes* les bases fondamentales (resp. *toutes* les solutions fondamentales) le sont. Des exemples essentiels seront donnés en 3.2.3.

Proposition 3.1.23 *Une fonction uniforme sur D^* et à croissance modérée dans les secteurs est méromorphe en* 0.

Preuve. - La fonction $z^{-N} f$ est alors holomorphe bornée sur D^*, donc se prolonge en une fonction holomorphe sur $\overset{\circ}{D}(0,R)$: c'est essentiellement le *théorème des singularités inexistantes* de Riemann, voir par exemple [1], chap. 4, §3.1, théorème 7, p. 124 ; [9], chap. III, §4.4, prop. 4.1, p.88 ; [44], chap. 10, théorème 10.21, p. 204. □

Exercice 3.1.24 Les fonctions $e^{1/z}$, $e^{1/z}\log(z)$ ne sont pas à croissance modérée dans les secteurs.

Les fonctions à croissance modérée forment en fait une sous-algèbre *différentielle*, autrement dit, stable par dérivations, de la **C**-algèbre des fonctions multiformes. Pour démontrer cette propriété (qui nous sera très utile dans l'étude, en 3.3, des équations singulières régulières), nous aurons besoin (enfin) d'un peu d'analyse.

Lemme 3.1.25 *Soit $f \in O(\Omega)$ une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω de* **C**. *On suppose f bornée et l'on note $M = ||f||_\Omega$ sa borne supérieure (en module). Alors, pour tout point z_0 de Ω :*

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{d(z_0, \partial\Omega)}.$$

Preuve. - On fait appel aux *estimations (ou inégalités) de Cauchy* : si f est holomorphe et majorée en module par M dans le disque ouvert $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$, alors $|f^{(n)}(z_0)| \leq Mn!/r^n$ pour tout entier naturel n ; voir [1], chap. 4, §2.3, p. 122 ou bien [9], chap. 3, §1.1, p. 81, ou encore [44], chap. 10, théorème 10.25, p. 206. Faisant tendre r vers la distance de z_0 à la frontière de Ω, on obtient la conclusion voulue. □

Proposition 3.1.26 *Soit f une fonction à croissance modérée dans D^*. Alors f' est également à croissance modérée.*

Preuve. - On commence par prouver que si f est holomorphe et bornée dans un secteur $S_{a,b}$, alors δf est bornée dans tout secteur $S_{a',b'}$ tel que $a < a' < b' < b$. En effet, c'est un exercice de géométrie élémentaire de prouver que l'on a une minoration :

$$d(z_0, \partial S_{a,b}) \geq C\,|z_0|$$

pour un certain réel $C > 0$ et pour tout $z_0 \in S_{a',b'}$ tel que $|z_0| \leq R/2$. Combinée avec le lemme, cette minoration permet de conclure. Pour le cas général, on utilise le fait que $\delta(z^{-N} f) = z^{-N}(\delta f - N f)$. On obtient ainsi l'affirmation plus précise que, si $f(z) = O(z^N)$ lorsque $z \to 0$ dans $S_{a,b}$, alors δf vérifie la même propriété dans $S_{a',b'}$. Enfin, il est possible de recouvrir D^* par des secteurs $S_{a',b'} \subset S_{a,b}$ choisis comme ci-dessus.

□

3.2 Systèmes fuchsiens standards en 0

C'est le cas le plus simple après le cas régulier. Il s'agit de systèmes [1] qui, écrits avec l'opérateur d'Euler, sont à coefficients constants :

$$z\frac{dX}{dz} = AX \ , \ A \in M_n(\mathbf{C}).$$

Ils serviront à construire les *solutions canoniques de Fuchs*.

[1] Attention : la terminologie "Systèmes fuchsiens standards" n'est pas standard !

3.2.1 Résolution

Si l'on écarte le cas trivial $A = 0$, la seule singularité du système $z\,dX/dz = AX$ sur $\mathbf{C}$ est 0. En $\infty \in \mathbf{S}$, le changement de carte $w = 1/z$ donne lieu au système $w\,dY/dw = -AY$ (avec $Y(w) = X(z)$) qui est singulier en $w = 0$: les singularités sur $\mathbf{S}$ sont donc 0 et ∞ et l'on prendra $\Omega = \mathbf{S} \setminus \{0, \infty\} = \mathbf{C}^*$. On va donc obtenir un système local sur Ω, et nous comptons en expliciter des solutions fondamentales.

Première méthode : développement en série

On cherche un développement au voisinage de 1 :

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{X}_k (z-1)^k.$$

En un point arbitraire $z_0 \in \mathbf{C}^*$, on pourra alors utiliser $\mathcal{X}(z/z_0)$. La méthode générale de 2.2 donne ici $\mathcal{X}_0 = I_n$ et $\forall k \geq 0$, $k\mathcal{X}_k + (k+1)\mathcal{X}_k = A\mathcal{X}_k$. On a donc :

$$\forall k \geq 0 \text{ , } \mathcal{X}_k = \frac{1}{k!} A(A - I_n) \cdots (A - (k-1)I_n,$$

que l'on peut très bien noter $\binom{A}{k}$.

Exercice 3.2.1 Démontrer que la série obtenue est de rayon de convergence 1.
Indication : encadrer la norme de $\binom{A}{k}$ *par des expressions de la forme* $\binom{||A|| + C}{k}$.

La solution fondamentale ainsi obtenue admet un (unique) prolongement analytique à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, que l'on notera z^A et que l'on appellera *détermination principale*.

Deuxième méthode : avec le logarithme

On voit immédiatement que la fonction matricielle holomorphe $e^{A \log z}$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ vérifie les mêmes propriétés que z^A et lui est donc égale. Cela utilise les propriétés classiques de l'exponentielle de matrice et l'étude antérieure du logarithme complexe.

Troisième méthode : via le théorème de Dunford

L'intérêt de cette méthode est qu'elle nous servira à nouveau pour les équations aux q-différences et aux différences. On écrit $A = S + N$, où S est semi-simple, N est nilpotente et ces deux matrices commutent : $[S, N] = 0$ (le crochet dans $M_n(\mathbf{C})$ est défini par $[P, Q] = PQ - QP$). Cette décomposition (appelée décomposition de Dunford ou de Jordan) est unique ; voir [7], chap. VII, §5, no 9, p. 42.

On résoud d'abord $zX' = SX$. Pour cela, on écrit $S = P\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)\,P^{-1}$. On vérifie que la matrice $P\,\mathrm{diag}(z^{d_1}, \ldots, z^{d_n})\,P^{-1}$ est une solution fondamentale sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, qui ne dépend pas du choix de la matrice de passage P. De plus, on peut l'exprimer polynomialement en S. On la note temporairement e_S.

On résoud ensuite $zX' = NX$. Pour cela, on cherche X sous la forme $\sum l_k N^k$ (c'est une somme finie, puisque N est nilpotente), et l'on identifie brutalement les coefficients en N^k : on trouve $zl'_{k+1} = l_k$ et $zl'_0 = 0$. On vérifie que les $l_k = (\log z)^k / k!$ conviennent et que $\sum N^k (\log z)^k / k!$ est une solution fondamentale sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. De plus, on peut l'exprimer polynomialement en N. On la note temporairement e_N.

Comme e_S et e_N sont respectivement polynomiales en S et N qui commutent, elles commutent et il est facile de vérifier que $e_S e_N$ est la solution cherchée. En fait, e_S et e_N forment la décomposition de Dunford multiplicative de z^A.

Exercice 3.2.2 Vérifier toutes les assertions qui émaillent ces constructions, en particulier que l'on obtient trois fois la même chose.

3.2.2 Monodromie

On retrouve la démarche maintenant éprouvée.

Corollaire 3.2.3 *La solution fondamentale qui vaut I_n en z_0 est $(z/z_0)^A$. En particulier, la fonction matricielle $(-z)^A$ est l'unique solution fondamentale telle que $-1 \mapsto I_n$ et elle se prolonge à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.* $\square$

Corollaire 3.2.4 *Si $|Im(w)| < \pi$, $(e^w)^A = e^{wA}$. En particulier, $\imath^A = e^{\imath(\pi/2)A}$ et $(-\imath)^A = e^{-\imath(\pi/2)A}$.* $\square$

Lemme 3.2.5 *L'effet du prolongement analytique sur z^A le long du chemin $\gamma(t) = e^{2\imath\pi t}$ est la multiplication par $e^{2\imath\pi A}$.*

Preuve. - On procède comme dans la "promenade". On a $z^A = (-z)^A C$, où C est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et localement constante puisque z^A et $(-z)^A$ sont solutions fondamentales du même système. La valeur de C sur $\mathcal{H}$ (resp. $-\mathcal{H}$) est $e^{\imath\pi A}$ (resp. $e^{-\imath\pi A}$) d'après les corollaires ci-dessus. $\square$

Théorème 3.2.6 *La représentation de monodromie en 1 déduite du système local des solutions de notre système différentiel est le morphisme de $\pi_1(\mathbf{C}^*, 1)^\circ = \mathbf{Z}\bar{\gamma}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$ (dans la base formée des colonnes de la solution fondamentale z^A) défini par $\bar{\gamma} \mapsto e^{2\imath\pi A}$.* $\square$

3.2.3 Croissance des solutions

Lemme 3.2.7 *Les fonctions z^α et $\log z$ sont à croissance modérée dans les secteurs.*

Preuve. - D'après l'exemple 3.1.13 (ou, de façon équivalente, l'étude de la monodromie de ces deux fonctions), il suffit de le vérifier pour une détermination dans un secteur d'amplitude 2π, par exemple $S_{-\pi,\pi}$. Mais, dans ce secteur, on peut écrire $z = e^w$, $|Im(w)| < \pi$ et $z^\alpha = e^{w\alpha}$, $\log z = w$. Notant $w = u + \imath v$ et $\alpha = a + \imath b$, on a les majorations :

$$|z^\alpha| = e^{\Re(w\alpha)} = e^{au-bv} \leq e^{\pi|b|}|z|^a$$

et

$$|\log(z)| = |w| = \sqrt{u^2+v^2} \leq \sqrt{(\ln|z|)^2 + \pi^2}.$$

$\square$

Proposition 3.2.8 *La fonction matricielle z^A est à croissance modérée dans les secteurs.*

Preuve. - C'est une conséquence immédiate du lemme. $\square$

3.3 Singularités régulières

On s'intéresse à des systèmes différentiels linéaires au voisinage de 0, que l'on suppose réguliers au voisinage épointé de 0 et méromorphes en 0. Il sera commode d'écrire un tel système sous la forme $\delta X = AX$, avec $A \in M_n(\mathbf{C}(\{z\})$.

De même, on s'intéresse à des équations différentielles linéaires au voisinage de 0, que l'on suppose régulières au voisinage épointé de 0 et méromorphes en 0. Il sera commode d'écrire une telle équation sous la forme :

$$\delta^n(f) + a_1\delta^{n-1}(f) + \cdots + a_n f = 0,$$

soit $P(\delta)(f) = 0$, avec P polynôme unitaire à coefficients $a_i \in \mathbf{C}(\{z\})$, donc méromorphes. Le système associé à cette équation sera (dans ce chapitre) celui obtenu par vectorisation en utilisant comme variable vectorielle $X = \begin{pmatrix} f \\ \delta(f) \\ \vdots \\ \delta^{n-1}(f) \end{pmatrix}$, de sorte que $\delta X = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$.

3.3.1 Résolution des systèmes fuchsiens

Définition 3.3.1 Un *système fuchsien en* 0 est un système de la forme $\delta X = AX$, avec A holomorphe au voisinage de 0. Une *équation fuchsienne en* 0 est une équation telle que le système associé comme ci-dessus fuchsien.

Il revient donc au même de dire qu'une équation fuchsienne est de la forme $P(\delta)(f) = 0$ pour un opérateur fuchsien $P(\delta)$; selon la définition 3.1.9, cela signifie en effet que les coefficients a_i de P sont holomorphes en 0.

Notre but est de résoudre les systèmes fuchsiens en les transformant (par transformations de jauge méromorphes) en des systèmes plus simples : d'abord *non résonnants*, puis *standards*. Puisque le système $\delta X = AX$ (resp. $\delta X = BX$) équivaut en fait à $X' = z^{-1}AX$ (resp. à $X' = z^{-1}BX$), nous aurons à manipuler la relation $z^{-1}B = F[z^{-1}A]$, qui équivaut à : $B = (\delta F)F^{-1} + FAF^{-1}$. Nous introduisons donc, pour ce chapitre, la notation :

$$F\{A\} = (\delta F)F^{-1} + FAF^{-1}.$$

cette nouvelle transformation de jauge possède les mêmes propriétés formelles que l'autre (opération à gauche du groupe de jauge, relation d'équivalence).

Elimination des résonnances

Définition 3.3.2 Le système $\delta X = AX$ (supposé fuchsien en 0) est dit *non résonnant* si deux valeurs propres distinctes de $A(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier non nul :

$$\forall \lambda, \mu \in Sp(A(0)) \ , \ \lambda - \mu \not\in \mathbf{N}^*.$$

On dira, pour simplifier, que la matrice A est non résonnante.

Proposition 3.3.3 *En alternant des transformations de jauge $F \in GL_n(\mathbf{C})$ à coefficients constants et des transformations de jauge de* cisaillement *ou de* shearing *(voir ci-dessous), on peut éliminer les résonnances de A.*

Preuve. - Il s'agit en réalité d'un algorithme. On part de $A \in M_n(\mathbf{C}\{z\})$ holomorphe au voisinage de 0. On introduit sur le spectre $Sp(A(0))$ de sa partie constante $A(0)$ la relation d'équivalence "être congru modulo $\mathbf{Z}$". On appelle (juste le temps de cette démonstration) *amplitude* d'une classe la différence entre le plus grand et le plus petit élément (c'est donc un entier naturel) et *amplitude totale* du spectre la somme des amplitudes. A chaque étape de l'algorithme, l'amplitude totale diminue de 1. Quand elle est nulle, l'algorithme se termine et l'on a une matrice non résonnante. Chaque étape de l'algorithme est constituée de deux transformations de jauge successives, l'une par une matrice à coefficients constants (c'est en fait une conjugaison) et l'autre par une matrice de cisaillement.

Supposons donc que $Sp(A(0))$ contienne une classe non triviale (non réduite à un singleton) de plus petit élément λ et de plus grand élément $\lambda + m$, $m \in \mathbf{N}^*$. On va remplacer toutes les occurrences de $\lambda + m$ dans le spectre de $A(0)$ par $\lambda + m - 1$.

Il existe tout d'abord une matrice de conjugaison $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que

$$PA(0)P^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix},$$

où a_0 est un bloc triangulaire supérieur de taille $\mu \in \mathbf{N}^*$ et admet pour seule valeur propre $\lambda + m$: $Sp(a_0) = \{\lambda + m\}$, et où d_0 est un bloc triangulaire supérieur de taille $\nu \in \mathbf{N}^*$ et admet pour valeurs propres toutes les autres valeurs propres de $A(0)$: $Sp(d_0) = Sp(A(0)) \setminus \{\lambda + m\}$. On pose alors $B = P^{-1}AP = P\{A\}$ (puisque $\delta P = 0$), qui a pour partie constante $B(0) = P^{-1}A(0)P$. On peut donc écrire B comme matrice de blocs :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

de sorte que $a(0) = a_0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$ et $d(0) = d_0$.

La *transformation de cisaillement* (en anglais : *shearing transform*, voir [25]) qui intervient alors est la transformation de jauge de matrice S dont l'écriture par blocs est :

$$\begin{pmatrix} z^{-1}I_\mu & 0 \\ 0 & I_\nu \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$(\delta S)S^{-1} = \begin{pmatrix} -I_\mu & 0 \\ 0 & 0_\nu \end{pmatrix},$$

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} a & z^{-1}b \\ zc & d \end{pmatrix},$$

et donc que $C = S\{B\} = (\delta S)S^{-1} + SBS^{-1}$ est holomorphe en 0 et de partie constante :

$$C(0) = \begin{pmatrix} a_0 - I_\mu & * \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $Sp(C(0)) = Sp(a_0 - I_\mu) \cup Sp(d_0) = Sp(A(0)) \setminus \{\lambda + m\} \cup \{\lambda + m - 1\}$ a une amplitude totale strictement plus petite que $A(0)$; de plus, $C = F\{A\}$, où $F = SP$. □

Corollaire 3.3.4 *Toute système fuchsien est rationnellement équivalent à un système fuchsien non résonnant.*

Preuve. - La matrice de la transformation de jauge rationnelle en question est obtenue en faisant le produit des matrices constantes et des matrices de cisaillement qui apparaissent dans l'algorithme. □

Remarque 3.3.5 Il ressort de ces calculs que les valeurs propres de la matrice constante obtenue sont au mieux définies modulo $\mathbf{Z}$. On peut donc leur imposer d'appartenir à $[0;1[+\imath\mathbf{R}$. On se ramène à ce cas par des transformations de cisaillement convenables, voir par exemple [25] ou [45]. Réciproquement, les images dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de ces valeurs propres ne dépendent pas du processus de réduction choisi. Ce sont les *exposants* du système. Pour une preuve, voir *loc. cit.*.

Réduction aux coefficients constants

Définition 3.3.6 On appelle *transformation de Birkhoff* une transformation de jauge *tangente à l'identité*, c'est-à-dire de la forme $F = I_n + zF_1 + z^2F_2 + \cdots$. Si les coefficients de F sont dans $\mathbf{C}[[z]]$ (resp. dans $\mathbf{C}\{z\}$), c'est une transformation *formelle* (resp. *convergente*).

Proposition 3.3.7 *On suppose le système $\delta X = AX$ fuchsien non résonnant en 0. Il existe alors une unique transformation de Birkhoff formelle F telle que $F\{A(0)\} = A$ et cette transformation est convergente.*

La preuve reposera sur un lemme dont la démonstration sera laissée en exercice.

Exercice 3.3.8 Soit $P \in M_n(\mathbf{C})$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et soit $Q \in M_p(\mathbf{C})$ de spectre $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ (on a donc pris en compte les multiplicités). Alors l'endomorphisme $\Phi_{P,Q} : M \mapsto MP - QM$ de $M_{p,n}(\mathbf{C})$ admet pour spectre $\{\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_n - \mu_p\} = \{\lambda_i - \mu_j \ , \ 1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq j \leq p\}$.

Preuve. - (de la proposition.) On développe en série entière $A = A_0 + zA_1 + \cdots$. L'égalité $F\{A(0)\} = A$ équivaut à $\delta F + FA_0 = AF$, laquelle se traduit, par identification des coefficients, en les relations :

$$\forall k \geq 0 \ , \ kF_k + F_k A_0 = \sum_{i+j=k} A_i F_j.$$

Pour $k = 0$, cette relation est vérifiée puisque $F_0 = I_n$. Pour $k \geq 1$, elle s'écrit :

$$\Phi_{A_0 + kI_n, A_0}(F_k) = \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j} F_j.$$

L'hypothèse de non résonnance dit que $\Phi_{A_0+kI_n,A_0}$ est inversible (c'est la conséquence du lemme laissé en exercice). On a donc bien une unique série formelle F, dont les coefficients sont définis par la récurrence :

$$\forall k \geq 1 \ , \ F_k = \left(\Phi_{A_0+kI_n,A_0}\right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j} F_j\right).$$

Lorsque $k \to \infty$, l'endomorphisme $\Phi_{A_0+kI_n,A_0}$ de $M_n(\mathbf{C})$ est équivalent (comme élément d'une suite dans un espace vectoriel normé) à l'endomorphisme $M \mapsto kM$, et son inverse est donc équivalent à $M \mapsto k^{-1}M$, qui est de norme k^{-1} (pour une norme subordonnée quelconque). Il existe donc un réel $C > 0$ tel que l'on ait les inégalités :

$$\forall k \geq 1 \ , \ ||F_k|| \leq \frac{C}{k} \sum_{j=0}^{k-1} ||A_{k-j}|| \, ||F_j||.$$

La fin de la preuve est alors similaire à celle du théorème 2.2.7 de Cauchy (en 2.2.2). $\square$

On prendra garde que cette convergence automatique est une propriété spécifique des équations fuchsiennes.

Exercice 3.3.9 Comme ce fut signalé par une lectrice attentive, la fin de cette démonstration est incorrecte : on n'obtient pas les minorations requises aussi facilement qu'en un point régulier. Sauriez-vous rectifier la preuve ? La solution est donnée dans l'examen de fin d'année.

Exercice 3.3.10 On considère le système $z^2 X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une unique transformation de jauge formelle de la forme $F = I_n + zF_1 + z^2 F_2 + \cdots$ telle que $F[z^{-2}A(0)] = z^{-2}A$, mais qu'elle ne converge pas.
Indication : le calcul devrait donner, pour $k \geq 1$, $F_k = \begin{pmatrix} 0 & -(k-1)! \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solutions canoniques des systèmes fuchsiens

Ici, on moissonne !

Théorème 3.3.11 *(i) Tout système fuchsien non résonnant* $\delta X = AX$ *admet une solution fondamentale multiforme canonique au voisinage de* 0 *de la forme* $F(z) z^{A(0)}$, *avec* $F \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$ *et* $F(0) = I_n$.
(ii) Tout système fuchsien $\delta X = AX$ *admet une solution fondamentale multiforme au voisinage de* 0 *de la forme* $F(z) z^{A_0}$, *avec* $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ *et* $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$.

Preuve. - La première assertion est conséquence directe de ce qui précède et de la résolution des systèmes fuchsiens standards. La deuxième vient de l'algorithme d'élimination des résonnances et du fait que le composé d'une transformation de Birkhoff et d'une transformation de jauge rationnelle est une transformation de jauge méromorphe. □

Remarque 3.3.12 Il découle de la remarque 3.3.5 que l'on peut imposer $Sp(A_0) \subset [0;1[+\imath\mathbf{R}$; mais, dans le cas d'un système non résonnant de matrice A, on n'a pas nécessairement $A_0 = A(0)$ pour ce choix de A_0.

3.3.2 Systèmes singuliers réguliers

Le fait d'être fuchsien n'est pas une propriété invariante par transformation de jauge méromorphe, alors que la forme obtenue pour les solutions (deuxième assertion) l'est.

Définition 3.3.13 Le système $\delta X = AX$ est dit *singulier régulier* s'il est équivalent à un système fuchsien par transformation de jauge méromorphe.

Remarque 3.3.14 Pour un système de rang 1, il n'y a pas de différence entre "fuchsien" et "singulier régulier". Supposons en effet que $\delta x = ax$ est méromorphiquement équivalent à $\delta y = by$. Il existe donc f non nulle et méromorphe au voisinage de 0 telle que $f\{a\} = b$, autrement dit, $b - a = (\delta f) f^{-1} = zf'/f$. Mais, quelque soit $f \in \mathbf{C}(\{z\})^*$, on a $zf'/f \in \mathbf{C}\{z\}$. Par conséquent, a est holomorphe en 0 si et seulement si b l'est.

Une équation peut être dite singulière régulière si le système associé est singulier régulier. Cependant, cette terminologie est transitoire, car nous verrons en 3.3.3 qu'elle est alors fuchsienne ; pour une équation d'ordre 1, c'est d'ailleurs le contenu de la remarque ci-dessus.

Les corollaires suivants des propriétés des systèmes fuchsiens sont immédiats.

Corollaire 3.3.15 *Tout système singulier régulier $\delta X = AX$ admet une solution fondamentale multiforme au voisinage de 0 de la forme $F(z)z^{A_0}$, avec $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$.* □

Corollaire 3.3.16 *Soit $\mathcal{X}$ une solution fondamentale quelconque d'un tel système ; alors $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^{-1}$ sont à croissance modérée dans les secteurs.* □

Corollaire 3.3.17 *Toutes les solutions d'un tel système sont à croissance modérée dans les secteurs.* □

Application au cas des équations

Naturellement, ces résultats s'appliquent en particulier aux équations fuchsiennes. Comme nous en aurons l'usage lors de la preuve du théorème 3.3.29, nous allons en tout cas prouver la forme faible ci-dessous d'un théorème beaucoup plus précis.

Corollaire 3.3.18 *Toute équation singulière régulière admet une base fondamentale de solutions dont l'une au moins est de la forme $u(z)z^{\alpha}$, où u est holomorphe et $u(0) = 1$.*

Preuve. - Le système associé admet une solution fondamentale de la forme $F(z)z^{A_0}$. On a $A_0 = PB_0P^{-1}$, où B_0 est triangulaire supérieure, d'où une autre solution fondamentale $G(z)z^{B_0}$, avec $G(z) = F(z)P$. Sa première colonne est de la forme $z^{\beta}\times$ un vecteur colonne méromorphe, et sa première ligne est une base de solutions de l'équation. On a donc une solution de la forme $v(z)z^{\beta}$ où v est méromorphe non triviale. On écrit alors $v = az^k u$ avec $a \in \mathbf{C}^*$, $u(0) = 1$, et $\alpha = \beta + k$. □

Remarque 3.3.19 En fait, " génériquement", *tous* les éléments de la base fondamentale peuvent être pris de cette forme : en effet, c'est le cas dès que A_0 est semi-simple.

Exercice 3.3.20 En mettant A_0 sous forme de Jordan dans le calcul ci-dessus, donner la description complète d'une base fondamentale.

Exemple 3.3.21 Soit $n = 2$. Génériquement, A_0 est semi-simple, et l'on peut supposer :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ d'où } z^{A_0} = \begin{pmatrix} z^\alpha & 0 \\ 0 & z^\beta \end{pmatrix},$$

et il y a une base de solutions de la forme $(z^\alpha u, z^\beta v)$, avec u et v méromorphes. Si A_0 n'est pas semi-simple, elle a une seule valeur propre et l'on peut supposer :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ d'où } z^{A_0} = z^\alpha \begin{pmatrix} 1 & \log z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et il y a une base de solutions de la forme $(z^\alpha u, z^\alpha(v + w \log z))$, avec u, v et w méromorphes.

Le théorème plus précis évoqué plus haut s'obtient au prix d'une étude assez compliquée et dont nous nous abstiendrons. La principale difficulté est ici de lire la forme des solutions sur l'équation de départ, même dans le cas où la matrice du système associé est résonnante. On trouvera une discussion détaillée des équations d'ordre 2 dans [1], chap. 8, §4 et dans [54], chap. 2, §4 ; le cas général est abordé dans [26], chap. 1, §3 et très détaillé (mais en style ancien) dans [25], part II, chap. 16. On reviendra cependant un peu plus en détail sur le cas des équations à la fin de ce chapitre.

Monodromie locale

Il s'agit de la représentation de monodromie associée au système local des solutions sur D^* : le groupe fondamental (basé en n'importe quel point) est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et le groupe de monodromie est donc monogène de générateur l'automorphisme ϕ qui, à la solution fondamentale $\mathcal{X}(z)$ associe $\mathcal{X}(ze^{2\imath\pi})$.

Proposition 3.3.22 *Le groupe de monodromie exprimé relativement à la base des colonnes de $\mathcal{X}(z) = F(z)z^{A_0}$, est engendré par la matrice $e^{2\imath\pi A_0}$.* □

Le *problème inverse* sous sa forme générale sera formulé au chapitre 4, mais nous pouvons déjà en aborder un cas simple.

Corollaire 3.3.23 *Le problème inverse admet ici une solution unique à équivalence méromorphe près.*

Preuve. - Toute représentation du groupe fondamental de D^* provient d'un système fuchsien standard. En effet, pour toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbf{C})$, il existe $A_0 \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $e^{2\imath\pi A_0} = M$, comme cela découle de l'exercice 3.3.26 ci-dessous.

Par ailleurs, si deux systèmes singuliers réguliers $\delta X = AX$ et $\delta Y = BY$ définissent des représentations conjuguées, ils ont des solutions fondamentales respectives $\mathcal{X}(z)$ et $\mathcal{Y}(z)$ dont les monodromies sont décrites par : $\mathcal{X}(ze^{2\imath\pi}) = \mathcal{X}(z)M$ et $\mathcal{Y}(ze^{2\imath\pi}) = \mathcal{Y}(z)N$, les matrices de monodromie $M, N \in GL_n(\mathbf{C})$ étant conjuguées : $N = PMP^{-1}$, $P \in GL_n(\mathbf{C})$. Alors $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}P$ est une solution fondamentale du deuxième système et sa matrice de monodromie est M, car :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(ze^{2\imath\pi}) &= \mathcal{Y}(ze^{2\imath\pi})P \\ &= \mathcal{Y}(z)NP \\ &= \mathcal{Z}(z)P^{-1}NP \\ &= \mathcal{Z}(z)M. \end{aligned}$$

Alors la matrice multiforme $F = \mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}$ admet pour transformation par monodromie :

$$\begin{aligned} F(ze^{2\imath\pi}) &= \mathcal{Z}(ze^{2\imath\pi})\left(\mathcal{X}(ze^{2\imath\pi})\right)^{-1} \\ &= \mathcal{Z}(z)M\left(\mathcal{X}(z)M\right)^{-1} \\ &= \mathcal{Z}(z)\left(\mathcal{X}(z)\right)^{-1} \\ &= F(z). \end{aligned}$$

Elle est donc uniforme. Comme, par hypothèse, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{X}^{-1}$ sont à croissance modérée dans les secteurs, F l'est également, donc elle est méromorphe. Enfin, la relation $F(z)\mathcal{X}(z) = \mathcal{Z}(z)$ implique que les deux systèmes sont méromorphiquement équivalents. En effet, en dérivant (avec δ), on calcule :

$$F\delta\mathcal{X} + (\delta F)\mathcal{X} = \delta\mathcal{Y} \Rightarrow (FA + \delta F)\mathcal{X} = B\mathcal{Y} = (BF)\mathcal{X} \Rightarrow F\{A\} = B.$$

□

Remarque 3.3.24 Pour la deuxième partie de la preuve, on aurait pu tenter le raisonnement suivant. Les deux systèmes considérés ont respectivement des solutions fondamentales de la forme $\mathcal{X}(z) = F(z)z^{A_0}$ et $\mathcal{Y}(z) = G(z)z^{B_0}$, avec $B_0 = P^{-1}A_0P$. On a alors :

$$G(z)z^{B_0} = \left(G(z)P^{-1}F(z)^{-1}\right)\left(F(z)z^{A_0}\right)P,$$

ce qui montre que la transformation de jauge méromorphe $G(z)P^{-1}F(z)^{-1}$ envoie un système sur l'autre. Pour que ce raisonnement soit correct, il faut savoir que, si les matrices de monodromie $e^{2\imath\pi A_0}$ et $e^{2\imath\pi B_0}$ sont conjuguées, alors leurs "logarithmes" A_0 et B_0 le sont aussi. Mais ce n'est nullement vrai en général (par exemple, 0 et $2\imath\pi I_n$ ont même exponentielle I_n mais ne sont pas conjuguées). C'est vrai si l'on suppose, par exemple, que toutes les valeurs propres de A_0 et B_0 ont leur partie réelle dans $[0;1[$ (voir ce qui concerne *l'étoile* de l'exponentielle de matrices dans [33]).

Remarque 3.3.25 L'unicité à équivalence méromorphe près n'est valable que parce que l'on s'est restreint à la classe des systèmes singuliers réguliers. Par exemple, les équations $\delta f = 0$ et $\delta f = f/z$ ont respectivement pour bases de solutions 1 et $e^{-1/z}$ qui sont toutes deux uniformes ; les représentations de monodromie sont donc triviales, mais ces systèmes ne sont pas méromorphiquement équivalents.

Exercice 3.3.26 Démontrer que l'application exponentielle de $M_n(\mathbf{C})$ dans $GL_n(\mathbf{C})$ est surjective et que, si l'on se restreint aux matrices dont toutes les valeurs propres sont dans $[0;1[+\imath\mathbf{R}$, elle est injective. *Indication : utiliser la décomposition de Dunford multiplicative.*

Exercice 3.3.27 Exprimer et étendre le corollaire en termes d'équivalence de catégories.

3.3.3 Le critère de croissance de Fuchs

Nous avons vu qu'en imposant une condition algébrique simple aux pôles des coefficients d'une équation ou d'un système (fuchsianité), on obtenait une description explicite de ses solutions, ainsi qu'une caractérisation de leur type de croissance en 0. Un résultat frappant dû à Fuchs dit que cette condition de croissance implique réciproquement la fuchsianité dans le cas des équations, la régulière singularité dans le cas des systèmes.

Cas des systèmes

Théorème 3.3.28 *Le système différentiel $\delta X = AX$ admet une solution fondamentale à croissance modérée en 0 (et donc toutes) si et seulement si il est singulier régulier.*

Preuve. - Une seule implication reste à démontrer. Nous choisissons donc une solution fondamentale multiforme $\mathcal{X}$ à croissance modérée. Celle-ci admet une matrice de monodromie $M \in GL_n(\mathbf{C})$, autrement dit, $\mathcal{X}(ze^{2\imath\pi}) = \mathcal{X}M$. Soit $A_0 \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $e^{2\imath\pi A_0} = M$ (voir l'exercice 3.3.26). Alors la matrice multiforme $F(z) = \mathcal{X}(z)z^{-A_0}$ admet pour transformation par monodromie :

$$\begin{aligned} F(ze^{2\imath\pi}) &= \mathcal{X}(ze^{2\imath\pi})(ze^{2\imath\pi})^{-A_0} \\ &= \mathcal{X}Me^{-2\imath\pi A_0}z^{-A_0} \\ &= \mathcal{X}(z)z^{-A_0} \\ &= F(z). \end{aligned}$$

Elle est donc uniforme. Comme elle est, par hypothèse, à croissance modérée dans les secteurs, elle est méromorphe. Enfin, la relation $F(z)z^{A_0} = \mathcal{X}(z)$ implique $F\{A_0\} = A$ (on le voit en dérivant l'égalité, etc ...) et notre système est bien méromorphiquement équivalent à un système fuchsien standard. □

Cas des équations

Dans le cas des équations, on peut obtenir un résultat plus précis, mais il faut un peu plus d'astuce.

Théorème 3.3.29 *L'équation différentielle $P(\delta)(f) = 0$, où l'on note $P(\delta) = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + \cdots + a_n$, admet une base fondamentale de solutions à croissance modérée (et donc toutes) si et seulement si elle est fuchsienne, autrement dit, les a_i sont holomorphes en 0.*

Preuve. - Encore une fois, seule une implication reste à démontrer. Nous allons établir le résultat par récurrence sur n. Remarquons que le cas du rang 1 découle du théorème correspondant pour les systèmes 3.3.28, en vertu de la remarque 3.3.14. Passons au cas général d'une équation d'ordre n.

Nous supposons donc que notre équation admet une base fondamentale de solutions $(f_1, \ldots, f_n)$ à croissance modérée. D'après la proposition 3.1.26, leur matrice wronskienne est à croissance modérée. Or, c'est une solution fondamentale du système associé, qui est donc singulier régulier, d'après le théorème 3.3.28. D'après 3.3.18, il admet une base fondamentale de solutions $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que f_1 s'écrit uz^α avec u holomorphe et $u(0) = 1$ (les f_i étant d'ailleurs toutes à croissance modérée).

L'opérateur différentiel $f_1^{-1}P(\delta)f_1$ est unitaire et, appliqué à la fonction constante 1, il donne 0. Il n'a donc pas de "terme constant" (en δ^0) et l'on peut donc écrire $f_1^{-1}P(\delta)f_1 = R(\delta)\delta$, avec $R(\delta) = \delta^{n-1} + b_1\delta^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$. Il résulte du lemme qui suit cette démonstration que les coefficients b_i sont méromorphes.

Les fonctions $\delta(f_2/f_1), \ldots, \delta(f_n/f_1)$ sont toutes solutions de $R(\delta)(g) = 0$ par construction. Elles sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendantes car $f_1, \ldots, f_n$ le sont. Elles sont toutes à croissance modérée (car $1/f_1$ l'est). L'opérateur $R(\delta)$ est donc fuchsien par hypothèse de récurrence, et les b_i sont holomorphes. Il résulte alors du lemme déjà cité que les a_i sont holomorphes. □

Lemme 3.3.30 *Soit $f = uz^\alpha$, où u est holomorphe et $u(0) = 1$. Soient $P(\delta) = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + \cdots + a_n$ et $Q(\delta) = \delta^n + b_1\delta^{n-1} + \cdots + b_n$ deux opérateurs conjugués par f : $P(\delta) = fQ(\delta)f^{-1}$. Alors les a_i sont méromorphes (resp. holomorphes) si et seulement si les b_i le sont.*

Preuve. - Les deux opérateurs jouent un rôle symétrique, puisque f^{-1} vérifie les mêmes hypothèses que f. Il suffit donc dans chaque cas de démontrer une implication. D'après l'exercice 3.1.5, on a la formule :

$$Q(\delta) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\frac{P^{(i)}(\delta)(f)}{f}\delta^i.$$

On vérifie par ailleurs facilement, à l'aide de la formule de Leibniz, que les $\delta^k(f)/f$ sont des fonctions holomorphes (uniformes). La conclusion est alors facile. □

Corollaire 3.3.31 *Une équation différentielle est singulière régulière si et seulement si elle est fuchsienne.* □

3.3.4 Retour sur la résolution des équations (fragment)

Etude directe

Une variante des résultats (partiels) de ce chapitre s'obtient en raisonnant directement sur l'équation $P(\delta)(f) = 0$. Si l'on veut une solution de la forme $z^\alpha u$, avec u série convergente telle que $u(0) = 1$, il faut que l'opérateur différentiel $Q(\delta) = z^{-\alpha}P(\delta)z^\alpha$ vérifie $Q(\delta)(u) = 0$. D'après l'exercice 3.1.5, on a :

$$Q(\delta) = z^{-\alpha}P(\delta)z^\alpha = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}P^{(i)}(\alpha)\delta^i.$$

En effet, z^α est vecteur propre de δ de valeur propre α, et c'est alors un calcul classique de polynôme de **C**-endomorphismes qui donne :

$$P^{(i)}(\delta)(z^\alpha) = P^{(i)}(\alpha)z^\alpha.$$

Notons $\overline{P}$, $\overline{Q}$ les polynômes à coefficients constants obtenus en substituant $z = 0$ dans les coefficients de P et de Q ; ainsi :

$$\overline{P}(\alpha) = \overline{Q}(0) = \alpha^n + a_1(0)\alpha^{n-1} + \cdots + a_n(0).$$

Si l'on substitue $z = 0$ dans la relation $Q(\delta)(u) = 0$, on obtient donc la condition *nécessaire* à l'existence d'une solution de la forme requise :

$$\overline{P}(\alpha) = 0.$$

C'est l'équation caractéristique.

Définition 3.3.32 Soit $P(\delta)(f) = \delta^n(f) + a_1\delta^{n-1}(f) + \cdots a_n f$ un opérateur fuchsien (les a_i sont donc holomorphes). On appelle *équation caractéristique* associée l'équation $\overline{P}(\alpha) = 0$, où $\overline{P}$ désigne le polynôme unitaire à coefficients constants :

$$\overline{P}(r) = r^n + a_1(0)r^{n-1} + \cdots + a_0(0).$$

Les racines de l'équation caractéristique sont les *exposants* de l'équation.

Petit formulaire sur l'équation caractéristique

Les calculs ci-dessus montrent que, si $Q(\delta) = z^{-\alpha}P(\delta)z^\alpha$, alors $\overline{Q}(r) = \overline{P}(r+\alpha)$ et l'on a les relations logiques suivantes :

$$\begin{aligned} P(\delta)(f) = 0 \text{ admet une solution } z^\alpha u \text{ t.q. } u(0) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad Q(\delta)(u) = 0 \text{ admet une solution } u \text{ t.q. } u(0) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \overline{Q}(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{P}(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Si l'on tente de résoudre $Q(\delta)(u) = 0$ en posant $u = 1 + u_1 z + \cdots$, on obtient une relation de récurrence pour les u_k de la forme :

$$\forall k \geq 1 \text{ , } \overline{Q}(k)\, u_k = \text{ combinaison linéaire de } u_0, \ldots, u_{k-1}.$$

On constate qu'elle peut être résolue si $Q(k) \neq 0$ pour $k \in \mathbf{N}^*$, autrement dit si aucun $\alpha + k$, $k \in \mathbf{N}^*$ n'est racine de l'équation caractéristique associée à P.

Définition 3.3.33 Un exposant α de $P(\delta)$ est dit *non résonnant* si aucun $\alpha + k$, $k \in \mathbf{N}^*$ n'est un exposant.

Dans ce cas, il y a une unique série formelle u telle que $u(0) = 1$ et $f = z^\alpha u$ est solution de $P(\delta)(f) = 0$.

Exercice 3.3.34 Cette série converge.

Dans le cas contraire (d'un exposant résonnant),il faut faire intervenir des logarithmes.

Exercice 3.3.35 L'exemple classique d'équation irrégulière pour laquelle ces résultats sont en défaut est celui de la *série d'Euler* :

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k! z^{k+1}.$$

Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle non fuchsienne :

$$z\delta^2(f) - \delta(f) + f = 0.$$

Vérifier que c'est sa seule solution de la forme $z^\alpha u$, avec u série formelle telle que $u(0) = 1$. Chercher d'autres solutions par variation des constantes.
Indication : on devrait trouver $f_0^{-2} e^{-1/z}$.

Les notations ci-dessus sont adaptées à l'étude en 0. Si l'on veut étudier l'équation en d'autres points de $\mathbf{C}$, il vaut mieux l'écrire à l'aide de la dérivation $D = d/dz$ puis faire la translation. En revanche, l'étude en ∞ est facilitée par la remarque :

$$\delta_w \underset{def}{=} wd/dw = -zd/dz = -\delta.$$

Cela entraine que, écrit dans la carte à l'infini $w = 1/z$, notre opérateur différentiel devient (au signe près) :

$$\delta_w^n - a_1(w^{-1})\delta_w^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(w^{-1}).$$

L'équation est donc fuchsienne à l'inini si tous les a_i y sont holomorphes (autrement dit, bornés) et l'équation caractéristique y est la suivante :

$$r^n - a_1(\infty) r^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(\infty) = 0.$$

Exemple 3.3.36 A titre d'exemple qui nous sera utile plus tard (lors de l'étude de l'équation hypergéométrique), nous illustrons ces calculs sur l'équation générale d'ordre 2 :

$$D^2 f + pDf + qf = 0.$$

Elle est fuchsienne en $a \in \mathbf{C}$ si et seulement si ses coefficients y admettent des développements de Laurent :

$$p(z) = \frac{p_a}{z-a} + \cdots$$

et

$$q(z) = \frac{q_a}{(z-a)^2} + \cdots.$$

Autrement dit, $(z-a)p$ et $(z-a)^2 q$ sont définis en a et y valent respectivement p_a et q_a. Des relations entre D et $(z-a)D$, on déduit alors l'équation caractéristique :

$$r(r-1) + p_a r + q_a = r^2 + (p_a - 1)r + q_a = 0.$$

De même, l'équation est fuchsienne en ∞ si, *primo*, $(zp)(\infty)$ est bien défini ; on notera $p_\infty = 2 - (zp)(\infty)$, *secundo*, $(z^2 q)(\infty)$ est bien défini ; on notera $q_\infty = (z^2 q)(\infty)$. L'équation différentielle en ∞ s'écrit alors :

$$g''(w) + (\frac{p_\infty}{w} + \cdots)g'(w) + (\frac{q_\infty}{w^2} + \cdots)g(w) = 0,$$

et l'équation caractéristique :

$$r(r-1) + p_\infty r + q_\infty = r^2 + (p_\infty - 1)r + q_\infty = 0.$$

Exercice 3.3.37 On suppose que l'équation $D^2 f + pDf + qf = 0$ est fuchsienne en toutes ses singularités $\{a_0, \ldots, a_m, a_{m+1} = \infty\}$. On note α_i, β_i ses exposants en a_i, $i = 0, \ldots, m+1$. Démontrer la *relation de Fuchs* :

$$\sum_{i=0}^{m+1} (\alpha_i + \beta_i) = m.$$

Indication : on appliquera la formule des résidus à $\int_C p(z)\, dz$ calculé sur un contour $C \subset \mathbf{C}$ qui contient tous les pôles de $p(z)$ à distance finie, puis en utilisant le changement de variable $w = 1/z$, de façon à ce que le contour contiennent seulement le pôle à l'infini ; on en déduira (avec les notations de l'exemple ci-dessus) que $p_\infty = 2 - \sum p_a$. On pourra également consulter [54], chap. 2, §2.6 ou [26], chap. 1, §1.4.

Exercice 3.3.38 On considère l'équation $f' = af$, où a est méromorphe sur $\mathbf{S}$. On suppose cette équation fuchsienne en toutes ses singularités. Montrer que a sécrit $\sum \frac{a_k}{z - z_k}$. En déduire les exposants en tous les points singuliers et formuler les *relations de Fuchs* entre ces exposants.
Indication : a est une fonction rationnelle.

Résolution via la factorisation

Les calculs du théorème 3.3.29 fournissent facilement un résultat de factorisation pour les opérateurs fuchsiens.

Proposition 3.3.39 *Soit $P(\delta) = \delta^n + b_1 \delta^{n-1} + \cdots + b_n$ un opérateur différentiel fuchsien. On peut alors le factoriser en produit d'opérateurs fuchsiens d'ordre 1 :*

$$P(\delta) = (\delta - \phi_1) \cdots (\delta - \phi_n),$$

les ϕ_i étant holomorphes en 0.

Preuve. - On reprend les calculs du théorème 3.3.29. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(\delta) &= f_1\, R(\delta)\delta\, f_1^{-1} \\ &= \left(f_1 R(\delta) f_1^{-1}\right)\left(f_1 \delta f_1^{-1}\right) \\ &= P_1(\delta)\left(f_1(f_1^{-1}\delta - \delta(f_1^{-1}))\right) \\ &= P_1(\delta)\left(\delta - \frac{\delta(f_1)}{f_1}\right). \end{aligned}$$

Ici, $P_1(\delta)$ est un opérateur différentiel fuchsien d'ordre $n-1$ et $\frac{\delta(f_1)}{f_1}$ est holomorphe. La conclusion s'ensuit par récurrence. □

Exercice 3.3.40 Exprimer l'équation caractéristique à l'aide des ϕ_i.

A titre d'application de cette factorisation, nous allons étudier (en première approche) la résolution d'une équation différentielle fuchsienne d'ordre 2. Nous écrivons celle-ci sous la forme :

$$(\delta - \psi)(\delta - \phi)(f) = 0.$$

Nous écrivons les fonctions holomorphes ϕ et ψ sous la forme $\phi = \alpha + z\Phi'$, $\psi = \beta + z\Psi'$, où $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ et Φ, Ψ sont holomorphes et telles que $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$.

Posant $g = (\delta - \phi)(f)$, on doit d'abord résoudre $(\delta - \psi)(g) = 0$, ce qui donne $g = cz^\beta e^\Psi$, $c \in \mathbf{C}$, puis résoudre $(\delta - \phi)(f) = g$ dans les cas $c = 0$ et $c = 1$ (le reste s'en déduit). Le cas $c = 0$ équivaut à $(\delta - \phi)(f) = 0$, donc à $f \in \mathbf{C} f_0$, où $f_0 = z^\alpha e^\Phi$ (cela fournit un premier élément d'une base fondamentale).

Dans le cas où $c = 1$, on résoud le système avec second membre $(\delta - \phi)(f) = z^\beta e^\Psi$ par variation des constantes : on pose $f = f_0 h = z^\alpha e^\Phi h$. Cette équation équivaut à $\delta(h) = z^\gamma U$, où $\gamma = \beta - \alpha$ et $U = e^{\Psi - \Phi}$ est une fonction holomorphe telle que $U(0) = 1$.

Si $\gamma \notin \mathbf{Z}$, on trouve $h = z^\gamma V$, avec V holomorphe définie à partir de U par identification des coefficients des développements en série entière : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $V_n = \frac{U_n}{\gamma+n}$. Finalement, notre équation admet pour base fondamentale (f_0, f_1), où $f_1 = z^\beta e^\Phi V$, ce que l'on peut abréger en $(z^\alpha \times \text{ holomorphe } , z^\beta \times \text{ holomorphe })$.

Si $\gamma \in \mathbf{Z}$, il y a *résonnance* et l'on ne peut pas toujours résoudre comme ci-dessus. Par exemple, si $\gamma = 0$, c'est-à-dire (dans les notations de départ), si $\phi(0) = \psi(0)$, on doit résoudre : $zh' = 1 + zU_1 + \cdots$, ce qui donne $h = \log z + \text{ holomorphe }$ et le second membre de notre base fondamentale sera de la forme $f_1 = z^\alpha(\log z + \text{ holomorphe })$. La discussion générale est laissée à la patience du lecteur.

Résolution via le système associé

Nous considérons à nouveau l'opérateur fuchsien $P(\delta)(f) = \delta^n(f) + a_1\delta^{n-1}(f) + \cdots a_n f$ (les a_i sont donc holomorphes) et l'équation fuchsienne correspondante $P(\delta)(f) = 0$. Le système fuchsien associé a pour matrice $A_{\underline{a}}$ et le polynôme caractéristique de $A_{\underline{a}}(0)$ est (au signe près) $\overline{P}$.

Nous supposerons ce système non résonnant et la matrice $A_{\underline{a}}(0)$ semi-simple ("cas générique"). Cela signifie que l'équation caractéristique admet n racines distinctes et deux à deux non congrues modulo $\mathbf{Z}$. Ces racines sont les valeurs propres de $A_{\underline{a}}(0)$. Ce sont donc les exposants aussi bien du système que de l'équation.

Proposition 3.3.41 *Dans le cas générique, l'équation admet une base de solutions de la forme* $(z^{\alpha_1}u_1, \ldots, z^{\alpha_n}u_n)$, *où les exposants* α_i *sont des complexes distincts et deux à deux non congrus modulo* $\mathbf{Z}$ *et où les* u_1 *sont des fonctions holomorphes en* 0 *et telles que* $u_i(0) = 1$.

Preuve. - C'est une conséquence directe de 3.3.2. □

Corollaire 3.3.42 *La matrice de monodromie exprimée dans la base ci-dessus est la matrice diagonale de coefficients* $(e^{2\imath\pi\alpha_1}, \ldots, e^{2\imath\pi\alpha_n})$.

Nous terminons ce chapitre par une initiation allusive à la théorie de Galois différentielle.

Exercice 3.3.43 Les fonctions multiformes holomorphes dans D^* forment une $O(D^*)$-algèbre intègre (par connexité) sur laquelle une dérivation est définie. Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre engendrée par les solutions d'une équation fuchsienne $P(\delta)(f) = 0$ et leurs dérivées.
(i) Démontrer que $\mathcal{A}$ est stable par l'action de monodromie. Démontrer de plus que le groupe fondamental y opère par automorphismes différentiels qui induisent l'identité sur $O(D^*)$. Notons G le groupe de tous ces automorphismes (c'est le *groupe de Galois différentiel*).
(ii) On choisit une base fondamentale de solutions de l'équation. Vérifier que l'effet de tout élément de G sur cette base est la multiplication à droite par une matrice constante, et en déduire un antihomomorphisme du groupe G dans le groupe linéaire $GL_n(\mathbf{C})$; ce morphisme est injectif et son image contient le groupe de monodromie.
(iii) Tout ce qui précède se démontre sans trop de peine dans le cas général, mais, pour les assertions qui suivent, il vaudra mieux se cantonner au cas "générique" (celui où l'équation caractéristique admet n racines deux à deux distinctes et non congrues modulo $\mathbf{Z}$). Démontrer qu'alors l'image de G dans $GL_n(\mathbf{C})$ est *le plus petit sous-groupe algébrique de* $GL_n(\mathbf{C})$ *qui contient le groupe de monodromie*. C'est le *théorème de Schlesinger*, et il n'est pas valable pour les équations non fuchsiennes.
Indication : consulter [38].

Chapitre 4

Du local au global (et ce qu'on y trouva)

Prélude

On fixe des points singuliers $z_0, \dots, z_m \in \mathbf{C}$ en lesquels on veut des monodromies locales de matrices $M_0, \dots, M_m \in GL_n(\mathbf{C})$ (c'est le problème de Riemann-Hilbert). On choisit donc des matrices $A_0, \dots, A_m \in M_m(\mathbf{C})$ telles que $e^{2\imath\pi A_k} = M_k$. On peut même imposer que $Sp(A_k) \subset [0;1[+\imath\mathbf{R}$ (donc, pas de résonnances). On considère le système :

$$\frac{dX}{dz} = \left(\frac{A_0}{z - z_0} + \cdots + \frac{A_m}{z - z_m}\right) X,$$

qui est donc régulier sur $\mathbf{C} \setminus \{z_0, \dots, z_m\}$ et fuchsien en chaque z_k. Comme il n'y a pas de résonnance, la monodromie en z_k est $e^{2\imath\pi A_k} = M_k$, et le problème est résolu.

En ∞, le système s'écrit :

$$\frac{dY}{dw} = \left(-\frac{\sum_{k=0}^{m} A_k}{w} + \cdots\right) Y,$$

et, génériquement, ce système est fuchsien non résonnant de monodromie $e^{-2\imath\pi \Sigma A_k}$. Comme le lacet autour de ∞ est, à homotopie près, l'inverse du produit des lacets autour des z_k, la monodromie M_{m+1} autour de $z_{m+1} = \infty$ est l'inverse du produit des monodromies M_k autour des z_k, et l'on obtient la relation inespérée :

$$e^{2\imath\pi \Sigma A_k} = \prod e^{2\imath\pi A_k}.$$

Cette formule a malheureusement toutes les chances d'être fausse.

En réalité, composer des isomorphismes (ou des matrices) de monodromie en ne précisant ni point-base ni base de solution n'a *aucun sens*. En l'absence de ces précisions, les matrices de monodromie sont connues *à conjugaison près* et la relation entre matrices qui se déduit de la relations entre lacets devrait avoir la forme :

$$\prod_{k=0}^{m} (C_k M_k C_k^{-1}) = M_{m+1}^{-1},$$

où l'on a noté M_{m+1} "la" matrice de monodromie en ∞..

Cependant, si $m = 0$, le groupe fondamental est commutatif et si $n = 1$, c'est le groupe des matrices qui l'est. Dans ces deux cas, ce qui précède marche sans problème, comme cela découle du chapitre précdent.

Le premier cas non trivial (non abélien) est celui où $m = 1$ (trois points singuliers, en comptant ∞) et $n = 2$. On l'étudiera en détail dans la première partie de ce chapitre, plutôt (pour respecter l'origine historique de la question) en termes d'équations d'ordre 2. Dans la deuxième partie du chapitre, on se reposera proprement le problème de Riemann-Hilbert.

4.1 Séries, fonctions, équations hypergéométriques

4.1.1 Des équations de Riemann aux équations hypergéométriques

Selon l'exemple 3.3.36, l'équation $f'' + pf' + qf = 0$ est fuchsienne en $a \in \mathbf{C}$ si et seulement si $(z-a)p(z)$ et $(z-a)^2 q(z)$ y sont bien définies ; nous noterons p_a, q_a leurs valeurs respectives. L'équation est fuchsienne en ∞ si et seulement si $zp(z)$ et $z^2 q(z)$ y sont bien définies ; nous noterons $2 - p_\infty$ et q_∞ leurs valeurs respectives. Les exposants α_a, β_a en $a \in \mathbf{S}$ sont les racines de l'équation caractéristique $r^2 + (p_a - 1)r + q_a = 0$. On a donc $\alpha_a + \beta_a = 1 - p_a$ et $\alpha_a \beta_a = q_a$.

Riemann note $P \begin{bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{bmatrix}$ une équation du second ordre sur $\mathbf{S}$, fuchsienne en a, b, c d'exposants respectifs $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ et régulière sur $\mathbf{S} \setminus \{a, b, c\}$; *ou bien* un élément quelconque de l'espace des solutions de cette équation. Nous l'interpréterons plutôt comme l'espace des solutions (multiformes, ou bien sur un ouvert simplement connexe convenablement choisi).

Modulo une homographie, on peut aussi bien supposer que $a = 0$, $b = 1$ et $c = \infty$, ce que nous ferons désormais (mais voir [43], [1], [26], [54] ... pour le cas général).

Exercice 4.1.1 Soit l'équation $f'' + pf' + qf = 0$, supposée fuchsienne en $0, 1, \infty$ et régulière ailleurs. On a alors nécessairement :

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + \frac{p_1}{z-1} \quad \text{et} \quad p_\infty = 2 - p_0 - p_1$$
$$q(z) = \frac{q_0}{z^2} + \frac{q_1}{(z-1)^2} + \frac{q_2}{z(z-1)} \quad \text{et} \quad q_\infty = q_0 + q_1 + q_2.$$

Exercice 4.1.2 Définir de manière analogue $P \begin{bmatrix} 0 & \infty & \\ & & ;z \\ \alpha & -\alpha & \end{bmatrix}$ et $P \begin{bmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & 0 & ;z \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$ et expliciter les équations et solutions correspondantes.

Indication : on retombe sur les caractères et le logarithme.

En accord avec la notation du *schéma de Riemann*, nous noterons $P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_\infty & ;z \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_\infty & \end{bmatrix}$ cette équation. Elle est complètement déterminée par les exposants α_a, β_a , $a \in \{0, 1, \infty\}$, qui sont six complexes contraints par la seule relation :

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty + \beta_0 + \beta_1 + \beta_\infty = 1 \text{ (\textit{relation de Fuchs})}.$$

On a vu qu'en conjuguant un opérateur fuchsien par $(z-a)^\alpha$, on retombe sur un opérateur fuchsien. Ses exposants en a sont diminués de α, ses exposants en ∞ sont augmentés de α (et ailleurs, ils ne changent pas). Prenant successivement $a = 0, 1$, cela se traduit par la relation :

$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_\infty & ;z \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_\infty & \end{bmatrix} = z^\alpha (1-z)^{\alpha'} P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 - \alpha & \alpha_1 - \alpha' & \alpha_\infty + \alpha + \alpha' & ;z \\ \beta_0 - \alpha & \beta_1 - \alpha' & \beta_\infty + \alpha + \alpha' & \end{bmatrix}.$$

On peut voir cette relation comme une véritable égalité entre espaces de solutions, au choix, multiformes, ou définies sur un ouvert simplement connexe convenable (par exemple $\mathbf{C} \setminus (]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[)$ ou bien $\mathcal{H}$). On peut donc ramener l'étude générale des équations de Riemann à celle des équations pour lesquelles

$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Il reste donc quatre paramètres complexes de somme 1, et l'on vérifie sans peine que la forme générale d'un tel schéma est $P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ;z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{bmatrix}$. L'équation correspondante est :

$$(4.1.2.1) \qquad (E_{\alpha,\beta,\gamma}) \quad f''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right) f'(z) + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} f(z) = 0.$$

Définition 4.1.3 L'équation $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ est *l'équation hypergéométrique* de paramètres α, β, γ.

Symétries de l'équation hypergéométrique

Tout changement de coordonnées homographique transforme une équation de Riemann en une équation de Riemann :

$$P\begin{bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;gz \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{bmatrix}, \text{ où } g \in Aut(\mathbf{S}),\, a' = ga, b' = gb, c' = gc.$$

Considérons en particulier le sous-groupe Γ de $Aut(\mathbf{S})$ formé des homographies qui laissent $\{0,1,\infty\}$ globalement invariant ; en notation abrégée :

$$\Gamma = \{z, 1-z, \frac{1}{z}, \frac{z}{z-1}, 1-\frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}\}.$$

Il résulte *a priori* de la 3-transitivité de l'action de $Aut(\mathbf{S})$ sur $\mathbf{S}$ que Γ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$. Si $g \in \Gamma$, le changement de coordonnée ci-dessus transforme une équation de Riemann à singularités en $\{0,1,\infty\}$ en une équation de même type. Par exemple, pour les deux transformations non triviales les plus simples, on trouve :

$$P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_\infty & ;\frac{1}{z} \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_\infty & \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_\infty & \alpha_1 & \alpha_0 & ;z \\ \beta_\infty & \beta_1 & \beta_0 & \end{bmatrix} \text{ et } P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_\infty & ;1-z \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_\infty & \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_\infty & ;z \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_\infty & \end{bmatrix}$$

En appliquant cela à l'équation hypergéométrique et utilisant de plus les règles de conjugaison par z^α, on trouve, par exemple :

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta,\gamma}(1-z) &= P_{\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma}(z) \\ P_{\alpha,\beta,\gamma}(\frac{1}{z}) &= z^\alpha P_{\alpha,1-\gamma+\alpha,1-\beta+\alpha}(z) \\ &= z^\beta P_{\beta,1-\gamma+\beta,1-\alpha+\beta}(z). \end{aligned}$$

On a noté $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ le schéma de Riemann de l'équation hypergéométrique.

Une autre source de symétries provient de l'ambiguité dans le choix de l'exposant à annuler en 0 ou en 1 lorsque l'on ramène une équation de Riemann à une équation hypergéométrique. Par exemple :

$$P_{\alpha,\beta,\gamma} = z^{1-\gamma} P_{\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma}$$

Exercice 4.1.4 En exploitant toutes les symétries venant de l'action de Γ ou de l'ambiguité du choix d'exposant à annuler, construire les vingt-quatre solutions de Kummer à $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ et préciser leurs relations.
Indication : regarder dans [14], [19] ou [26], par exemple.

4.1.2 Des séries hypergéométriques aux équations hypergéométriques

Notons, pour tout complexe α :

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i).$$

Par exemple, $(1)_n = n!$ et, sous réserve que $\alpha \not\in -\mathbf{N}$, on a $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ (voir plus loin les rappels sur la fonction Gamma).

La série hypergéométrique d'Euler ou de Gauss est :

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} z^n.$$

On écarte les cas dégénérés $\gamma \in -\mathbf{N}$ (coefficients non définis sauf le premier) et α ou $\beta \in -\mathbf{N}$ (coefficients nuls à partir d'un certain rang, la série est un polynôme). Le rayon de convergence de cette série entière est donc 1.

Exercice 4.1.5 Reconnaitre $F(\alpha,\beta,\beta;z)$.
Indication : c'est la série binomiale $(1-z)^{-\alpha}$.

Les coefficients u_n de $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ (n+\alpha)(n+\beta)u_n = (n+1)(n+\gamma)u_{n+1}.$$

En vertu de la formule générale $P(\delta)(z^n) = P(n)z^n$ et de son corollaire $P(\delta)(\sum u_n z^n) = \sum P(n)u_n z^n$, la série hypergéométrique $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$[z(\delta+\alpha)(\delta+\beta) - \delta(\delta+\gamma-1)]F = 0.$$

Les règles de calcul (maintenant) bien connues sur $\delta = zD$ permettent de transformer cette équation en l'équation :

$$\left(D^2 + \frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}D - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}\right)F = 0.$$

Exercice 4.1.6 Déterminer ses point singuliers, montrer qu'elle y est fuchsienne et expliciter son schéma de Riemann.

En fait, un simple calcul de fractions rationnelles permet de reconnaitre l'équation hypergéométrique $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ (et de comprendre l'écriture particulière des exposants de celle-ci).

Proposition 4.1.7 *La série hypergéométrique* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *est solution de l'équation hypergéométrique* $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$. *Si de plus* $\gamma \not\in \mathbf{Z}$, *c'est (à un facteur constant près) son unique solution uniforme.*

Preuve. - Si $\gamma \not\in \mathbf{Z}$, on est dans le cas "générique" étudié en 3.3.4. □

HYPOTHÈSE : nous supposerons dorénavant que l'on est dans le cas "générique" (semi-simple non résonnant) en chacune des singularités $0,1,\infty$***, autrement dit :***

$$\gamma \not\in \mathbf{Z}\,,\ \alpha-\beta \not\in \mathbf{Z}\ \ \textit{et}\ \gamma-\alpha-\beta \not\in \mathbf{Z}.$$

Proposition 4.1.8 *Sous l'hypothèse ci-dessus, l'équation hypergéométrique* $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ *admet les bases de solutions locales suivantes :*

– *Au voisinage de* 0 *:*
$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) \text{ et } z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z).$$
– *Au voisinage de* 1 *:*
$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma;1-z) \text{ et } (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,1+\gamma-\alpha-\beta;1-z).$$
– *Au voisinage de* ∞ *:*
$$z^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}) \text{ et } z^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}).$$

Preuve. - On le déduit de 3.3.4 et des calculs de 4.1.1. □

En fait, chacune de ces six solutions a quatre expressions (ce sont les *vingt-quatre solutions de Kummer*, voir [14], [19] ou [26]). On va maintenant décrire leurs *monodromies locales*. Nous noterons $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_\infty$ les bases ci-dessus. Nous choisissons comme point-base $p = 1/2$ et comme générateurs libres du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C}\setminus\{0,1\},p) = \pi_1(\mathbf{S}\setminus\{0,1,\infty\},p)$ les classes d'homotopie des deux lacets γ_0 et γ_1 définis par les formules :

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= \frac{1}{2}e^{2\imath\pi t}\\ \gamma_1(t) &= 1-\frac{1}{2}e^{2\imath\pi t},\end{aligned}$$

et nous posons $\gamma_\infty = (\gamma_0.\gamma_1)^{-1}$.

Corollaire 4.1.9 *L'action de monodromie locale en chaque singularité est donnée par :*

$$M_0(\bar{\gamma}_0)(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\imath\pi\gamma}\end{pmatrix}.$$

$$M_1(\bar{\gamma}_1)(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\imath\pi(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}.$$

$$M_\infty(\bar{\gamma}_\infty)(\mathcal{B}_\infty) = \mathcal{B}_\infty\begin{pmatrix}e^{2\imath\pi\alpha} & 0\\ 0 & e^{2\imath\pi\beta}\end{pmatrix}.$$

Preuve. - En fait, chacun des lacets γ_a fait un tour dans le sens positif autour de a et l'on applique *loc. cit.*. □

Formule intégrale de Barnes

Il s'agit d'une autre façon d'obtenir des solutions de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$; nous nous contenterons de l'esquisser sans justifications complètes, renvoyant pour les détails à [14], chap. 2, §2.1.3, [15], chap.2, §10, [26], chap. 2, §2.3 et [53], chap. 14, §14.5. Elle repose sur la transformation de Mellin. Nous cherchons à exprimer une solution f de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ dans l'ouvert simplement connexe $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_+$ sous la forme :

$$f(z) = \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} g(s)(-z)^s\, ds.$$

Il faudra choisir un chemin d'intégration dans $\mathbf{C}$ de $-\imath\infty$ à $+\imath\infty$, déterminer quelles conditions sur la fonction $g(s)$ assurent que f est solution de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$, trouver la fonction g et vérifier que les calculs intermédiaires (intégration, dérivation sous le signe somme ...) ont un sens (ce que nous ne ferons pas). L'interêt d'écrire $f(z)$ sous la forme de *transformée de Mellin* de $g(s)$ vient de ce que les fonctions $(-z)^s$ sont des vecteurs propres de δ (valeur propre s) : c'est donc une sorte d'écriture dans une base de vecteurs propres. Les calculs qui suivent sont largement heuristiques.

Nous supposons que l'intégration a lieu le long d'un chemin C qui suit l'axe $\imath\mathbf{R}$ de $-\imath\infty$ jusqu'en un certain point, s'en écarte sur une distance finie puis y revient et le suit jusqu'en $+\imath\infty$. Ce chemin sera décrit précisément plus loin. Si la fonction g décroit suffisamment vite aux bornes de C, on a :

$$-z(\delta+\alpha)(\delta+\beta)\int_C g(s)(-z)^s\,ds = \int_C (s+\alpha)(s+\beta)g(s)(-z)^{s+1}\,ds$$

et

$$\delta(\delta+\gamma-1)\int_C g(s)(-z)^s\,ds = \int_C s(s+\gamma-1)g(s)(-z)^s\,ds = \int_{C-1}(s+1)(s+\gamma)g(s+1)(-z)^{s+1}\,ds.$$

Si l'on suppose de plus que le chemin C a été choisi tel qu'il n'y ait aucun pôle de $g(s)$ entre C et $C+1$ (donc aucun pôle de $g(s+1)$ entre $C-1$ et C), on a (Cauchy) :

$$\int_{C-1}(s+1)(s+\gamma)g(s+1)(-z)^{s+1}\,ds = \int_C (s+1)(s+\gamma)g(s+1)(-z)^{s+1}\,ds,$$

d'où :

$$[z(\delta+\alpha)(\delta+\beta)-\delta(\delta+\gamma-1)]\,f(z) = -\int_C [(s+\alpha)(s+\beta)g(s)+(s+1)(s+\gamma)g(s+1)]\,(-z)^{s+1}\,ds.$$

Ainsi, pour que $f(z)$ soit solution de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$, il *suffit* que g soit solution de l'*équation aux différences* :

$$(s+\alpha)(s+\beta)g(s)+(s+1)(s+\gamma)g(s+1) = 0.$$

Rappel ([8], chap. VII). - La fonction Gamma est définie, pour $Re(z)>0$, par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Elle admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$ et vérifie l'équation fonctionnelle : $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En tout $-k\in\mathbf{N}$ elle admet un pôle simple de résidu $\frac{(-1)^k}{k!}$. Elle ne s'annule pas.

De l'équation fonctionnelle, on tire que la fonction $\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}$ est un candidat pour jouer le rôle de $g(s)$. Son lieu singulier est $\mathbf{N}\cup(-\alpha-\mathbf{N})\cup(-\beta-\mathbf{N})$. On peut maintenant décrire le chemin d'intégration C. Il suit l'axe $\imath\mathbf{R}$ sauf en trois portions : il contourne $-\alpha-\mathbf{N}$ et $-\beta-\mathbf{N}$ par la droite ; il contourne $\mathbf{N}$ par la gauche, à distance >1 (pour qu'il n'y ait pas de pôles de g entre C et $C+1$).

Exercice 4.1.10 Justifier toutes les propriétés de convergence nécessaires.
Indication : on trouvera dans [8], chap. VII, §2.4, p. 17 l'estimation asymptotique de Stirling :

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\,exp(z\log z - z - \frac{1}{2}\log z),$$

(valable dans des domaines convenables) et, dans l'exercice 2 p. 21 : pour s fixé et t $\to +\infty$, *le cas particulier :* $\Gamma(s+\imath t) \sim \sqrt{2\pi}\,|t|^{s-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}$. *De nombreuses précisions figurent dans [53], chap. 13, §13.6.*

Théorème 4.1.11 *Outre les hypothèses en vigueur jusque là, on suppose ici que* $\alpha,\beta,\gamma,\gamma-\alpha,\gamma-\beta\notin\mathbf{Z}$. *On a alors la formule de Barnes :*

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{1}{2\imath\pi}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_C \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\,ds.$$

Preuve. - On peut prouver cette formule par déformation de contour. On introduit le chemin d'intégration C_N^+ pour $N > 0$ entier suffisamment grand : il longe l'axe $\imath\mathbf{R}$ de $-\imath\infty$ à $-\imath N$; il est horizontal de $-\imath N$ à $-\imath N + N$, vertical de $-\imath N + N$ à $+\imath N + N$, avec un petit décrochement pour passer entre N et $N+1$, horizontal de $+\imath N + N$ à $+\imath N$; enfin, il longe l'axe $\imath\mathbf{R}$ de $+\imath N$ à $+\imath\infty$. On vérifie à l'aide de l'estimation de Stirling que l'intégrale le long de C_N^+ tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. L'intégrale le long de C est donc (au signe près) la somme des résidus de la fonction $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s$ en les pôles compris entre les deux contours. Ces pôles sont les entiers naturels $\leq N$ et le résidu en $n \in \mathbf{N}$ est, d'après le "rappel" :

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}(-z)^n\frac{(-1)^n}{n!},$$

car le résidu de $\Gamma(-s)$ en n est l'opposé du résidu de $\Gamma(s)$ en $-n$. Enfin, de la formule $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$, on tire que l'expression précédente vaut :

$$\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n}z^n,$$

En faisant tendre N vers ∞, on obtient la formule de Barnes. □

4.1.3 Formules de connexion

Pour décrire explicitement "la" représentation de monodromie, il suffit de décrire l'effet sur l'une des trois bases $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_\infty$ de deux des trois lacets $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$. Comme on connait l'effet de chaque γ_a sur la base $\mathcal{B}_a$ (monodromie locale), il suffit de connaitre une formule de connexion, c'est-à-dire une matrice de passage entre deux de ces bases.

On va suivre ici deux méthodes (parmi de nombreuses possibles, voir [26], chap. 2, §2.4). La première repose sur la formule intégrale de Barnes et ne sera donc pas entièrement justifiée. Elle est totalement explicite ; elle fournit tous les coefficients d'une matrice de passage entre deux bases connues. Elle est transcendante, comme toutes les méthodes qui fournissent des résultats explicites. Elle est providentielle puisqu'elle utilise des informations auxquelles on ne peut espérer avoir accès en général.

La deuxième méthode est due à Riemann, [43]. Elle est algébrique et systématique, en ce qu'elle n'utilise que l'information contenue dans le schéma de Riemann. Elle n'est pas explicite en ce que la base dans laquelle est exprimée la monodromie n'est connue qu'à un facteur constant près sur chaque fonction. Elle détermine donc le groupe de monodromie (à conjugaison près) mais ne décrit pas son action : on ne peut même pas en déduire la monodromie de la série hypergéométrique ; ce genre d'information n'est accessible que par voie transcendante. En substance, elle dit à quoi ressemblent toutes les représentations de rang 2 du groupe libre à deux générateurs. Ce point de vue est détaillé, par exemple, dans [26], chap. 2, §2.4.2, ainsi que dans [2] et [54]mais nous nous en tiendrons à la démarche artisanale de Riemann.

Monodromie via la formule de Barnes

On procède encore par déformation de contour. On introduit le contour C_N^- suivant, défini pour $N > 0$ entier suffisamment grand. Il longe l'axe $\imath\mathbf{R}$ de $-\imath\infty$ à $-\imath N$; il est horizontal de $-\imath N$ à $-\imath N - N$, vertical de $-\imath N - N$ à $+\imath N - N$ sauf au passage des séries de pôles $-\alpha - \mathbf{N}$ (resp. $-\beta - \mathbf{N}$), où il effectue des petits décrochements pour passer entre $-\alpha - N$ et $-\alpha - N - 1$ (resp. entre $-\beta - N$ et $-\beta - N - 1$), horizontal de $+\imath N - N$ à $+\imath N$; enfin, il longe l'axe $\imath\mathbf{R}$ de $+\imath N$ à $+\imath\infty$. On vérifie à l'aide de l'estimation de Stirling que l'intégrale le long de C_N^- tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. L'intégrale le long de C est donc (au signe près) la somme des résidus de la fonction $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s$ en les pôles compris entre les deux contours. Ces pôles sont les $-\alpha - n$ et les $-\beta - n$, pour les entiers naturels $n \leq N$ et les résidus en ces points sont donnés par l'exercice suivant.

Exercice 4.1.12 Montrer que le résidu de la fonction $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s$ en le pôle $-\alpha-n$ est égal à :

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma-\alpha-n)}(-z)^{-\alpha}\frac{z^{-n}}{n!}=(-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\frac{(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_n}{(1)_n(\alpha-\beta+1)_n}z^{-n},$$

cette dernière égalité venant de la formule $\Gamma(x-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(x)}{(-x+1)_n}$.

Proposition 4.1.13 *On a la formule de connexion :*

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z})\\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}).\end{aligned}$$

Preuve. - Utiliser l'exercice (et la formule correspondante pour β) et sommer pour tous les pôles. □

Corollaire 4.1.14 *On considère les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_\infty$ restreintes au demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. On a la formule de connexion $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_\infty P$, avec :*

$$P=\begin{pmatrix} e^{-\imath\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-\imath\pi\alpha'}\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta'-\alpha')}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma'-\alpha')}\\ e^{-\imath\pi\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{-\imath\pi\beta'}\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha'-\beta')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma'-\beta')}\end{pmatrix}.$$

On a posé $\alpha'=\alpha-\gamma+1$, $\beta'=\beta-\gamma+1$ et $\gamma'=2-\gamma$.

Preuve. - Outre les symétries déjà évoquées dans l'écriture des solutions, on a utilisé les égalités $(-z)^\alpha=e^{-\imath\pi\alpha}z^\alpha$ et $(-z)^\beta=e^{-\imath\pi\beta}z^\beta$ valables dans $\mathcal{H}$. □

Corollaire 4.1.15 *La monodromie est décrite par l'effet des lacets γ_0 et γ_∞ sur la base $\mathcal{B}_0$:*

$$M(\gamma_0)\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\imath\pi\gamma}\end{pmatrix}$$

$$M(\gamma_\infty)\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_0\,P^{-1}\begin{pmatrix}e^{2\imath\pi\alpha} & 0\\ 0 & e^{2\imath\pi\beta}\end{pmatrix}P.$$

□

La méthode de Riemann : la monodromie sans calcul

Elle s'applique à une équation de Riemann générique : $P\begin{bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;z\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{bmatrix}$, $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$, $\alpha'-\alpha,\beta'-\beta,\gamma'-\gamma\not\in\mathbf{Z}$. Les solutions $P^\alpha,\dots,P^{\gamma'}$ associées aux exposants $\alpha,\dots,\gamma'$ sont bien définies à un facteur non nul près. On jouera sur cette indétermination. On les suppose définies sur un ouvert simplement connexe de $\mathbf{S}$, obtenu après avoir pratiqué une coupure, par exemple le long de *abc* et l'on écrit les formules de connexion :

$$\begin{aligned}P^\alpha &= a_\beta P^\beta+a_{\beta'}P^{\beta'}\\ &= a_\gamma P^\gamma+a_{\gamma'}P^{\gamma'},\\ P^{\alpha'} &= a'_\beta P^\beta+a'_{\beta'}P^{\beta'}\\ &= a'_\gamma P^\gamma+a'_{\gamma'}P^{\gamma'},\end{aligned}$$

les coefficients $a_\beta, \dots, a'_{\beta'}$ étant constants. En termes de bases :

$$\mathcal{B}_a = \mathcal{B}_b B = \mathcal{B}_c C, \text{ avec } B = \begin{pmatrix} a_\beta & a'_\beta \\ a_{\beta'} & a'_{\beta'} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} a_\gamma & a'_\gamma \\ a_{\gamma'} & a'_{\gamma'} \end{pmatrix}.$$

On fixe un point-base $p \in \mathbf{S} \setminus \{a,b,c\}$ et des lacets $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ de base p respectivement simples positifs autour de a,b,c, satisfaisant l'unique relation : $\overline{\lambda}_c \overline{\lambda}_b \overline{\lambda}_a = 1$. Notons que Riemann prend $a = 0, b = \infty, c = 1$.

Exercice 4.1.16 Décrire le groupe de monodromie exprimé dans la base $\mathcal{B}_a$ à l'aide des matrices de connexion B et C et des matrices de monodromie locale : $A_a = \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\alpha'} \end{pmatrix}, A_b = \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\beta} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\beta'} \end{pmatrix}, A_c = \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\gamma} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\gamma'} \end{pmatrix}$.

Si l'on applique (l'automorphisme de monodromie associé au lacet) $\overline{\lambda}_c = \overline{\lambda}_a^{-1} \overline{\lambda}_b^{-1}$ à la première relation de connexion, on voit que :

1. P^γ est transformé en $e^{2\imath\pi\gamma} P^\gamma$ et $P^{\gamma'}$ en $e^{2\imath\pi\gamma'} P^{\gamma'}$, donc $a_\gamma P^\gamma + a_{\gamma'} P^{\gamma'}$ est transformé en $a_\gamma e^{2\imath\pi\gamma} P^\gamma + a_{\gamma'} e^{2\imath\pi\gamma'} P^{\gamma'}$;
2. $P^\alpha = a_\beta P^\beta + a_{\beta'} P^{\beta'}$ est transformé *d'abord* en $e^{-2\imath\pi\alpha} P^\alpha = e^{-2\imath\pi\alpha}(a_\beta P^\beta + a_{\beta'} P^{\beta'})$ (par $\overline{\lambda}_a^{-1}$) *puis* en $e^{-2\imath\pi\alpha}(a_\beta e^{-2\imath\pi\beta} P^\beta + a_{\beta'} e^{-2\imath\pi\beta'} P^{\beta'})$ (par $\overline{\lambda}_b^{-1}$).

On obtient finalement les relations :

$$\begin{cases} a_\beta P^\beta + a_{\beta'} P^{\beta'} = a_\gamma P^\gamma + a_{\gamma'} P^{\gamma'} \\ a_\beta e^{-2\imath\pi(\alpha+\beta)} P^\beta + a_{\beta'} e^{-2\imath\pi(\alpha+\beta')} P^{\beta'} = a_\gamma e^{2\imath\pi\gamma} P^\gamma + a_{\gamma'} e^{2\imath\pi\gamma'} P^{\gamma'} \end{cases}.$$

On introduit un complexe non précisé σ, que l'on fixera plus tard. En calculant :

$$e^{\sigma\imath\pi} \times \text{(la première relation)} - e^{-\sigma\imath\pi} \times \text{(la deuxième relation)}$$

et en remarquant que $e^{\sigma\imath\pi} - e^{(2\tau-\sigma)\imath\pi} = 2\imath \sin(\sigma - \tau)\pi \times e^{\tau\imath\pi}$, on obtient :

$$a_\beta \sin(\sigma+\alpha+\beta)\pi\, e^{-(\alpha+\beta)\imath\pi} P^\beta + a_{\beta'} \sin(\sigma+\alpha+\beta')\pi\, e^{-(\alpha+\beta')\imath\pi} P^{\beta'} = a_\gamma \sin(\sigma-\gamma)\pi\, e^{\gamma\imath\pi} P^\gamma + a_{\gamma'} \sin(\sigma-\gamma')\pi\, e^{\gamma'\imath\pi} P^{\gamma'}.$$

Les mêmes calculs menés à partir des formules de connexion pour $P^{\alpha'}$ donnent :

$$a'_\beta \sin(\sigma+\alpha'+\beta)\pi\, e^{-(\alpha'+\beta)\imath\pi} P^\beta + a'_{\beta'} \sin(\sigma+\alpha'+\beta')\pi\, e^{-(\alpha'+\beta')\imath\pi} P^{\beta'} = a'_\gamma \sin(\sigma-\gamma)\pi\, e^{\gamma\imath\pi} P^\gamma + a'_{\gamma'} \sin(\sigma-\gamma')\pi\, e^{\gamma'\imath\pi} P^{\gamma'}.$$

Hypothèse : nous supposerons dorénavant que l'on est dans le cas *irréductible*, autrement dit, qu'aucun des coefficients de connexion $a_\beta, \dots, a'_{\gamma'}$ n'est nul. La signification de cette hypothèse peut être approchée comme suit. Dans le cas contraire, on aurait une même fonction P vecteur propre de la monodromie pour deux des trois lacets, donc aussi pour le troisième. Elle serait donc de la forme $(z-a)^\alpha (z-b)^\beta Q$ avec Q *uniforme*, d'où, à une conjugaison près (par la fonction $(z-a)^\alpha (z-b)^\beta$), la possibilité de factoriser notre équation de départ (plus précisément, l'opérateur différentiel correspondant) sur le corps des fonctions méromorphes $\mathbf{C}(z)$. En première approche, on peut considérer ce cas comme dégénéré : la représentation de monodromie est *réductible*, voir [2], [26], [54].

Remarque 4.1.17 Pour des compléments sur la signification de cette hypothèse, voir l'examen de fin d'année.

Revenant à notre calcul, on fait respectivement $\sigma = \gamma$ et $\sigma = \gamma'$ dans les deux dernières relations obtenues. On a deux égalités reliant deux bases, et, avec l'hypothèse d'irréductibilité :

$$\begin{aligned}
\frac{a_\gamma}{a'_\gamma} &= \frac{a_\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\imath\pi}}{a'_\beta \sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\imath\pi}} \\
&= \frac{a_{\beta'} \sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\imath\pi}}{a'_{\beta'} \sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\imath\pi}} \\
\frac{a_{\gamma'}}{a'_{\gamma'}} &= \frac{a_\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\imath\pi}}{a'_\beta \sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\imath\pi}} \\
&= \frac{a_{\beta'} \sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\imath\pi}}{a'_{\beta'} \sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\imath\pi}}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.1.18 Vérifier que ces égalités fournissent deux expressions distinctes pour le rapport $\frac{a_\beta}{a'_\beta} / \frac{a_{\beta'}}{a'_{\beta'}}$ et que ces expressions ont même valeur grâce à la relation de Fuchs.

Nous utilisons maintenant notre liberté de choix des fonctions $P^\alpha, \dots, P^{\gamma'}$ à un facteur d'échelle près. Cela permet de prescrire arbitrairement, par exemple, a_β, $a_{\beta'}$, a_γ, $a_{\gamma'}$ et l'une des autres constantes. Voici les choix de Riemann :

$$\begin{aligned}
a_\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} \\
a_{\beta'} &= -\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} \\
a'_\beta &= \frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} \\
a'_{\beta'} &= -\frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} \\
a_\gamma &= \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi} e^{(\alpha'+\gamma)\imath\pi} \\
a_{\gamma'} &= -\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi} e^{(\alpha'+\gamma')\imath\pi} \\
a'_\gamma &= \frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi} e^{(\alpha+\gamma)\imath\pi} \\
a'_{\gamma'} &= -\frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi} e^{(\alpha+\gamma')\imath\pi}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.19 *La représentation de monodromie dans la base $\mathcal{B}_a$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_a &\mapsto \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\alpha'} \end{pmatrix} \\
\overline{\lambda}_b &\mapsto \begin{pmatrix} a_\beta & a'_\beta \\ a_{\beta'} & a'_{\beta'} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\beta} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\beta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\beta & a'_\beta \\ a_{\beta'} & a'_{\beta'} \end{pmatrix} \\
\overline{\lambda}_c &\mapsto \begin{pmatrix} a_\gamma & a'_\gamma \\ a_{\gamma'} & a'_{\gamma'} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\imath\pi\gamma} & 0 \\ 0 & e^{2\imath\pi\gamma'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\gamma & a'_\gamma \\ a_{\gamma'} & a'_{\gamma'} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.1.20 Vérifier que ces images sont compatibles avec la relation $\overline{\lambda}_c \overline{\lambda}_b \overline{\lambda}_a = 1$ entre les clasees d'homotopie de ces lacets.

Exercice 4.1.21 Décrire la représentation de monodromie dans les bases $\mathcal{B}_b$ et $\mathcal{B}_c$.

Exercice 4.1.22 Comparer ces résultats avec ceux obtenus pour l'équation hypergéométrique.

Exercice 4.1.23 Reprendre l'étude dans le cas réductible, en supposant, par exemple, que $P^\alpha = P^\beta = P^\gamma$.
Indication : on pourra distinguer le cas complètement réductible*, où l'on peut prendre* $P^{\alpha'} = P^{\beta'} = P^{\gamma'}$*, du cas réductible générique, où la monodromie n'admet qu'une droite stable.*

4.2 La correspondance de Riemann-Hilbert

Selon les mots de Hilbert au Congrés International des Mathématiciens en 1900, son vingt-et-unième problème (que "Riemann avait déjà en vue"), "*consiste à démontrer qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de M. Fuchs ayant des points critiques donnés et un groupe de monodromie donné*". En fait, il y a trois traductions possibles : on peut chercher des équations fuchsiennes (ou singulières régulières, ce qui revient au même), des systèmes fuchsiens ou des systèmes singuliers réguliers. Nous commencerons par le dernier cas, car c'est le seul où la réponse est toujours positive, et finirons par le premier, qui est le plus défavorable.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous fixons un lieu singulier $\Sigma = \{z_1, \ldots, z_m, z_{m+1} = \infty\} \subset \mathbf{S}$, un point-base $p \in \mathbf{S} \setminus \Sigma$, et des lacets γ_k $(1 \leq k \leq m+1)$ dans $\mathbf{S} \setminus \Sigma$, de base p et simples positifs autour de z_k. Ainsi, $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_m$ sont des générateurs libres du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S} \setminus \Sigma, p)$, ce qui permet d'identifier l'ensemble $\mathcal{R}_n$ des anti-représentations de $\pi_1(\mathbf{S} \setminus \Sigma, p)$ dans $GL_n(\mathbf{C})$ à l'ensemble $GL_n(\mathbf{C})^m$. Ce dernier s'identifie naturellement à un ouvert dense de $\mathbf{C}^{n^2 m}$, ce qui permet de considérer l'ensemble $\mathcal{R}_n$ comme une variété analytique de dimension $n^2 m$. Précisons enfin que nous voulons aborder une situation *non abélienne*, et que nous supposerons donc partout que $m, n \geq 2$.

Exercice 4.2.1 La bijection ci-dessus entre l'ensemble $\mathcal{R}_n$ et la variété $GL_n(\mathbf{C})^m$ dépend du choix des générateurs du groupe fondamental. Montrer que la structure de variété définie sur $\mathcal{R}_n$ n'en dépend pas.

Exercice 4.2.2 On suppose que la matrice A dépend analytiquement de paramètres complexes $t_1, \ldots, t_r$. Montrer que l'application qui, à $(t_1, \ldots, t_r)$, associe sa représentation de monodromie, est analytique.
Indication : il s'agit de la dépendance analytique des solutions d'équations différentielles par rapport aux paramètres (et aux conditions initiales), voir par exemple [9], chap. VII, §*2.1, ou [12], chap. X,* §*7.*

Pour définir rigoureusement l'application qui à une équation ou un système associe "sa" représentation de monodromie, nous fixons un ouvert non vide simplement connexe Ω, qui contient p. A tout système différentiel (S_A) de matrice A régulier sur $\mathbf{S} \setminus \Sigma$, on peut associer son unique solution fondamentale $\mathcal{X}(z)$ sur Ω soumise aux conditions initiales $\mathcal{X}(p) = I_n$. Le prolongement analytique le long du lacet γ_k $(1 \leq k \leq m+1)$ donne une solution $\mathcal{X}(z)M_k$ et nous prenons pour représentation de monodromie associée au système de matrice A l'élément de $\mathcal{R}_n$ qui s'identifie au m-uplet $(M_1, \ldots, M_m)$ de $GL_n(\mathbf{C})^m$. Cela s'applique en particulier aux systèmes singuliers réguliers, aux systèmes fuchsiens et aux équations fuchsiennes. Dans ce dernier cas, on utilise le système associé, dont une solution (matricielle) fondamentale admet comme première ligne une base fondamentale de solutions de l'équation : c'est donc par rapport à cette base qu'est calculée la monodromie. Si l'on utilise une autre solution fondamentale ou une autre base, on obtient évidemment une représentation conjuguée à celle que nous venons de décrire, donc codée par un m-uplet de la forme $(CM_1C^{-1}, \ldots, CM_mC^{-1})$ de $GL_n(\mathbf{C})^m$. On est donc conduit à faire opérer $GL_n(\mathbf{C})$ sur $GL_n(\mathbf{C})^m$ par conjugaison, selon la formule ci-dessus. L'ensemble quotient (ensemble des orbites) est l'ensembles $\mathcal{C}_n$ des classes (de conjugaison) de représentations.

4.2.1 Systèmes singuliers réguliers

Le théorème qui suit a été démontré pour la première fois par Plemelj en 1908 ; celui-ci étendait ainsi un théorème de Hilbert, démontré en dimension 2. Le théorème a ensuite été démontré indépendamment par Birkhoff en 1913, de manière plus simple et généralisable. De même que les équations intégrales peuvent servir à démontrer les théorèmes d'existence de Cauchy, de même les *équations intégrales singulières* sont l'outil adapté ici.

Théorème 4.2.3 *Toute représentation de monodromie peut être réalisée (à conjugaison près) par un système régulier sur* $\mathbf{S} \setminus \Sigma$, *fuchsien en* $z_1, \ldots, z_m$ *et singulier régulier en* $z_{m+1} = \infty$.

Preuve. - La preuve de ce théorème fera appel à deux théorèmes de factorisation de matrices analytiques : le lemme de Cartan et le lemme (ou *preliminary theorem*) de Birkhoff. En fait, ces deux théorèmes peuvent être subsumés sous un seul, la forme complète du preliminary theorem, mais cela n'éclaire pas vraiment la situation. Il y a en effet deux problématiques distinctes :

1. Celle d'un ouvert de $\mathbf{C}$, donc d'une surface de Riemann *ouverte*, donc d'une variété de Stein. Ici, les matrices de monodromie sont quelconques et l'idée géométrique sous-jacente est que tout fibré holomorphe sur un tel espace est trivial.
2. Celle de $\mathbf{S}$, donc d'une surface de Riemann *compacte*. Les matrices de monodromie sont liées par une relation (dans le cas de la sphère de Riemann, leur produit est trivial), une sorte de “compensation” due à la compacité. Maintenant, les fibrés ne sont pas nécessairement triviaux, mais, en genre $g = 0$ (cas de la sphère de Riemann), ils sont tout de même assez simples.

Voici l'énoncé du lemme de Cartan, que l'on admettra. On peut en trouver une preuve dans [21], chap. VI, sec. E, th. 7, p. 195. Une version un peu plus générale est énoncée dans [3], chap. VII, §4.2.

Théorème 4.2.4 *Pour tout compact non vide* K *de* $\mathbf{C}$, *notons* $O(K)$ *l'anneau des (germes de) fonctions analytiques au voisinage de* K. *On considère les deux rectangles compacts ainsi définis :*

$$\begin{cases} K' = [a_1; a_3] + \imath\,[b_1; b_2] \\ K'' = [a_2; a_4] + \imath\,[b_1; b_2] \end{cases},$$

où $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ *et* $b_1 < b_2$ *; donc* $K \underset{def}{=} K' \cap K'' = [a_2; a_3] + \imath\,[b_1; b_2]$. *Alors l'application suivante est surjective :*

$$\begin{cases} GL_n(O(K')) \times GL_n(O(K'')) \to GL_n(O(K)) \\ (F', F'') \mapsto F'F'' \text{ (produit des restrictions au domaine commun de définition)} \end{cases}.$$

Voici la forme simple (un seul contour) du lemme de Birkhoff, dont nous nous servirons ici, et à nouveau lors de la classification des systèmes aux q-différences fuchsiens. La preuve, tirée, pour l'essentiel, de [6], en sera donnée en appendice, ainsi que les définitions précises des termes employés.

Théorème 4.2.5 *Soit* C *une courbe analytique fermée simple de* $\mathbf{C}$ *qui entoure* 0 *et soit* $M(z)$ *une matrice holomorphe inversible dans un voisinage de* C. *Soient* D_0, D_∞ *les composantes connexes de* $\mathbf{S} \setminus C$ *contenant respectivement* 0 *et* ∞. *Il existe alors un voisinage ouvert* V_0 *de* $\overline{D_0}$ *et un voisinage ouvert* V_∞ *de* $\overline{D_\infty}$ *et des matrices* $M^{(0)}$, $M^{(\infty)}$ *holomorphes inversibles respectivement sur* V_0 *et* $V_\infty \setminus \{\infty\}$, *la matrice* $M^{(\infty)}$ *étant de plus holomorphe (mais pas nécessairement inversible) en* ∞, *et telles que, sur* $V_0 \cap V_\infty$ *:*

$$M^{(0)} = M^{(\infty)}\, M.$$

Avant d'attaquer la construction proprement dite, un petit sorite expliquera la méthode. Supposons que le problème soit résolu sur un ouvert U', par un système de matrice A' fuchsienne en toutes les singularités dans U' et qui y admet (à conjugaison près) la bonne monodromie : elle a donc une solution fondamentale

$\mathcal{X}'(z)$ sur un ouvert simplement connexe de U' dont la monodromie le long des lacets γ_k concernés est donnée par les matrices prescrites. Si H' est holomorphe inversible sur U', $H'[A']$ est encore fuchsienne et admet la même monodromie, pour la solution fondamentale $H'(z)\mathcal{X}'(z)$. Si la matrice H' est *méromorphe* en l'un des points critiques dans U', $H'[A']$ sera *singulière régulière* en ce même point.

Enfin, si une situation analogue a lieu sur l'ouvert U'', avec matrice A'' et solution fondamentale $\mathcal{X}''(z)$ on peut recoller les matrices $H'[A']$ et $H''[A'']$ (qui résolvent notre problème respectivement sur U' et U'') en une matrice qui le résoud sur $U' \cup U''$, à la seule condition que ces deux matrices coïncident sur $U' \cap U''$. Mais cela équivaut à l'égalité $H'(z)\mathcal{X}'(z) = H''(z)\mathcal{X}''(z)$ sur $U' \cap U''$. Il s'agit donc de factoriser la matrice $\mathcal{X}''(z)\,(\mathcal{X}'(z))^{-1}$. Cela sera possible, selon le contexte, à l'aide d'un des deux théorèmes de factorisation qui précèdent.

Première étape : points critiques à distance finie

A transformation affine du plan près, on peut supposer que les abcisses (parties réelles) des points critiques sont deux à deux distinctes ; quitte à les renuméroter, on peut les supposer croissantes (les points $z_1, \ldots, z_m$ vont de gauche à droite). A conjugaison près, on peut également changer de point-base p et supposer qu'il y a un rectangle compact horizontal (donc vertical !) R qui contient tous les points critiques à distance finie mais pas p. On considère, pour $k = 1, \ldots, m-1$, un rectangle R_k défini comme la partie de R à gauche d'une ligne verticale séparant z_k de z_{k+1}.

On sait résoudre le problème localement pour un seul pôle, avec un système fuchsien standard (chapitre 3) ; donc, il est résolu au voisinage de R_1. On le suppose résolu au voisinage de R_k ; on sait le résoudre (c'est à nouveau un problème local) au voisinage d'un rectangle R' contenant z_{k+1}, rencontrant R_k et tel que $R_{k+1} = R_k \cup R'$. En appliquant le lemme de Cartan, selon la méthode expliquée dans le sorite, on construit donc par récurrence une solution au voisinage de R.

Deuxième étape : jusqu'à l'infini (et plus si affinités)

A translation près, on peut supposer que le rectangle R contient l'origine. Soit C un contour analytique fermé qui entoure R mais inclus dans le voisinage U' de R sur lequel le problème a été résolu à la première étape, et soient A' la matrice fuchsienne et $\mathcal{X}'(z)$ une solution fondamentale ayant la monodromie prescrite.

Soit U'' un voisinage ouvert simplement connexe de ∞ contenant C et ne rencontrant pas R, et A'' une matrice qui résoud le problème sur U'', pour une solution fondamentale $\mathcal{X}''(z)$. Du fait que l'on a une *représentation* de monodromie, la monodromie en ∞ compense toutes les autres, et les fonctions matricielles $\mathcal{X}'(z)$ et $\mathcal{X}''(z)$ ont même monodromie le long de C. Par conséquent, la fonction matricielle holomorphe inversible $\mathcal{X}''(z)\,(\mathcal{X}'(z))^{-1}$ admet un prolongement analytique *uniforme* à la couronne $U' \cap U''$. On peut appliquer à cette fonction matricielle le lemme de Birkhoff, obtenant ainsi une fonction matricielle holomorphe inversible H' sur U' et une fonction matricielle holomorphe inversible H'' sur $U'' \setminus \{\infty\}$ (et méromorphe en ∞) telles que $H'(z)\mathcal{X}'(z) = H''(z)\mathcal{X}''(z)$ sur $U' \cap U''$. On peut donc recoller les deux systèmes sur $U' \cup U'' = \mathbf{S}$, obtenant ainsi un système régulier sur $\mathbf{S} \setminus \Sigma$, fuchsien sur $\Sigma \setminus \{\infty\}$ et singulier régulier en ∞ et de monodromie prescrite (à conjugaison près). Le système ainsi construit est rationnel, car méromorphe sur la sphère de Riemann. □

Exercice 4.2.6 Discuter l'injectivité de la correspondance de Riemann-Hilbert. Plus précisément, soient A et B les matrices de deux systèmes réguliers sur $\mathbf{S} \setminus \Sigma$, fuchsiens sur $\Sigma \setminus \{\infty\}$ et singuliers réguliers en ∞ et de même monodromie (à conjugaison près). Démontrer qu'ils sont méromorphiquement équivalents, avec une transformation de jauge dont les seuls pôles sont dans Σ. Cette transformation de jauge est rationnelle. *Indication : soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des solutions fondamentales respectives de (S_A) et de (S_B) qui ont même monodromie (vérifier qu'il en existe) ; poser $F = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1}$.*

4.2.2 Systèmes fuchsiens

Exercice 4.2.7 Un système fuchsien sur **S** à pôles dans Σ s'écrit :

$$X'(z) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - z_i}\right) X(z),$$

les matrices résiduelles A_i étant constantes. La matrice résiduelle à l'infini est :

$$A_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} A_i.$$

En 1908, Plemelj a résolu positivement le problème dans ce cas. Il construit d'abord une solution fuchsienne partout sauf en ∞, où elle est singulière régulière (voir *supra*). Puis il montre comment rendre le système fuchsien partout ; *mais cette partie de la preuve est incorrecte*, ce qui n'a été remarqué que plusieurs décennies plus tard. Voici les cas où une solution positive a été (correctement) trouvée.

1. L'une des matrices de monodromie M_i est semi-simple : dans ce cas, les preuves de Plemelj et de Birkhoff marchent.
2. Si toutes les matrices M_i sont "suffisamment proches de I_n", Lappo-Daniliewski a construit une solution explicite en 1928.
3. Si $n = 2$ et m quelconque, Dekkers a obtenu la solution en 1979.
4. Si la représentation est irréductible, Kostov (1991) et Bolibruch (1992) ont obtenu une solution positive.

Bolibruch a obtenu, entre 1989 et 1992, des contre-exemples avec 3 singularités en dimension 4, et aussi avec 4 singularités en dimension 3, et analysé précisément les conditions de résolubilité du problème ; voir [26] et surtout [2] (ainsi que [5] pour un survey).

4.2.3 Equations fuchsiennes

Il est connu depuis avant Hilbert, que, pour $(m,n) \neq (2,2)$, la solution n'est pas possible avec des équations fuchsiennes : cela résulte d'un "comptage des constantes", autrement dit, d'un argument de dimensions. Sans vouloir en donner une démonstration complète, on va tout de même essayer de préciser les raisons mathématiques de cette impossibilité. Comme aucun argument de dimension ne peut empêcher une application quelconque d'être surjective, il faut bien établir que l'application "représentation de monodromie associée" ou l'application "classe de conjugaison de la représentation de monodromie associée" possède quelque propriété spéciale. La continuité ne suffirait pas, comme le montrent les exemples de courbes qui remplissant un carré (Hilbert, Peano, Von Koch ...) et la linéarité serait sans doute trop demander. On va montrer qu'elle est analytique. On introduit d'abord l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des équations fuchsiennes à pôles dans Σ.

Exercice 4.2.8 Montrer qu'une telle équation est de la forme $f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f$, où chaque a_i est de la forme $P_i/[(z-z_1)\cdots(z-z_m)]^i$, P_i étant un polynôme de degré $\leq (m-1)i$. En déduire que $\mathcal{E}_n$ est un espace affine de dimension $mn(n+1)/2 - n(n-1)/2$.

Il découle alors de l'exercice 4.2.2 que l'application "représentation de monodromie associée" est analytique de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{R}_n$. Comme la dimension de $\mathcal{R}_n$ est bien supérieure à celle de $\mathcal{E}_n$, l'application n'a aucune chance d'être surjective. Cependant, ce qui nous intéresse est la possibilité de réaliser une représentation à conjugaison près. Il faudrait donc munir $\mathcal{C}_n$ d'une structure de variété analytique telle que la surjection canonique de $\mathcal{R}_n$ sur $\mathcal{C}_n$ soit analytique et permette de calculer la dimension de ce quotient. En fait, l'action de conjugaison de $GL_n(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{R}_n$ n'est pas assez "bonne" pour cela, en tout cas, pas partout. On va donc se restreindre à une classe de représentations qui se comporte bien.

Notons $\mathcal{R}'_n$ le sous-espace de $\mathcal{R}_n$ formé des représentations irréductibles (aucun sous-espace autre que 0 et l'espace total n'est stable). On peut montrer que c'est un ouvert dense de $\mathcal{R}_n$, donc une variété analytique ; voir par exemple [20], §9.

Exercice 4.2.9 Le démontrer lorsque $n = 2$.

On peut montrer également que l'image $\mathcal{C}'_n$ de $\mathcal{R}'_n$ dans $\mathcal{C}_n$ peut être munie d'une unique structure de variété analytique de dimension $n^2m - (n^2 - 1)$ telle que la projection $\mathcal{R}'_n \to \mathcal{C}'_n$ est une fibration (*loc. cit.*, th. 27).

Exercice 4.2.10 Montrer que le noyau de l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{R}_n$ est $\mathbf{C}^*$: c'est donc $PGL_n(\mathbf{C})$ qui opère. Montrer que l'action de ce dernier sur $\mathcal{R}'_n$ est sans point fixe et en déduire la dimension des fibres de la fibration $\mathcal{R}'_n \to \mathcal{C}'_n$.
Indication : cela découle du lemme de Schur sur les morphismes de représentations irréductibles.

Soit $\mathcal{E}'_n$ l'image réciproque de $\mathcal{R}'_n$ par l'application de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{R}_n$. On peut montrer qu'elle est constituée des équations fuchsiennes dont l'opérateur associé est factorisable, et que c'est un ouvert dense de $\mathcal{E}_n$.

Exercice 4.2.11 Le démontrer lorsque $n = 2$.

L'application de $\mathcal{E}'_n$ dans $\mathcal{C}'_n$ ne peut être surjective que si celle de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{C}_n$ l'est. Cela n'est possible que si $n^2m - (n^2 - 1) \leq mn(n+1)/2 - n(n-1)/2$, ce qui entraine $m \leq (n+2)/n$, donc $m = n = 2$.

Exercice 4.2.12 Déduire de l'étude faite en 4.1 que, pour $m = n = 2$, on a bien la surjectivité.
Indication : la section 4.1 est loin d'être suffisante à elle seule, car elle ne permet de traiter que le cas générique d'une représentation irréductible avec des générateurs semi-simples.

Remarque 4.2.13 Un contournement classique de l'obstruction ci-dessus (dimension de l'espace de départ insuffisante) est l'introduction de *singularités apparentes* : on autorise des équations fuchsiennes ayant des pôles supplémentaires, mais en lesquels la monodromie des solutions est triviale. Bolibruch a démontré que, si l'on ajoute exactement le nombre de singularités apparentes nécessaire pour que la dimension de l'espace de départ soit suffisante, alors la réponse est positive ; voir [2].

Deuxième partie

Equations aux q-différences

Chapitre 5

Introduction et boite à outils

Dans toute cette partie du cours, q désigne un complexe non nul *de module différent de* 1 : cette condition est essentielle si l'on veut faire de l'analyse. Cependant, deux conventions sont répandues : $0 < |q| < 1$ et $|q| > 1$. Elles jouent un rôle parfaitement symétrique, mais donnent lieu à des formules différentes.

Exercice 5.0.14 Trouver dans [13] des incohérences dues au mélange de ces deux conventions.

Dans la section 5.1, nous supposerons que $0 < |q| < 1$, pour pouvoir étudier les séries hypergéométriques basiques avec les formules répandues dans la littérature [16], etc ... Puis, pour la théorie générale, on prendra $|q| > 1$, comme dans [47] qui est le support des chapitres qui vont suivre.

5.1 Equation hypergéométrique basique

Dans cette seule section, on a $0 < |q| < 1$; on peut donc écrire $q = e^{2\imath\pi\tau}$ avec $\tau \in \mathcal{H}$. Chaque fois que l'on lira $x = q^{\xi}$, resp. $q \to 1$, il faudra donc comprendre $x = e^{2\imath\pi\tau\xi}$, resp. $\tau \to 0$, $\tau \in \mathcal{H}$.

5.1.1 Symboles de Pochhammer

Proposition 5.1.1 *Notons, pour $x \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$:*

$$(x;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1 - xq^i).$$

Alors, pour $q \to 1$ (l'entier n étant fixé) :

$$(q^{\xi};q)_n \sim (1-q)^n(\xi)_n.$$

Preuve. - Pour chaque $i \in \{0,\dots,n-1\}$, on a $1 - q^{\xi+i} \sim (1-q)(\xi+i)$. □

Proposition 5.1.2 *Notons, pour $x \in \mathbf{C}$:*

$$(x;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(x;q)_n = \prod_{i=0}^{\infty}(1 - xq^i).$$

Cette limite existe quel que soit $x \in \mathbf{C}$ et elle définit une fonction entière qui admet le développement en série :

$$(x;q)_\infty = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}x^n.$$

Preuve. - Le membre droit est une série entière dont les coefficients vérifient :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 1 \;,\; u_n = -\frac{q^{n-1}}{1-q^n}\, u_{n-1} \text{ i.e. } q^n u_n - q^{n-1} u_{n-1} = u_n \end{cases}.$$

So rayon de convergence est donc infini.D'autre part, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par x^n et en sommant pour $n \geq 1$, on en déduit que cette série est le développement d'une fonction entière f telle que $f(0) = 1$ et $(1-x)f(qx) = f(x)$ pour $x \in \mathbf{C}$. On itère cette équation fonctionnelle :

$$f(x) = (1-x)f(qx) = (1-x)(1-qx)f(q^2x) = \ldots = (x;q)_n f(q^n x) = \ldots = (x;q)_\infty\, f(0).$$

□

C'est bien sûr l'équation fonctionnelle satisfaite par le produit infini qui a permis de trouver les coefficients de la série.

Exercice 5.1.3 Vérifier que $(a;q)_{n+p} = (a;q)_n (aq^n;q)_p$ et $(a;q)_\infty = (a;q)_n (aq^n;q)_\infty$.

Exercice 5.1.4 Démontrer le *théorème q-binomial* :

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n.$$

Indication : le membre gauche de l'égalité est une fonction holomorphe au voisinage de 0*, telle que* $f(0) = 1$ *et* $(1-ax)f(qx) = (1-x)f(x)$*.*

Exercice 5.1.5 Déduire du théorème q-binomial le développement en série de $\frac{1}{(x;q)_\infty}$.

Exercice 5.1.6 Dans chacun des exercices précédents, essayer de deviner ce qui se passe lorsque $q \to 1$.
Indication : consulter le chapitre sur la confluence et [13].

5.1.2 Séries hypergéométriques basiques

Définition 5.1.7 La série hypergéométrique basique [1] de paramètres $a, b, c \in \mathbf{C}$ est :

$$\Phi(a,b,c;q,z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} z^n.$$

Dans la pratique, on exclura les cas dégénérés en imposant $c \notin q^{-\mathbf{N}}$ (tous les termes sont bien définis) et $a, b \notin q^{-\mathbf{N}}$ (la série n'est pas un polynôme).

Théorème 5.1.8 *(i) Le rayon de convergence de cette série est* 1*.*
(ii) La fonction holomorphe Φ *sur* $\overset{\circ}{D}(0,1)$ *y vérifie l'équation fonctionnelle* aux q-différences *linéaire à coefficients rationnels :*

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0,1)\;,\; \Phi(q^2 z) - \lambda(z)\Phi(qz) + \mu(z)\Phi(z) = 0,$$

avec

$$\lambda(z) = \frac{(a+b)z - (1+c/q)}{abz - c/q} \quad \text{et} \quad \mu(z) = \frac{z-1}{abz - c/q}.$$

(iii) La fonction Φ *admet un unique prolongement analytique à* $\mathbf{C} \setminus q^{-\mathbf{N}}$ *avec des pôles simples sur la demi-spirale logarithmique discrète* $q^{-\mathbf{N}}$*.*

[1] Le mot *basique* fait ici référence à la *base* q.

Preuve. - Les coefficients de la série hypergéométrique basique vérifient $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{(1-aq^n)(1-bq^n)}{(1-cq^n)(1-q^{n+1})} u_n.$$

On a donc $\lim u_{n+1}/u_n = 1$, d'où le rayon de convergence.

On écrit, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$z(1-aq^n)(1-bq^n)u_n z^n = (1-cq^n)(1-q^{n+1})u_{n+1}z^{n+1}.$$

En sommant pour $n \in \mathbf{N}$, on trouve :

$$z\left(\Phi(z) - (a+b)\Phi(qz) + ab\Phi(q^2z)\right) = \Phi(z) - (1+\frac{c}{q})\Phi(qz) + \frac{c}{q}\Phi(q^2z),$$

d'où l'on tire immédiatement l'équation fonctionnelle.

Supposons Φ prolongée à un disque $\overset{\circ}{D}(0,|q|^{-k})$ avec les propriétés indiquées (pôles, équation fonctionnelle). Posons, pour $z \in \overset{\circ}{D}(0,|q|^{-k-1})$:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(z) &= \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}\Phi(qz) - \frac{1}{\mu(z)}\Phi(q^2z) \\ &= \frac{((a+b)z-(1+c/q))\,\Phi(qz) - (abz - c/q)\Phi(q^2z)}{z-1}. \end{aligned}$$

La restriction de $\overline{\Phi}$ à $\overset{\circ}{D}(0,|q|^{-k})$ est Φ, puisque celle-ci vérifie l'équation fonctionnelle. Les pôles de $\overline{\Phi}$ sont 1 et $q^{-1}\times$ ceux de Φ. En itérant ce processus, on étend Φ comme désiré. □

Exercice 5.1.9 On pose $a = q^\alpha, b = q^\beta, c = q^\gamma$. Qu'observe-t'on lorsque $q \to 1$?

Exercice 5.1.10 Dessiner la spirale logarithmique discrète $q^{\mathbf{Z}}$ et les deux demi-spirales $q^{\pm\mathbf{N}}$.

5.1.3 Résolution locale de l'équation

SLOGAN. - Dans le monde des q***-différences, il n'y a que deux points où l'on puisse se localiser :*** 0 ***et*** ∞***; car ce sont les seuls points fixes de l'automorphisme*** $z \mapsto qz$ ***de*** $\mathbf{S}$.

Exercice 5.1.11 Soit $h \in Aut(\mathbf{S}) = PGL_2(\mathbf{C})$ une homographie supposée non triviale. On a alors une dichotomie :

- cas générique : h a deux points fixes ; elle est conjuguée à une dilatation $z \mapsto qz$, $q \in \mathbf{C}^* \setminus \{1\}$;
- cas dégénéré : h a un seul point fixe ; elle est conjuguée à une translation $z \mapsto z+t$, $t \in \mathbf{C}^*$.

De plus, deux dilatations $z \mapsto qz$, $z \mapsto q'z$ sont conjuguées entre elles si et seulement si $q' = q^{\pm 1}$; toutes les translations non triviales sont conjuguées entre elles.

On introduit la notation (que nous conserverons désormais) $\sigma_q\phi(z) = \phi(qz)$. On peut alors réécrire l'équation fonctionnelle trouvée plus haut sous la forme :

$$\sigma_q^2\phi - \lambda\sigma_q\phi + \mu\phi = 0.$$

Cette équation admet la solution $\phi = \Phi(a,b,c;q,-)$, qui est une série de terme constant 1. Si l'on cherche une solution sous la forme $\phi = z^\delta\psi$ avec une série ψ de terme constant 1, il suffit de savoir que $e_d = z^\delta$ vérifie la relation $\sigma_q e_d = d e_d$ avec $d = q^\delta \neq 0$ pour voir que ψ est solution de l'équation :

$$\sigma_q^2\psi - \lambda'\sigma_q\psi + \mu'\psi = 0, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{d}\ ,\ \mu' = \frac{\mu}{d^2}.$$

Comme $\psi(0) = 1$, une condition nécessaire (obtenue en faisant $z = 0$) est que $1 - \lambda'(0) + \mu'(0) = 0$, autrement dit, que d est racine de l'équation caractéristique :

$$d^2 - \lambda(0)d + \mu(0) = 0.$$

Dans notre cas, les seules solutions sont $d = 1$ et $d = q/c$.

Exercice 5.1.12 On suppose $c \notin q^{\mathbf{Z}}$ et l'on écrit $c = q^\gamma$. Vérifier qu'il existe une série hypergéométrique basique ψ telle que $z^{1-\gamma}\psi$ est solution.

Remarque 5.1.13 Les anciens (Adams, Carmichael, Birkhoff ...) utilisaient des fonctions multiformes comme z^δ. Nous verrons au chapitre 6 qu'il est possible de trouver, pour tout $d \in \mathbf{C}^*$, des fonctions méromorphes *uniformes* $e_d \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ telles que $\sigma_q e_d = d e_d$.

L'équation hypergéométrique basique peut être convertie en système par le procédé usuel de vectorisation : on pose $X = \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma_q \phi \end{pmatrix}$, et l'on constate que l'équation équivaut à $\sigma_q X = AX$, où l'on fait agir σ_q sur chaque composante du vecteur X et où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{C}(z))$. Le fait que la matrice A du système est inversible n'est pas fortuit. Il vient de ce que l'on a nécessairement $\mu \neq 0$. En effet, une équation du second ordre avec "terme constant" nul $\sigma_q^2\phi - \lambda\sigma_q\phi = 0$ se ramène immédiatement à une équation du premier ordre $\sigma_q\phi - \sigma_q^{-1}(\lambda)\phi = 0$, cela, parce que σ_q est un automorphisme du corps $\mathbf{C}(z)$.

D'après l'exercice ci-dessus, si $c \notin q^{\mathbf{Z}}$, on a trouvé une solution matricielle fondamentale $\mathcal{X} \in GL_2(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$. Toute solution vectorielle $X \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^2$ s'écrit alors $X = \mathcal{X}V$ avec $V \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^2$ *constant*, c'est-à-dire tel que $\sigma_q V = V$. Le *corps des constantes* de la théorie est donc le corps :

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \{f \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*) \ / \ \sigma_q f = f\}.$$

Ce corps n'est pas réduit à $\mathbf{C}$, on l'explicitera au chapitre 6. Les solutions vectorielles du système $\sigma_q X = AX$ forment donc un espace vectoriel de dimension 2 sur ce corps, les colonnes de la solution fondamentale $\mathcal{X}$ en constituant une base.

5.2 Equations et systèmes

Tout ce qui suit garde un sens sur un *corps aux différences* quelconque, c'est-à-dire un couple (K, σ), où σ est un automorphisme du corps commutatif K : voir par exemple [37] pour de telles généralités. Nous prendrons pour K l'un des corps de fonctions $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{C}(\{z\})$, $\mathbf{C}((z))$, et aussi $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ qui joue un plus grand rôle dans le cas des équations aux q-différences que dans le cas des équations différentielles : il suffit de penser à ce que l'on a prouvé sur le domaine de définition de la fonction hypergéométrique basique. Nous prendrons pour σ l'automorphisme σ_q de K défini par $\sigma_q f(z) = f(qz)$. Nous parlerons alors plutôt de *corps aux q-différences*.

Le corps K ci-dessus est le corps des coefficients des équations, systèmes ... que nous étudierons, mais les solutions seront à chercher dans un ensemble plus grand. On se donne donc une *algèbre aux différences* sur (K, σ) : c'est une K-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'un automorphisme qui étend $\sigma = \sigma_q$, et que nous noterons de la même manière. Pour nous, l'algèbre $\mathcal{A}$ sera presque toujours $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ (donc un corps) et son automorphisme sera σ_q encore défini par $\sigma_q f(z) = f(qz)$. On parlera donc d'*algèbre aux q-différences*.

5.2.1 Opérateurs, équations

Un *opérateur aux q-différences* sur K est un opérateur de la forme $\sum a_k \sigma_q^k$, avec des coefficients $a_k \in K$ (nuls sauf un nombre fini) et les exposants $k \in \mathbf{Z}$. Il agit sur $\mathcal{A}$ par $f \mapsto \sum a_k \sigma_q^k(f)$. Ces opérateurs forment une sous-algèbre de l'algèbre des endomorphismes du **C**-espace vectoriel $\mathcal{A}$. On prendra garde que, comme les opérateurs différentiels (dont ils sont les cousins), ils sont bien **C**-linéaires mais pas **K**-linéaires.

La structure de cette sous-algèbre est résumée par le fait qu'elle est l'image d'une *algèbre de polynômes de Laurent non commutatifs* :

$$\mathcal{D}_{q,K} = K < \sigma, \sigma^{-1} >,$$

dans laquelle la multiplication est totalement spécifiée par le fait que c'est une K-algèbre qui, comme K-espace vectoriel admet pour base la famille des $\sigma^k, k \in \mathbf{Z}$ et par la règle de (non-) commutation suivante :

$$\forall a \in K \, , \, \forall k \in \mathbf{Z} \, , \, \sigma^k a = \sigma_q^k(a)\sigma^k.$$

Cette règle se comprend bien si l'on observe que $\sigma^k a$ représente le composé des opérateurs (définis sur $\mathcal{A}$) : $f \mapsto af$ et σ_q^k, donc l'opérateur $f \mapsto \sigma_q^k(af) = \sigma_q^k(a)\sigma_q^k(f)$.

Exercice 5.2.1 Vérifier que l'on obtient ainsi une K-algèbre.

Exercice 5.2.2 Soit ∂ une dérivation de K, par exemple $D = d/dz$ ou $\delta = z\, d/dz$. Définir les opérateurs différentiels $\sum a_k \partial^k$ (ici, tous les $k \geq 0$) sur une algèbre différentielle $\mathcal{A}$, puis l'algèbre de polynômes non commutatifs correspondante $K < \partial >$.
Indication : ici, on doit déduire la règle de commutation de la formule de Leibnitz : $\partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$, *donc poser* $\partial.a = \partial(a) + a\partial$. *Il faut ensuite définir* $\partial^k.a$ *pour* $k \in \mathbf{N}$ *quelconque.*

Du fait que σ_q est inversible et que K est un corps, on peut écrire toute équation aux q-différences sous la forme :

$$(E_{\underline{a}}) \quad \sigma_q^n f + a_1 \sigma_q^{n-1} f + \cdots + a_n f = 0 \, , \, a_n \neq 0,$$

donc sous la forme $P.f = 0$, où P est un opérateur *entier, unitaire* :

$$P = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-1} + \cdots + a_n.$$

On peut même supposer P *propre*, c'est-à-dire $a_n \neq 0$. En fait, tout élément de $\mathcal{D}_{q,K}$ est de la forme $u.P$ avec u inversible et P entier, unitaire, propre.

Définition 5.2.3 L'équation $(E_{\underline{a}})$ est dite *fuchsienne en* 0 si tous les a_i sont holomorphes en 0 et si de plus $a_n(0) \neq 0$.

Exercice 5.2.4 On suppose l'équation $(E_{\underline{a}})$ fuchsienne en 0. Dire à quelle condition cette équation admet une solution série f telle que $f(0) = 1$. Dire à quelle condition elle admet une solution de la forme $e_d f$, où f est une série telle que $f(0) = 1$ et, où la fonction e_d vérifie la relation $\sigma_q e_d = d e_d$ pour un certain $d \in \mathbf{C}^*$.
Indication : on doit trouver une "équation caractéristique" dont d *est solution, comme dans le cas des hypergéométriques basiques ou dans le cas des équations différentielles.*

Enfin, on vectorialisera l'équation $(E_{\underline{a}})$ en posant $X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$(S_A) \quad \sigma_q X = AX \, , \, A = A_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Notons que, du fait que $a_n \neq 0$, on a $\det A \neq 0$.

5.2.2 Systèmes

Définition 5.2.5 Un système aux q-différences de rang n sur K est un système :

$$(S_A) \quad \sigma_q X = AX \ , \ A \in GL_n(K).$$

Exercice 5.2.6 Montrer que si $A \in M_n(K)$ est singulière (déterminant nul), le système $\sigma_q X = AX$ peut se ramener à un système de rang inférieur.
Indication : si le rang de A est $p < n$, on peut (à conjugaison près) supposer que toutes ses lignes sont combinaison linéaires des p premières ; on peut alors écrire $A = (\sigma_q P)A'$ avec $P = \begin{pmatrix} I_p \\ C \end{pmatrix}$. On a $B = A'P \in GL_p(K)$ et les solutions X de (S_A) sont les $X = PY$, où Y est solution de (S_B).

Définition 5.2.7 Une *solution fondamentale* de (S_A) dans $\mathcal{A}$ est une matrice $\mathcal{X} \in GL_n(\mathcal{A})$ telle que $\sigma_q \mathcal{X} = A\mathcal{X}$.

Proposition 5.2.8 *S'il existe une solution fondamentale de (S_A) dans $\mathcal{A}$, les solutions (vectorielles) de (S_A) dans $\mathcal{A}$ forment un module libre de rang n sur l'algèbre $\mathcal{A}^{\sigma_q}$ des éléments σ_q invariants de $\mathcal{A}$; une base de ce module est constituée par les colonnes de $\mathcal{X}$.*

Preuve. - On peut toujours écrire $X = \mathcal{X}C$ avec $C \in \mathcal{A}^n$ (puisque $\mathcal{X}$ est inversible), et l'on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_q X = AX \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_q(\mathcal{X}C) = A(\mathcal{X}C) \\
&\Leftrightarrow \quad (\sigma_q \mathcal{X})(\sigma_q C) = A\mathcal{X}C \\
&\Leftrightarrow \quad \sigma_q C = C \text{ puisque } \sigma_q \mathcal{X} = A\mathcal{X} \in GL_n(\mathcal{A}) \\
&\Leftrightarrow \quad C \in (\mathcal{A}^{\sigma_q})^n.
\end{aligned}$$

□

Exercice 5.2.9 Le rang de l'espace des solutions est toujours (indépendamment de l'existence d'une solution fondamentale) majoré par n.

Définition 5.2.10 L'*algèbre des constantes* est l'algèbre des éléments σ_q-invariants de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{\sigma_q} = \{ f \in \mathcal{A} \ / \ \sigma_q f = f \}.$$

En particulier, si $\mathcal{A}$ est un corps, $\mathcal{A}^{\sigma_q}$ est aussi un corps et, dans la proposition, les solutions forment un espace vectoriel de dimension n sur le corps des constantes. Si, par exemple, $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ (qui sera notre favori), le corps des constantes est un corps de fonctions elliptiques, comme on le verra au 6.1.3

Exemple 5.2.11 L'équation la plus simple est l'équation de rang 1 :

$$\sigma_q f = f,$$

(à comparer avec son analogue différentiel $Df = 0$), dont les solutions forment le $\mathcal{A}^{\sigma_q}$-module $\mathcal{A}^{\sigma_q}$.

Exemple 5.2.12 L'équation la plus simple suivante est l'équation de rang 1 :

$$\sigma_q f = cf \ , \ c \in \mathbf{C}^*,$$

(à comparer avec son analogue différentiel $\delta f = cf, c \neq 0$). Si e_c est une solution inversible dans $\mathcal{A}$, ses solutions forment le $\mathcal{A}^{\sigma_q}$-module $\mathcal{A}^{\sigma_q} e_c$.

HYPOTHÈSE : nous supposerons que $\mathcal{A}$ contient, pour chaque $c \in \mathbf{C}^*$, un élément inversible e_c tel que $\sigma_q e_c = c e_c$.

Exercice 5.2.13 Montrer que, $\forall c, d \in \mathbf{C}^*$, $\phi_{c,d} = \frac{e_c e_d}{e_{cd}} \in \mathcal{A}^{\sigma_q}$.

Exemple 5.2.14 Premier système ne se ramenant pas à des équations de rang 1 :

$$\sigma_q X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_q f = f + g \\ \sigma_q g = g \end{cases}, \text{ en posant } X = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

On a la solution $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; pour la compléter en une solution fondamentale, il faut prendre g inversible ; si l'on déshomogénéise en posant $f = lg$, il faut $\sigma_q l = l + 1$; dans ce cas, $g = 1$ et $\begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}$ conviennent, d'où la solution fondamentale :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

HYPOTHÈSE : nous supposerons que $\mathcal{A}$ contient un élément l tel que $\sigma_q l = l + 1$.

Exercice 5.2.15 Montrer, avec ces seules hypothèses, que l'on peut résoudre tous les systèmes à coefficients constants (leur trouver une solution fondamentale).
Indication : reprendre la méthode via la décomposition de Dunford utilisée pour les systèmes fuchsiens standards ; ou bien voir le chapitre 6.

Définition 5.2.16 Soit $A \in GL_n(K)$ (matrice d'un système aux q-différences). Pour tout $F \in GL_n(K)$, matrice d'une *transformation de jauge*, nous notons :

$$F[A] = (\sigma_q F) A F^{-1},$$

et nous disons que $B = F[A]$ est équivalent à A : rationnellement si $K = \mathbf{C}(z)$, méromorphiquement si $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$ ou $\mathbf{C}(\{z\})$, etc ...

On fait ainsi opérer le groupe $GL_n(K)$ à gauche sur l'ensemble des systèmes aux q-différences. Si $B = F[A]$ et si (S_A) admet la solution fondamentale $\mathcal{X}$, alors $F\mathcal{X}$ est une solution fondamentale de (S_B) ; plus généralement, X est une solution (vectorielle) de (S_A) si et seulement si FX est une solution de (S_B).

Réciproquement, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont respectivement solutions fondamentales des systèmes de rang n (S_A) et (S_B) dans $\mathcal{A}$, alors $F = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1} \in GL_n(\mathcal{A})$ vérifie $F[A] = B$; mais, bien sûr, cela ne dit pas que $F \in GL_n(K)$!

Notre but principal est la classification rationnelle des systèmes aux q-différences linéaires rationnels.
Pratiquement, nous nous cantonnerons aux systèmes *fuchsiens*.

5.2.3 Le lemme du vecteur cyclique

Une preuve algébrique générale en sera donnée en exposé (voir 8.5). La jolie démonstration qui suit est adaptée de Birkhoff (et reproduite telle quelle de [47]). Elle est rédigée pour le cas où $K = \mathbf{C}(z)$ mais reste valable si $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$ ou $\mathbf{C}(\{z\})$.

Définition 5.2.17 Le *lieu singulier* d'une matrice $A \in GL_n(K)$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A) &= \text{Pôles de } A \cup \text{ Pôles de } A^{-1} \\ &= \text{Pôles de } A \cup \text{ Zéros de } \det A. \end{aligned}$$

Dire que $(\sigma_q F)AF^{-1}$ est de la forme A_a, c'est dire que les lignes $f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ de F sont linéairement indépendantes et que $\sigma_q f^{(i)}A = f^{(i+1)}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Nous cherchons donc $f = (f_1,\dots,f_n) \in \mathbf{C}(z)^n$ tel que, en posant

$$\begin{cases} f^{(1)} = f \\ f^{(i+1)} = \sigma_q f^{(i)}A \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

on obtienne une base $(f^{(1)},\dots,f^{(n)})$ de $\mathbf{C}(z)^n$.

On choisit pour cela $z_0 \in \mathbf{C}^* - q^{-\{0,\dots,n-1\}}\mathcal{S}(A)$, autrement dit, tel que $A(z_0),\dots,A(q^{n-1}z_0) \in GL_n(\mathbf{C})$ et l'on impose les conditions :

$$\begin{cases} (f_1(z_0),\dots,f_n(z_0)) = e_1 \\ (f_1(qz_0),\dots,f_n(qz_0)) = e_2 A(z_0)^{-1} \\ \dots \\ (f_1(q^{n-1}z_0),\dots,f_n(q^{n-1}z_0)) = e_n A(z_0)^{-1}A(qz_0)^{-1}\cdots A(q^{n-1}z_0)^{-1} \end{cases}$$

où $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}(z)^n$. Ces conditions sont évidemment réalisables avec $f_1,\dots,f_n \in \mathbf{C}(z)$. Elles signifient que la matrice $F \in M_n(\mathbf{C}(z))$ de lignes $f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ vérifie $F(z_0) = I_n$, donc que $F \in GL_n(\mathbf{C}(z))$. On en déduit :

Théorème 5.2.18 *Tout système aux q-différences (linéaire, à coefficients rationnels) de rang n est rationnellement équivalent au système associé à une équation aux q-différences (linéaire, à coefficients rationnels) d'ordre n.* □

5.3 Un peu de formalisme

Le contenu mathématique de cette section est presque vide, on veut simplement s'y donner un langage commode. Le lecteur est chaudement invité à chercher dans chaque cas "l'analogue classique", *i.e.* concernant les équations différentielles.

5.3.1 Modules aux q-différences

Posons, pour $A \in GL_n(K)$ et $X \in \mathcal{A}^n$:

$$\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma_q X.$$

Nous considérons le couple (K^n,Φ_A) comme un modèle du système (S_A), de la même manière qu'une matrice agissant sur un espace vectoriel est un modèle d'un système d'équations linéaires.

L'analogue différentiel de cet objet est (K^n,Δ_A), où $\Delta_A(X) = \partial X - AX$, qui modélise le système différentiel $\partial X = AX$ (ici, ∂ est une dérivation).

Remarque 5.3.1 Par rapport à la situation "primitive" des systèmes d'équations linéaires, des matrices, endomorphismes et espaces vectoriels, la difficulté conceptuelle ici (comme dans le cas différentiel) est qu'il y a *d'une part* un corps K des coefficients des équations, du système, de la matrice, etc ..., *d'autre part* une algèbre (ou un corps) $\mathcal{A}$ où l'on cherche les solutions : alors que, pour les équations linéaires, il découle du théorème de Rouché-Fontené qu'une telle distinction n'a pas d'objet. Ainsi, l'objet (K^n,Φ_A) est un modèle du système (S_A) et ses propriétés algébriques seront utiles pour décrire sa *structure* et celle des solutions, si celles-ci existent. Mais *l'existence* des solutions (ou d'un contingent "suffisamment grand" de solutions, comme dans le théorème de Cauchy pour les équations différentielles) concernera plutôt l'algèbre $\mathcal{A}$ et ses propriétés analytiques.

Pour comprendre la définition qui suit, il est suggéré de chercher *a priori* de quelles propriétés algébriques jouit l'opérateur Φ_A que nous venons d'introduire.

Définition 5.3.2 Un *module aux q-différences* sur le corps aux q-différences (K,σ_q) est un couple (V,Φ) formé d'un K-espace vectoriel de dimension finie V et d'un *automorphisme* σ_q*-linéaire* Φ de V : autrement dit, Φ est un automorphisme du groupe V tel que :

$$\forall \lambda \in K \ , \ \forall x \in V \ , \ \Phi(\lambda x) = \sigma_q(\lambda)\Phi(x).$$

L'analogue différentiel serait un couple (V,Δ) formé d'un K-espace vectoriel de dimension finie V et d'une *connexion* Δ de V, autrement dit, Δ est un endomorphisme du groupe V tel que $\forall \lambda \in K \ , \ \forall x \in V \ , \ \Delta(\lambda x) = \partial(\lambda)x + \lambda\Delta(x)$. La σ_q-linéarité est donc un analogue multiplicatif de la règle de Leibnitz.

Définition 5.3.3 Un morphisme de modules aux q-différences $(V,\Phi) \to (W,\Psi)$ est une application K-linéaire $u : V \to W$ telle que $\Psi \circ u = u \circ \Phi$. Un isomorphisme est un morphisme bijectif (son inverse est alors un morphisme).

Exercice 5.3.4 Montrer que par le choix d'une base tout module aux q-différences est isomorphe à un module de la forme (K^n, Φ_A).

Le module aux q-différences (V,Φ) est donc un modèle *intrinsèque* (indépendant des coordonnées) de (S_A) et de Φ_A, de même qu'un endomorphisme est un modèle intrinsèque d'un système d'équations linéaires ou d'une matrice.

Exercice 5.3.5 Formuler les analogues différentiels.

Définition 5.3.6 Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée
- d'une classe [2] $Ob(\mathcal{C})$ *d'objets* de $\mathcal{C}$;
- pour chaque couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de *morphismes* de X dans Y : on note de manière abrégée $f : X \to Y$ pour $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$;
- pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, d'un *(endo)morphisme identité* 1_X ou $Id_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$;
- pour chaque triplet (X,Y,Z) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application de composition $(f,g) \mapsto g \circ f$ de $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ dans $Mor_{\mathcal{C}}(X,Z)$.

Ces données sont soumises aux axiomes suivants : "la" composition est associative et "le" morphisme identité est neutre, autrement dit, les égalités suivantes sont vérifiées chaque fois que leurs membres droits et gauches sont définis :

$$f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f,$$

et

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On définit de manière évidente les notions d'endomorphisme, d'inverse à droite, d'inverse à gauche, d'inverse tout court, d'isomorphisme, d'automorphisme ...

Noter que les notions de monomorphisme et d'épimorphisme ne sont pas du tout (aussi) évidentes à définir.

Exercice 5.3.7 Le lecteur courageux vérifiera sans peine (mais avec soin) que les modules aux q-différences sur le corps aux q-différences (K,σ_q) forment une catégorie $DiffMod(K,\sigma_q)$; il notera au passage l'abus de langage répandu : pour parler de catégorie, il faudrait mentionner les morphismes, les identités et les compositions et pas seulement les objets.

Exercice 5.3.8 Faire la même chose pour les modules différentiels.

[2] On ne peut dire ici "ensemble" pour des raisons métamathématiques, mais nous nous comporterons exactement comme s'il s'agissait d'un ensemble.

5.3.2 $\mathcal{D}_{q,K}$-modules

Soit (V,Φ) un module aux q-différences sur (K,σ_q). On peut définir sur le groupe V une structure de $\mathcal{D}_{q,K}$-module à gauche en posant, pour $P(\sigma) \in \mathcal{D}_{q,K}$ et $v \in V$:

$$P(\sigma).v = \sum a_k \Phi^k(v)\ , \quad \text{où } P(\sigma) = \sum a_k \sigma^k.$$

Cette opération est bien connue dans le cas de l'algèbre linéaire : tout espace vectoriel muni d'un endomorphisme hérite d'une structure de module sur l'anneau des polynômes. Bien sûr, c'est parce que Φ n'est pas vraiment linéaire (il ne commute pas avec les homothéties) que l'on se retrouve ici avec un module sur un anneau non commutatif.

Exercice 5.3.9 Vérifier que l'on a bien un module.
Indication : il s'agit surtout de vérifier l'égalité $P.(Q.v) = (PQ).v$, qui découle de la définition spéciale du produit dans $\mathcal{D}_{q,K}$.

Pour tout anneau (pas nécessairement commutatif) R, on notera $R-Mod$ la catégorie des R-modules à gauche avec les morphismes R-linéaires. Il est classique que c'est une catégorie, mais on peut tout de même le vérifier ! Nous voulons formaliser l'idée qu'un module aux q-différences donne lieu (comme on l'a vu) à un $\mathcal{D}_{q,K}$-module à gauche et que cela est compatible avec les morphismes, les identités, les compositions, etc ...

Définition 5.3.10 Un *foncteur* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{C}'$ associe à chaque objet X de $\mathcal{C}$ un objet $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{C}'$ et à chaque morphisme $u : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ un morphisme $\mathcal{F}(u) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ dans $\mathcal{C}'$, de manière compatible avec les structures algébriques, autrement dit, les égalités suivantes sont vérifiées chaque fois que leurs membres droits et gauches sont définis :

$$\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)},$$

et

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

Exercice 5.3.11 Définir soigneusement un foncteur de $DiffMod(K,\sigma_q)$ dans $\mathcal{D}_{q,K}-Mod$.

Naturellement, nous serons surtout intéressés par les $\mathcal{D}_{q,K}$-modules qui sont de dimension finie sur K, que nous voulons considérer comme sous-catégorie de $\mathcal{D}_{q,K}-Mod$.

Définition 5.3.12 La *sous-catégorie pleine* $\mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{C}$ formée des objets d'une sous-classe O' de $Ob(\mathcal{C})$ est définie comme suit : $Ob(\mathcal{C}') = O'$ et, pour deux objets X et Y de O', $Mor_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$. De plus, les identités dans $\mathcal{C}'$ sont celles dans $\mathcal{C}$ et les compositions dans $\mathcal{C}'$ sont les restrictions des compositions dans $\mathcal{C}$.

Ainsi, les $\mathcal{D}_{q,K}$-modules qui sont de dimension finie sur K forment une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_{q,K}-Mod$, que nous noterons $\mathcal{D}_{q,K}-Mod^f$. Notons que l'on peut les caractériser dans le langage de l'algèbre commutative :

Exercice 5.3.13 Démontrer que ces modules sont en fait les $\mathcal{D}_{q,K}$-modules de longueur finie.

Exercice 5.3.14 Reprendre tout cela dans le cas différentiel.

Exercice 5.3.15 Définir la catégorie des couples (V,ϕ) formés d'un espace vectoriel de dimension finie et d'un endomorphisme de cet espace, et la comparer à la catégorie des modules sur l'anneau des polynômes $K[T]$.

5.3.3 Equivalences

Nous voulons formaliser l'idée qu'un module aux q-différences est "la même chose" qu'un $\mathcal{D}_{q,K}$-module, au moins sous la condition que ce dernier soit de dimension finie comme K-espace vectoriel : on a donc une inclusion de catégories. Mais les catégories ne sont pas des ensembles, et cela de bien des manières. Il faudra donc s'accoutumer aux définitions qui suivent. Elles paraitront sans doute plus naturelles au chapitre suivant, quand on y fera appel pour formuler un théorème de classification.

Définition 5.3.16 Le *foncteur* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit *pleinement fidèle* si, pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}$, il induit une bijection :

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f) \\ Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Mor_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)) \end{cases}.$$

On vérifie facilement que, pour tout foncteur, deux objets isomorphes ont des images isomorphes ; pour un foncteur pleinement fidèle, la réciproque est vraie (le vérifier !) et l'on a au moins une notion primitive d'injectivité. Mais en fait, nous voulons exprimer plus : en considèrant un module aux q-différences comme un $\mathcal{D}_{q,K}$-module, on ne change pas la notion de morphisme.

Exercice 5.3.17 Le foncteur défini précédemment de $DiffMod(K,\sigma_q)$ dans $\mathcal{D}_{q,K} - Mod$ est pleinement fidèle.

On veut maintenant préciser "l'image" de ce foncteur, c'est-à-dire expliciter la catégorie des objets effectivement atteints. Cependant, dans le contexte des catégories, la notion d'image et la notion de surjectivité n'ont pas grand interêt. Nous allons tenter de l'illustrer par une disgression sur un exemple amusant mais significatif, et d'ailleurs lui-même très important en mathématiques. Nous présentons cet exemple sous forme de suite d'exercices.

Exercice 5.3.18 Définir une catégorie dont les objets sont les espaces topologiques pointés : couples (X,x) formés d'un espace topologique X et d'un point $x \in X$; et les morphismes $(X,x) \to (Y,y)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(x) = y$.

Exercice 5.3.19 Définir la catégorie des groupes et des morphismes de groupes.

Exercice 5.3.20 Montrer qu'en associant à l'espace topologique pointé (X,x) le groupe $\pi_1(X,x)$ des classes d'homotopie de lacets de base x dans X (*groupe d'homotopie de* (X,x)) et, à $f : (X,x) \to (Y,y)$, le morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ qui, à la classe d'homotopie du lacet γ associe la classe d'homotopie du laces $f \circ \gamma$, on définit un foncteur.

Exercice 5.3.21 Démontrer que $\mathbf{Z}$ n'est pas dans l'image de ce foncteur : il n'est le groupe d'homotopie d'aucun espace pointé.
Indication : l'élément 0 *de* $\mathbf{Z}$ *est défini comme une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels lorsque l'on construit* $\mathbf{Z}$ *à partir de* $\mathbf{N}$. *En tant qu'ensemble,* 0 *contient donc des couples d'entiers naturels. Il ne contient aucun lacet dans un espace topologique, et n'est donc la classe d'homotopie d'aucun lacet.*

Bien sûr, de nombreux groupes d'homotopie sont isomorphes à $\mathbf{Z}$ et de nombreuses classes d'homotopie de lacets sont triviales et *s'identifient* donc naturellement à l'entier relatif 0. Remarquons qu'il y a une subtilité analogue quand on parle "du" groupe trivial : est-ce $\{0\} \subset \mathbf{R}$ ou bien $\{1\} \subset \mathbf{C}^*$ par exemple ? L'important est que ces objets sont surtout clairement définis *à isomorphisme près*.

Définition 5.3.22 On appelle *image essentielle* d'un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ la classe des objets de $\mathcal{C}'$ qui sont isomorphes à un objet de la forme $\mathcal{F}(X)$, $X \in Ob(\mathcal{C})$. Par extension, on appelle également image essentielle de $\mathcal{F}$ la *sous-catégorie pleine* $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}'$ formée de cette sous-classe d'objets.

Ainsi, $\mathbf{Z}$ est dans l'image essentielle du foncteur "groupe fondamental" (en fait, on peut démontrer que celui-ci est essentiellement surjectif selon la définition suivante).

Définition 5.3.23 Le foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit *essentiellement surjectif* si son image essentielle est $\mathcal{C}'$. Une *équivalence de catégories* est un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Comme une équivalence n'est pas *vraiment* surjective, elle n'admet pas vraiment d'inverse : on peut cependant définir une notion de quasi-inverse et les équivalences en ont.

Exercice 5.3.24 Vérifier que le foncteur précédemment défini est une équivalence de $DiffMod(K,\sigma_q)$ sur la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}_{q,K} - Mod^f$ de $\mathcal{D}_{q,K} - Mod$.

Exercice 5.3.25 Traiter de manière analogue l'exemple des modules différentiels et celui des espaces vectoriels munis d'un endomorphisme.

Exercice 5.3.26 Définir la catégorie des représentations linéaires complexes de dimension finie d'un groupe G. Dans le cas où ce groupe est $\mathbf{Z}$, montrer qu'elle est équivalente à la catégorie des modules de longueur finie sur l'anneau $\mathbf{C}[T,T^{-1}]$ des polynômes de Laurent. Tenter une description similaire pour $\mathbf{Z}^2$, resp. pour le groupe libre à deux générateurs.

Exercice 5.3.27 Décrire la correspondance de Riemann-Hilbert sous la forme d'une équivalence de catégories.

Chapitre 6

Résolution locale

6.1 Théorie des fonctions

Dorénavant, $|q| > 1$. On écrira $q = e^{-2\imath\pi\tau}$, avec $\tau \in \mathcal{H}$ et $p = q^{-1}$. On convient donc que, quelque soit le complexe α, $q^{\alpha} = e^{-2\imath\pi\tau\alpha}$.

6.1.1 La fonction Theta de Jacobi

Il y a toute une famille de fonctions Theta "classiques" définies sur $\mathbf{C}$ et automorphes pour un réseau de $\mathbf{C}$: nous en verrons une plus loin. Jacobi en a défini des variantes multiplicatives, définies sur $\mathbf{C}^*$ et satisfaisant des équations aux q-différences.

Définition 6.1.1 La *fonction Theta de Jacobi* (qui nous concerne) est :

$$\theta_q(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n.$$

Des variantes de θ_q et leur relation avec celle-ci sont décrites dans [53], [34], [22] par exemple.

Proposition 6.1.2 *La fonction θ_q est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et vérifie l'équation aux q-différences :*

$$\forall z \in \mathbf{C}^*\ ,\ \theta_q(qz) = -qz\theta_q(z),$$

soit encore $\sigma_q\theta_q = -qz\theta_q$.

Preuve. - Cette série converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}^*$ et définit donc une fonction de $\mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$; argument alternatif : θ_q est somme d'une série entière en z et d'une série entière en z^{-1}, toutes deux de rayon de convergence infini. On peut alors calculer, pour tout $z \in \mathbf{C}^*$:

$$\begin{aligned}
\theta_q(qz) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} q^n z^n \\
&= \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^{n+1} q^{-n(n+1)/2} q^{n+1} z^{n+1} \quad \text{(décalage d'indice bijectif dans } \mathbf{Z}\text{)} \\
&= -qz \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} q^n z^n \\
&= -qz \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n \\
&= -qz\theta_q(z).
\end{aligned}$$

□

Exercice 6.1.3 Etudier séparément les deux fonctions :

$$\theta_q^+(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n \text{ et } \theta_q^-(z) = \sum_{n\leq 0} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n.$$

Voici maintenant la justement célèbre *formule du triple produit de Jacobi* :

Théorème 6.1.4 *Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$:*

$$\theta_q(z) = (p;p)_\infty (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty = \prod_{n\geq 1}(1-q^{-n}) \prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}z) \prod_{n\geq 1}(1-q^{-n}z^{-1}).$$

Preuve. - D'après les résultats de 5.1.1 (ici adaptés à notre nouvelle convention $|q|>1, p=q^{-1}$), la fonction $f_q(z) = (z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et y vérifie l'équation aux q-différences :

$$f_q(qz) = \frac{1-qz}{1-1/qz} f_q(z) = -qz f_q(z).$$

On la développe en série de Laurent :

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \, , \; f_q(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

De l'équation aux q-différences, on tire la relation de récurrences :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \, , \; a_n = -q^{1-n} a_{n-1}.$$

Il est alors facile de conclure que $\forall n \in \mathbf{Z} \, , \; a_n = (-1)^n q^{-n(n-1)/2} a_0$. Ainsi, $f_q = a_0 \theta_q$ et il nous reste seulement à déterminer le facteur constant a_0. Celui-ci dépend de q ou p et nous le notons $a_0(p)$. Pour un choix générique de $z_0 \in \mathbf{C}^*$ (en fait, pour $z_0 \not\in q^{\mathbf{Z}}$), nous avons :

$$\forall p \in \mathbf{C} \text{ tel que } 0<|p|<1 \, , \; a_0(p) = \frac{\prod_{n\geq 0}(1-p^n z_0) \prod_{n\geq 1}(1-p^n z_0^{-1})}{\sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n p^{n(n-1)/2} z_0^n}.$$

Du fait que sommes et produits convergent normalement (comme fonctions de p) sur tout compact de $\overset{\circ}{D}(0,1)$, on déduit que $\lim\limits_{p\to 0} a_0(p) = 1$. La suite de la preuve repose sur deux calculs mystérieux. Conformément à nos conventions (début de ce chapitre), $\sqrt{q}$ désigne $e^{-\imath\pi\tau}$, etc ...

1. Premier calcul mystérieux :

$$\begin{aligned}
\theta_q(\imath/\sqrt{q}) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} \imath^n q^{-n/2} \\
&= \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-\imath)^n q^{-n^2/2} \\
&= \sum_{m\in\mathbf{Z}} (-\imath)^{2m} q^{-(2m)^2/2} \quad \text{car } (-\imath)^{(2m+1)} + (-\imath)^{-(2m+1)} = 0 \\
&= \sum_{m\in\mathbf{Z}} (-1)^m (q^4)^{-m^2/2} \\
&= \sum_{m\in\mathbf{Z}} (-1)^m (q^4)^{-m(m-1)/2} (q^{-2})^m \\
&= \theta_{q^4}(\frac{1}{q^2}).
\end{aligned}$$

2. Second calcul mystérieux : de l'égalité $f_q(z) = [(1-z)(1-1/qz)][(1-z/q)(1-1/q^2z)]\cdots$, on tire d'une part :

$$\begin{aligned}
f_q(\imath/\sqrt{q}) &= [(1-\imath/\sqrt{q})(1+\imath/\sqrt{q})][(1-\imath/q\sqrt{q})(1+\imath/q\sqrt{q})]\cdots \\
&= (1+1/q)(1+1/q^3)\cdots \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1+1/q^n)}{\prod_{n\geq 1}(1+1/q^{2n})};
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
f_{q^4}(1/q^2) &= (1-1/q^2)^2(1-1/q^6)^2\cdots \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})^2}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})^2} \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})} \times \prod_{n\geq 1} \frac{(1-1/q^{2n})}{(1-1/q^{4n})} \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})} \times \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1+1/q^{2n})}.
\end{aligned}$$

Combinant ces deux calculs et la définition de $a_0(p)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{a_0(p^4)}{a_0(p)} &= \frac{f_{q^4}(1/q^2)}{f_q(\imath/\sqrt{q})}\frac{\theta_q(\imath/\sqrt{q})}{\theta_{q^4}(1/q^2)} \\
&= \frac{f_{q^4}(1/q^2)}{f_q(\imath/\sqrt{q})} \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})} \times \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1+1/q^n)} \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})} \times \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^n)}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{2n})} \times \\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^n)}{\prod_{n\geq 1}(1-1/q^{4n})} \\
&= \frac{(p;p)_\infty}{(p^4;p^4)_\infty},
\end{aligned}$$

soit $a_0(p^4)(p^4;p^4)_\infty = a_0(p)(p;p)_\infty$. Mais on peut itérer cette égalité :

$$a_0(p)(p;p)_\infty = a_0(p^4)(p^4;p^4)_\infty = \cdots = a_0(p^{4^n})(p^{4^n};p^{4^n})_\infty = \cdots = 1.$$

□

Le calcul du facteur constant $a_0(p)$ est habituellement basé sur la théorie des fonctions Theta, mais la preuve élémentaire ci-dessus est tirée de [22]. En réalité, nous n'aurons pas besoin de connaitre la valeur de ce facteur, seulement la factorisation de θ_q en expressions du premier degré.

Remarque 6.1.5 Le calcul précédent fait apparaitre la simplicité de comportement des fonctions concernées lorsque $p \to 0$, c'est-à-dire lorsque $|q| \to \infty$, par exemple $\mathrm{Im}(\tau) \to +\infty$. Pourtant, le passage à la limite le plus courant est $q \to 1$, c'est-à-dire $\tau \to 0$: il concerne les q-analogies et, en particulier, tout le chapitre 7 sur la confluence. On ramènera l'étude de ce dernier cas à la situation la plus simple grâce à l'équation modulaire qui relie τ à $-1/\tau$ (théorème ci-dessous).

La formule sommatoire de Poisson : rappels et conséquences

On dit qu'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est *à décroissance rapide* si, pour tout entier n, $f = o(|x|^{-n})$ en $\pm\infty$. On définit alors la *classe de Schwartz* comme l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C}) \ / \ \forall k \in \mathbf{N}\ ,\ f^{(k)} \text{ est à décroissance rapide}\}.$$

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ est définie par la formule :

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\imath\pi xy}\, dx.$$

C'est également un élément de $\mathcal{S}$. La *formule sommatoire de Poisson* s'énonce alors ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{2\imath\pi nx}.$$

Elle se prouve en développant en série de Fourier la fonction 1-périodique définie par le membre de gauche de l'égalité.

Si $t > 0$, la fonction $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ appartient à la classe de Schwartz et sa transformée de Fourier se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_t(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{2\imath\pi xy}\, dx \\
&= e^{-\pi y^2/t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x+\imath y/t)^2}\, dx \\
&= e^{-\pi y^2/t} \int_{-\infty+\imath y/t}^{+\infty+\imath y/t} e^{-\pi t x^2}\, dx \\
&= e^{-\pi y^2/t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2}\, dx \text{ (formule des résidus et décroissance rapide de l'intégrande à l'infini)} \\
&= e^{-\pi y^2/t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ (calcul classique de l'intégrale de Gauss).}
\end{aligned}$$

On a donc $\hat{f}_t = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{1/t}$.

Exercice 6.1.6 Donner une autre démonstration de cette formule en montrant que $\hat{f}_t$ est solution de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{\sqrt{t}} \\ f' = -\frac{2\pi x}{t} f \end{cases}.$$

Lemme 6.1.7 *Pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi t (x+n)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} e^{2\imath\pi nx}.$$

Preuve. - C'est la formule sommatoire de Poisson appliquée à f_t. □

En fait, comme c'est le cas dans un certain nombre d'applications de l'analyse complexe à l'arithmétique (formes modulaires ...), le précédent raisonnement d'analyse réelle sera complété par un prolongement analytique pour donner une formule plus puissante : il s'agit ici de *l'équation modulaire* de la fonction Theta classique.

Définition 6.1.8 Pour $\tau \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathbf{C}$, on pose :

$$\tilde{\theta}(\tau, x) = \theta_q(z)\ ,\ \text{où } q = e^{-2\imath\pi\tau} \text{ et } z = e^{2\imath\pi x}.$$

La fonction Theta (classique) $\tilde{\theta}(\tau,-)$ est donc holomorphe et 1-périodique sur $\mathbf{C}$ et elle y admet le développement en série de Fourier :

$$\tilde{\theta}(\tau,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{2\imath\pi(\tau n(n-1)/2+nx+n/2)}.$$

Outre la 1-périodicité en la variable x (immédiate au vu de la définition), on déduit de l'équation aux q-différences satisfaite par θ_q une autre "relation d'automorphie" :

$$\tilde{\theta}(\tau,x-\tau) = -qz\tilde{\theta}(\tau,x) = e^{2\imath\pi(-\tau+x+1/2)}\tilde{\theta}(\tau,x).$$

Cependant, la relation la plus profonde est *l'équation modulaire*, dont nous allons donner un cas particulier [1].

Théorème 6.1.9 *Pour $\tau \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathbf{C}$, on a :*

$$\tilde{\theta}(\tau,x) = \frac{\sqrt{\imath/\tau}}{e^{(\imath\pi/\tau)(x-(\tau+1)/2)^2}}\tilde{\theta}(-1/\tau,-x/\tau)$$

Ici $\imath/\tau \notin \mathbf{R}_-$, puisque $\tau \in \mathcal{H}$, et l'on utilise la détermination principale de la racine carrée.

Preuve. - Notons $x' = x-(\tau+1)/2$ et $t = \imath/\tau$. On a :

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(\tau,x) = &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi\imath\tau n^2} e^{2\imath\pi n(x-(\tau+1)/2)} \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} e^{2\imath\pi n x'}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose $\tau \in \mathbf{R}_+^*\imath$, c'est-à-dire $t > 0$, on peut appliquer le lemme 6.1.7 et l'on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(\tau,x) &= \sqrt{t}\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi t(x'+n)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\imath/\tau}}{e^{\imath\pi(x-(\tau+1)/2)^2/\tau}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\imath\pi(n^2+2n(x-(\tau+1)/2))/\tau}.\end{aligned}$$

On vérifie par ailleurs que

$$\tilde{\theta}(-1/\tau,-x/\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\imath\pi(n^2+2n(x-(\tau+1)/2))/\tau},$$

et l'égalité énoncée est en tout cas démontrée pour $\tau \in \mathbf{R}_+^*\imath$. Comme les deux membres sont, pour tout $x \in \mathbf{C}$, des fonctions analytiques de $\tau \in \mathcal{H}$, l'égalité reste vraie pour tout $\tau \in \mathcal{H}$ d'après le principe d'unicité du prolongement analytique. $\square$

Remarque 6.1.10 Le nom d'équation modulaire est motivé par l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathcal{H}$ (voir [51]). La matrice :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ , } a,b,c,d \in \mathbf{Z} \text{ , } ad-bc = 1,$$

agit sur la variable "modulaire" τ par l'homographie :

$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

[1] J'en profite pour rectifier une petite erreur typographique (signe devant x/τ) dans [47].

et sur la variable x par :

$$x \mapsto \frac{x}{c\tau + d}.$$

La fonction qui satisfait l'équation modulaire doit alors être multipliée par un facteur holomorphe inversible $\alpha(g,\tau,x)$. Dans le cas de la translation $\tau \mapsto \tau + 1$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $\alpha(g,\tau,x) = 1$. Dans le cas de l'inversion $\tau \mapsto -1/\tau$:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\alpha(g,\tau,x)$ est le facteur plus compliqué du théorème. Comme $\tau \mapsto \tau + 1$ et $\tau \mapsto -1/\tau$ engendrent le groupe modulaire, on doit avoir une relation analogue pour tout g.

Exercice 6.1.11 Etablir la relation générale.
Indication : voir [34]. On prendra garde que le paramètre τ dans les définitions de loc. cit. *est le double du notre.*

6.1.2 Briques de base

Les "anciens" (Adams, Birkhoff, Carmichael ...) résolvaient l'équation $\sigma_q f = cf$, $c \in \mathbf{C}^*$ (resp. l'équation $\sigma_q f = f + 1$) à l'aide de la fonction multiforme $z^{\log_q(c)}$ (resp. $\log_q(z)$), mais nous procéderons différemment. Nous allons décrire les fonctions élémentaires qui nous serviront à résoudre les équations aux q-différences fuchsiennes et les propriétés de ces fonctions, tout particulièrement en ce qui concerne les zéros et les pôles. En effet, la possibilité de ne recourir qu'à des fonctions méromorphes uniformes sur $\mathbf{C}^*$, pour agréable qu'elle soit, signifie que nous ne disposons plus de la monodromie des solutions comme invariant de nature géométrique pour coder les équations : c'est essentiellement la description des zéros et les pôles qui en tiendra lieu.

Diviseurs (vocabulaire)

Soit X une surface de Riemann, par exemple un ouvert connexe de $\mathbf{S}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(X)^*$, et pour tout $x \in X$, on note $v_x(f)$ l'ordre de f en x : si x est un zéro d'ordre n, $v_x(f) = n$; si x est un pôle d'ordre n, $v_x(f) = -n$; si x n'est ni un zéro ni un pôle, $v_x(f) = 0$. On vérifie sans peine que, $\forall f, g \in \mathcal{M}(X)^*$, $v_x(fg) = v_x(f) + v_x(g)$. On appelle *diviseur* de f sur X la combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de points de X formée des zéros et des pôles de f pondérés par leurs ordres :

$$\mathrm{div}_X(f) = \sum_{x \in X} v_x(f)\,[x].$$

Exemple 6.1.12 Il découle de la formule du triple produit de Jacobi que :

$$\mathrm{div}_{\mathbf{C}^*}(\theta_q) = \sum_{z \in q^{\mathbf{Z}}} [z].$$

Si X est compacte, cette somme est finie (plus précisément, elle n'a qu'un nombre fini de termes non nuls) et c'est un élément du groupe abélien libre engendré par X. En général, cette somme est seulement localement finie (tout compact de X ne contient qu'un nombre fini de points de poids non nul dans un diviseur donné). Dans tous les cas, l'ensemble de tous les diviseurs (combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers de points de X, supposées localement finies) forme un groupe abélien $Div(X)$ et l'on a un morphisme $\mathrm{div}_X : \mathcal{M}(X)^* \to Div(X)$. Les éléments de l'image sont appelés *diviseurs principaux*.

Exercice 6.1.13 Le noyau de div_X est $\mathcal{O}(X)^*$. Si X est compacte, c'est $\mathbf{C}^*$.

Dans le cas où X est compacte, à tout diviseur sur X, $D = \sum_{x \in X} n_x\,[x]$, on peut associer son *degré* $\deg(D) = \sum n_x \in \mathbf{Z}$, d'où un morphisme $\deg : Div(X) \to \mathbf{Z}$. On démontre que le degré d'un diviseur principal est 0. Ainsi, le morphisme div_X arrive en fait dans le sous-groupe $Div^0(X) = \text{Ker}\,\deg$ des diviseurs de degré 0.

Exercice 6.1.14 Si X est compacte, prouver que le degré d'un diviseur principal est nul.
Indication : dans le cas où $X = \mathbf{S}$, c'est un calcul amusant sur les zéros, les pôles et le degré d'une fraction rationnelle ; dans le cas général, appliquer le théorème des résidus à la forme différentielle df/f.

Exercice 6.1.15 Si $X = \mathbf{S}$, prouver la réciproque.
Indication : il s'agit de reconstruire une fraction rationnelle à partir de ses zéros et ses pôles.

Puisque, si X est compacte, les seules fonctions holomorphes sur X sont les constantes, on a dans ce cas une suite exacte :

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathcal{M}(X)^* \xrightarrow{\text{div}_X} Div^0(X).$$

Définition 6.1.16 On suppose que X est un ouvert q-invariant de $\mathbf{C}^*$, autrement dit : $qX = X$. On dit que f est une fonction *automorphe* sur X si $\frac{\sigma_q f}{f} \in \mathcal{O}(X)^*$.

Cela revient à dire que, quelque soit $x \in X$, $v_x(f) = v_{qx}(f)$. Ainsi, l'ordre $v_x(f)$ dépend seulement de la classe de x modulo $q^{\mathbf{Z}}$. Nous noterons $\mathbf{E}_q$ le groupe topologique quotient :

$$\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

Le groupe $\mathbf{E}_q$ sera décrit plus précisément en 6.1.3). Nous noterons de plus $\overline{x} \in \overline{X}$ les images respectives de x et X dans $\mathbf{E}_q$. Nous pouvons donc poser (pour f automorphe) $v_{\overline{x}}(f) = v_x(f)$ et :

$$\text{div}_{\overline{X}}(f) = \sum_{y \in \overline{X}} v_y(f)[y].$$

Exercice 6.1.17 Si $\overline{X}$ est compacte, cette combinaison linéaire est finie.

Exemple 6.1.18 La fonction θ_q est automorphe sur $X = \mathbf{C}^*$, comme le montre l'équation fonctionnelle $\sigma_q \theta_q = -qz\theta_q$. Il résulte de l'exemple 6.1.12 que son diviseur sur $\mathbf{E}_q$ est :

$$\text{div}_{\mathbf{E}_q}(\theta_q) = [\overline{1}].$$

Brique : les q-caractères

On pose, pour $c \in \mathbf{C}^*$, $\theta_{q,c}(z) = \theta_q(z/c)$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, de diviseur :

$$\text{div}_{\mathbf{C}^*}(\theta_{q,c}) = \sum_{z \in cq^{\mathbf{Z}}} [z] = \sum_{z \in q^{\mathbf{Z}}} [cz].$$

Elle est de plus automorphe et l'on a :

$$\text{div}_{\mathbf{E}_q}(\theta_{q,c}) = [\overline{c}].$$

Définition 6.1.19 Les *q-caractères* sont les fonctions (pour $c \in \mathbf{C}^*$) :

$$e_{q,c} = \frac{\theta_q}{\theta_{q,c}}.$$

Ce sont nos substituts aux fonctions multiformes $z^{\log_q(c)}$.

Proposition 6.1.20 *On a $e_{q,c} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$, $\sigma_q e_{q,c} = c e_{q,c}$ et $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(e_{q,c}) = [\overline{1}] - [\overline{c}]$.*

Preuve. - Cela résulte immédiatement de ce qui a été dit de θ_q et de $\theta_{q,c}$. □

Exercice 6.1.21 Calculer $e_{q,qc}$ ($c \in \mathbf{C}^*$) et e_{q,q^n} ($n \in \mathbf{Z}$).

Exercice 6.1.22 Soit, pour $c, d \in \mathbf{C}^*$, $\phi_{c,d} = \frac{e_{q,c} e_{q,d}}{e_{q,cd}}$. Vérifier que $\phi_{c,d}$ est q-invariante :

$$\phi_{c,d} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q},$$

et vérifier que son diviseur sur $\mathbf{E}_q$ est :

$$\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(\phi_{c,d}) = [\overline{1}] - [\overline{c}] - [\overline{d}] + [\overline{cd}] = [0] - [\overline{c}] - [\overline{d}] + [\overline{c} + \overline{d}].$$

Brique : le q-logarithme

Définition 6.1.23 Le *q-logarithme* est la fonction :

$$l_q(z) = z \frac{\theta_q'(z)}{\theta_q(z)}.$$

C'est notre substitut à la fonction multiforme $\log_q(z)$.

Proposition 6.1.24 *On a $l_q \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ et $\sigma_q l_q = l_q + 1$. Les pôles de l_q sont simples, ce sont les points de la spirale logarithmique discrète $q^{\mathbf{Z}}$.*

Preuve. - Encore une fois, cela résulte de l'équation fonctionnelle de θ_q (par dérivation logarithmique) et de la formule du triple produit. □

En revanche, on ne sait rien sur les zéros de l_q.

Exercice 6.1.25 Déduire de la formule du triple produit une expression explicite de l_q.

Exercice 6.1.26 Essayer de déceler le caractère fuchsien des q-caractères et du q-logarithme en étudiant leurs croissance près de 0.
Indication : il faut se placer loin des spirales de zéros et de pôles et montrer que croissance et décroissance de $e_{q,c}$ et de l_q sont plus modérées que celles de n'importe quelle puissance de θ_q.

6.1.3 Constantes

On va décrire précisément le corps des constantes de la théorie :

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \{f \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*) \ / \ \sigma_q f = f\}.$$

L'application $x \mapsto e^{2\iota\pi x}$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$ est un revêtement biholomorphe et permet donc d'identifier $\mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ à l'algèbre des fonctions holomorphes 1-périodiques sur $\mathbf{C}$ et $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ à l'algèbre des fonctions méromorphes 1-périodiques sur $\mathbf{C}$; par cette identification, la fonction $f(z)$ sur $\mathbf{C}^*$ correspond à la fonction $\tilde{f}(x) = f(e^{2\iota\pi x})$ sur $\mathbf{C}$. On vérifie que, si $g = \sigma_q f$, alors $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x - \tau)$, de sorte que f est q-invariante si et seulement si $\tilde{f}$ est τ-périodique. Ainsi, le corps $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ s'identifie au sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ formé des fonctions admettant 1 et τ comme périodes. Nous noterons :

$$\Lambda = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$$

le réseau de $\mathbf{C}$ engendré par 1 et τ, et :

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbf{C}) \ / \ f \text{ est } \Lambda\text{-périodique}\}$$

le *corps de fonctions elliptiques* correspondant. Ainsi, l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ sur $\mathcal{M}(\Lambda)$.

Géométriquement, l'image réciproque du sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}^*$ par le revêtement ci-dessus est le réseau Λ de $\mathbf{C}^*$, d'où un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbf{C}/\Lambda$ sur $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. En fait, cet isomorphisme est biholomorphe si l'on munit $\mathbf{C}/\Lambda$ et $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ des structures de surfaces de Riemann héritées respectivement de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^*$ (les deux applications canoniques de passage au quotient $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Lambda$ et $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ sont des revêtements et permettent donc ce transport de structure). La surface de Riemann $\mathbf{C}/\Lambda$ est un *tore complexe* : en tant que surface réelle, elle est difféomorphe à $(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\,/\,(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$, c'est-à-dire au produit du cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par lui-même. Tous les tores complexes sont donc isomorphes entre eux en tant que surfaces réelles, mais on prendra garde qu'ils ne le sont pas en tant que surfaces de Riemann :

Exercice 6.1.27 Démontrer que toute application holomorphe entre deux tores complexes $\mathbf{C}/\Lambda \to \mathbf{C}/\Lambda'$ est induite par une application affine $z \mapsto az+b$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $a\Lambda \subset \Lambda'$. En particulier, il y a isomorphie si et seulement si il existe $a \in \mathbf{C}^*$ tel que $a\Lambda = \Lambda'$.
Indication : voir [51].

Les corps $\mathcal{M}(\Lambda)$ et $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ s'identifient respectivement aux corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}/\Lambda$ et sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, ce qui est une autre manière de justifier leur isomorphie. Nous écrirons donc indifféremment :

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{M}(\mathbf{E}_q).$$

Rappels sur les fonctions elliptiques

Pour ces rappels, on peut consulter [1], [9], [28], [55] ... par exemple.

Le corps $\mathcal{M}(\Lambda)$ est une extension transcendante de $\mathbf{C}$, engendrée par la fonction de Weierstrass $\wp_\Lambda$ (qui est transcendante sur $\mathbf{C}$) et sa dérivée (qui est de degré 2 sur $\mathbf{C}(\wp_\Lambda)$). En fait, l'application $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$ induit un paramétrage d'une courbe algébrique d'équation $y^2 = P(x)$ (P étant un polynôme de degré 3 explicite) par le tore complexe $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}/\Lambda$, qui est par fois appelé *courbe elliptique*.

La surface de Riemann $\mathbf{E}_q$ étant compacte, on dispose de la suite exacte :

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathcal{M}(\mathbf{E}_q)^* \xrightarrow{\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}} Div^0(\mathbf{E}_q).$$

Le *théorème d'Abel-Jacobi* permet de préciser l'image de la flèche de droite. Pour cela, il faut utiliser la structure de groupe sur $\mathbf{E}_q$. Nous noterons additivement cette structure, bien qu'elle soit (entre autres) quotient de la structure de groupe sur $\mathbf{C}^*$ qui, elle, est évidemment notée multiplicativement [2]. Nous aurons donc des égalités un peu désagréables du genre :

$$\overline{cd} = \overline{c} + \overline{d}.$$

Pour tout diviseur $D = \sum n_x[x]$ sur $\mathbf{E}_q$, on peut calculer $ev_{\mathbf{E}_q}(D) = \sum n_x x$: puisque le groupe $\mathbf{E}_q$ est abélien, cette dernière expression est bien définie. On obtient ainsi un morphisme de groupes :

$$ev_{\mathbf{E}_q} : Div^0(\mathbf{E}_q) \to \mathbf{E}_q,$$

qui est évidemment surjectif, puisque $ev_{\mathbf{E}_q}([a]-[0]) = a$. Le théorème d'Abel-Jacobi s'énonce ainsi :

Théorème 6.1.28 *Le diviseur $D \in Div(\mathbf{E}_q)$ est principal (c'est le diviseur d'une fonction elliptique) si et seulement si il est de degré 0 et son évaluation dans $\mathbf{E}_q$ est nulle.* □

[2]Ce genre de déboire n'est pas totalement évitable, puisque la structure de groupe sur $\mathbf{E}_q$ provient également de celle sur $\mathbf{C}$. Les professionnels de l'utilisation des courbes elliptiques en cryptographie considèrent parfois le morphisme de passage au quotient $c \mapsto \overline{c} = c \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{E}_q$ comme un (crypto-)logarithme.

Corollaire 6.1.29 *On a une suite exacte :*

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathcal{M}(\mathbf{E}_q)^* \xrightarrow{div_{\mathbf{E}_q}} Div^0(\mathbf{E}_q) \xrightarrow{ev_{\mathbf{E}_q}} \mathbf{E}_q \to 0.$$

□

Rappelons que l'on a introduit dans l'exercice 6.1.22 la fonction elliptique $\phi_{c,d}$, de diviseur :

$$\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(\phi_{c,d}) = [\overline{1}] - [\overline{c}] - [\overline{d}] + [\overline{cd}] = [0] - [\gamma] - [\delta] + [\gamma+\delta], \text{ où } \gamma = \overline{c} \text{ et } \delta = \overline{d},$$

qui est évidemment de degré 0 et qui est bien d'évaluation 0 (comme le doit le diviseur d'une fonction elliptique) puisque, dans $\mathbf{E}_q$, on a les égalités : $\overline{1} = 0$ et $\overline{cd} = \overline{c} + \overline{d}$.

Exercice 6.1.30 Vérifier que les $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(\phi_{c,d})$, $c, d \in \mathbf{C}^*$, engendrent le groupe des diviseurs de degré $0 \in \mathbf{Z}$ et d'évaluation $0 \in \mathbf{E}_q$.
Indication : c'est aussi bien valable pour tout groupe abélien à la place de $\mathbf{E}_q$: un tel diviseur "trivial" peut être progressivement simplifié en remplaçant systématiquement chaque somme $[\gamma] + [\delta]$ par $[0] + [\gamma+\delta]$ jusqu'à épuisement de ses points.

Lemme 6.1.31 *Les $\phi_{c,d}$, $c, d \in \mathbf{C}^*$, engendrent le groupe $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)^*$.*

Preuve. - C'est une conséquence directe de la suite exacte du corollaire et de l'exercice ci-dessus. □

Proposition 6.1.32 *Les $\phi_{c,d}$, $c, d \in \mathbf{C}^*$, engendrent le corps $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$.* □

En fait, si $\mathcal{A} = K[l_q, (e_c^{\pm 1})_{c \in \mathbf{C}^*}]$, la lettre K désignant l'un de nos corps de coefficients habituels, on voit que le corps des constantes de $\mathcal{A}$ est aussi $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$. On est donc encombré, dans tous les cas, d'un très gros corps de constantes.

Remarque 6.1.33 Cela semble signifier que la classification fera apparaitre des invariants dans ce trop gros corps et non dans $\mathbf{C}$, comme c'est le cas pour les équations différentielles. Cette difficulté a été résolue par van der Put et Singer dans [37] en remplaçant les $e_{q,c}$ par des symboles algébriques e_c astreints aux relations $e_c e_d = e_{cd}$, et pour lesquels on *définit* σ_q par $\sigma_q e_c = c e_c$. Les exercices qui suivent montrent que c'est impossible pour de vraies fonctions, et pas seulement parce que nous aurions fait un choix maladroit. Nous montrerons d'autre part au 7.1 que la classification avec invariants dans $\mathbf{C}$ reste possible dans ce cadre.

Exercice 6.1.34 Soit $(f_c)_{c \in \mathbf{C}^*}$ une famille de solutions dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ des équations $\sigma_q f_c = c f_c$. Démontrer que les $\frac{f_c f_d}{f_{cd}}$ engendrent une extension transcendante de $\mathbf{C}$.
Indication : si l'on avait $\forall c, d \in \mathbf{C}^*$, $f_c f_d \in \mathbf{C}^* f_{cd}$, l'application $c \mapsto div_{\mathbf{E}_q}(f_c)$ serait un morphisme du groupe divisible $\mathbf{C}^*$ dans le groupe abélien libre $Div(\mathbf{E}_q)$: un tel morphisme est nécessairement trivial. Mais par ailleurs, $f_c / e_{q,c}$ est elliptique, donc son diviseur est de degré 0 et d'évaluation 0. Enfin, on connait le diviseur de $e_{q,c}$.

Exercice 6.1.35 Démontrer que l'extension transcendante ci-dessus est de genre 0 ou 1.
Indication : cela découle de la formule de Riemann-Hurwitz.

J'ignore s'il est possible qu'elle soit de genre 0 (mais suis persuadé du contraire).

6.2 Résolution locale

Résolution "locale" (en 0) signifie ici : à l'aide des fonctions élémentaires introduites précédemmment, et de séries convergentes.

6.2.1 Systèmes à coefficients constants

Notre but est d'exhiber une solution fondamentale canonique du système $\sigma_q X = AX$ lorsque $A \in GL_n(\mathbf{C})$. La méthode, déjà entrevue au chapitre 3, fait appel à la *décomposition de Dunford multiplicative* de A (voir [7]) :

$$A = A_s A_u \ , \ A_s \text{ semi-simple } , A_u \text{ unipotent } \ , \ A_s A_u = A_u A_s.$$

Cas de la composante semi-simple

Exercice 6.2.1 Soit $D \in M_n(k)$ une matrice à coefficients dans le corps commutatif k et qui se diagonalise de deux manières :

$$P \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)\, P^{-1} = Q \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)\, Q^{-1}.$$

Soit ϕ est une application quelconque de $Sp(D) = \{c_1, \ldots, c_n\} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ dans une k-algèbre commutative R. Alors :

$$P \operatorname{diag}(\phi(c_1), \ldots, \phi(c_n))\, P^{-1} = Q \operatorname{diag}(\phi(d_1), \ldots, \phi(d_n))\, Q^{-1} \in M_n(R).$$

De plus, cette matrice, que l'on peut noter $\phi(D)$, est polynomiale en D (à coefficients dans R).

En prenant pour k le corps $\mathbf{C}$, pour R la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ engendrée par les e_c et pour ϕ l'application $c \mapsto e_{q,c}$, on définit $e_{q,A_s} = \phi(A_s)$: donc, si $A_s = P \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)\, P^{-1}$, on a :

$$e_{q,A_s} = P \operatorname{diag}(e_{q,c_1}, \ldots, e_{q,c_n})\, P^{-1}.$$

Proposition 6.2.2 *(i)* $e_{q,A_s} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ *et son lieu singulier*[3] *est :*

$$\mathcal{S}(e_{q,A_s}) = q^{\mathbf{Z}} \cup \bigcup_{c \in Sp(A_s)} c q^{\mathbf{Z}}.$$

(ii) $\sigma_q e_{q,A_s} = A_s e_{q,A_s} = e_{q,A_s} A_s$.
(iii) $e_{q,A_s} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)[A_s]$.

Preuve. - Tout découle de l'exercice (et de l'étude préalable des q-caractères). □

Cas de la composante unipotente

Exercice 6.2.3 Soit $U = I_n + N \in M_n(k)$ une matrice unipotente à coefficients dans le corps commutatif k supposé de caractéristique nulle (donc N est nilpotente). Soit R une k-algèbre commutative. Posons, pour tout $\lambda \in R$:

$$U^\lambda = \sum_{j \geq 0} \binom{\lambda}{j} N^j \ , \ \text{ où } \binom{\lambda}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda - i).$$

Alors $U^\lambda \in GL_n(R)$, est polynomiale en U (à coefficients dans R) et, pour $\lambda, \mu \in R$:

$$U^{\lambda + \mu} = U^\lambda U^\mu.$$

On peut prendre pour k le corps $\mathbf{C}$, pour R la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ engendrée par l_q et poser $e_{q,A_u} = A_u^{l_q}$. On a donc :

$$e_{q,A_u} = \sum_{j \geq 0} l_q^{(j)} (A_u - I_n)^j \ , \ \text{ où } l_q^{(j)} = \binom{l_q}{j}.$$

[3] Voir la définition 5.2.17.

Proposition 6.2.4 *(i) $e_{q,A_u} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ et son lieu singulier est :*

$$\mathcal{S}(e_{q,A_u}) = q^{\mathbf{Z}} \ , \ \text{ ou bien } \emptyset \text{ si } A_u = I_n.$$

(ii) $\sigma_q e_{q,A_u} = A_u e_{q,A_u} = e_{q,A_u} A_u$.
(iii) $e_{q,A_u} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)[A_u]$.

Preuve. - Tout découle de l'exercice (et de l'étude préalable du q-logarithme). □

Exercice 6.2.5 Vérifier que $\sigma_q l_q^{(j)} = l_q^{(j)} + l_q^{(j-1)}$ et en déduire une nouvelle justification de la définition de e_{q,A_u}.

Synthèse : la solution canonique

On pose maintenant :

$$e_{q,A} = e_{q,A_s} e_{q,A_u}.$$

Proposition 6.2.6 *(i) $e_{q,A} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ et son lieu singulier est :*

$$\mathcal{S}(e_{q,A}) = q^{\mathbf{Z}} \cup \bigcup_{c \in Sp(A)} cq^{\mathbf{Z}}.$$

(ii) $\sigma_q e_{q,A} = A e_{q,A} = e_{q,A} A$.
(iii) $e_{q,A} = e_{q,A_s} e_{q,A_u} = e_{q,A_u} e_{q,A_s}$ est la décomposition de Dunford multiplicative de $e_{q,A}$.

Preuve. - Tout découle de ce qui précède. □

Exercice 6.2.7 Vérifier que, pour $P, A \in GL_n(\mathbf{C})$:

$$e_{q,PAP^{-1}} = P \, e_{q,A} \, P^{-1}.$$

6.2.2 Systèmes fuchsiens non résonnants

Nous prendrons comme définition d'un système fuchsien celle de Birkhoff dans [6], sans chercher à la justifier ; voir cependant [13] et [48]. On peut au moins dire qu'il s'agit des systèmes pour lesquels la méthode de résolution de Fuchs-Frobenius (celle que nous avons utilisée au chapitre 3) marche.

Définition 6.2.8 (i) Le système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ est dit *fuchsien en* 0 si A est définie et inversible en 0 :

$$A(0) \in GL_n(\mathbf{C}).$$

(ii) Les *exposants* du système fuchsien de matrice A sont les valeurs propres de $A(0)$.
(iii) Le système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ supposé fuchsien en 0 est dit *non résonnant* si, deux exposants distincts (qui sont donc éléments de $\mathbf{C}^*$) ne sont jamais congrus modulo le sous-groupe $q^{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}^*$:

$$Sp(A(0)) \cap q^{\mathbf{N}^*} Sp(A(0)) = \emptyset.$$

Proposition 6.2.9 *Soit $A \in GL_n(K)$, où K est l'un des corps $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{C}(\{z\})$, $\mathcal{M}(\mathbf{C})$. On suppose le système $\sigma_q X = AX$ fuchsien non résonnant en 0. Il existe alors une unique transformation de Birkhoff formelle :*

$$F = I_n + zF_1 + \cdots$$

telle que $F[A(0)] = A$, et cette transformation converge.

Preuve. - La méthode est entièrement similaire à celle utilisée pour les systèmes différentiels au chapitre 3, proposition 3.3.7, dont nous reprenons les notations. On écrit $A = A_0 + zA_1 + \cdots$. On cherche F de la forme indiquée et telle que $(\sigma_q F)A_0 = AF$. On doit pour cela résoudre les relations de récurrence :

$$\begin{cases} F_0 = I_n \\ \forall k \geq 1 \ , \ q^k F_k A_0 = \sum_{i+j=k} A_i F_j \end{cases} .$$

La deuxième relation équivaut à $q^k F_k A_0 - A_0 F_k = \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j} F_j$. Il découle de l'hypothèse de non-résonnance que l'on a alors :

$$F_k = \Phi^{-1}_{q^k A_0, A_0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j} F_j \right).$$

La preuve de convergence fait appel au même type de majoration que dans *loc. cit.*. □

Corollaire 6.2.10 *On suppose que le corps K est $\mathbf{C}(z)$ ou $\mathcal{M}(\mathbf{C})$. La transformation de jauge F admet alors un unique prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ et $\mathcal{S}(F) = q^{\mathbf{N}^*} \mathcal{S}(A)$.*

Preuve. - La relation $(\sigma_q F)A_0 = AF$ entraine :

$$F(qz) = A(z)F(z)A_0^{-1},$$

qui permet d'étendre de proche en proche le disque de définition de F (en multipliant chaque fois son rayon par $|q| > 1$) et montre que le point $z \in \mathbf{C}^*$ est singulier pour F si et seulement si z/q l'est pour A ou F :

$$\mathcal{S}(F) \cap \overset{\circ}{D}(0, |q|^{k+1} r) = q \left((\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(F)) \cap \overset{\circ}{D}(0, |q|^k r) \right).$$

Comme il existe $r > 0$ tel que $(\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(F)) \cap \overset{\circ}{D}(0, |q|^k r) = \emptyset$, la conclusion s'ensuit. □

6.2.3 Systèmes singuliers réguliers

On se restreint maintenant aux systèmes à coefficients rationnels : $K = \mathbf{C}(z)$ et $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$.

Proposition 6.2.11 *On peut éliminer les résonnances d'un système fuchsien de la même manière que dans la proposition 3.3.3 du chapitre 3.*

Preuve. - Nous n'expliciterons que les (maigres) différences avec la preuve et l'algorithme de *loc. cit.*. Tout d'abord, un paquets d'exposants résonnants d'amplitude m s'écrit ici : $\{\lambda q^{k_0}, \ldots, \lambda q^{k_r}\}$ avec $0 = k_0 < \cdots < k_r = m$. Il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que

$$PA(0)P^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix},$$

où a_0 est un bloc triangulaire supérieur de taille $\mu \in \mathbf{N}^*$ et admet pour seule valeur propre λq^m et où d_0 est un bloc triangulaire supérieur de taille $\nu \in \mathbf{N}^*$ et admet pour valeurs propres toutes les autres valeurs propres de $A(0)$. Ainsi $B = P[A] = (\sigma_q P)AP^{-1} = PAP^{-1}$ s'écrit comme matrice de blocs :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

avec $a(0) = a_0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$ et $d(0) = d_0$. On prend encore comme matrice de shearing :

$$S = \begin{pmatrix} z^{-1} I_\mu & 0 \\ 0 & I_\nu \end{pmatrix},$$

et l'on trouve :

$$C = S[B] = \begin{pmatrix} q^{-1}a & q^{-1}z^{-1}b \\ zc & d \end{pmatrix},$$

de sorte que :

$$C(0) = \begin{pmatrix} q^{-1}a_0 & * \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $Sp(C(0)) = Sp(A(0)) \setminus \{\lambda q^m\}$, et la fin de la preuve est la même que dans *loc. cit.*. □

Définition 6.2.12 Un système aux q-différences linéaire rationnel est dit *singulier régulier* en 0 s'il est rationnellement équivalent à un système fuchsien en 0.

Théorème 6.2.13 *(i) Tout système $\sigma_q X = AX$ rationnel fuchsien non résonnant en 0 admet une unique solution fondamentale $Fe_{q,A(0)}$ où $F \in GL_n(\mathbf{C}[[z]])$ est* tangente à l'identité *: $F(0) = I_n$; la matrice F converge et se prolonge en $F \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$.*
(ii) Tout système $\sigma_q X = AX$ singulier régulier en 0 admet une solution fondamentale de la forme $Fe_{q,A^{(0)}}$ avec $F \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ et $A^{(0)} \in GL_n(\mathbf{C})$.
(iii) Dans les deux cas, $\mathcal{S}(F) \subset q^{\mathbf{N}^*}\mathcal{S}(A)$.

Preuve. - On n'a fait que regrouper les résultats obtenus. □

Le même algorithme qui intervient dans la proposition 6.2.11 permet en fait de ramener tous les exposants dans la couronne fondamentale :

$$\mathcal{K}(1, |q|) = \{z \in \mathbf{C} \ / \ 1 \leq |z| < |q|\}.$$

Définition 6.2.14 On appelle solution *normalisée* d'un système singulier régulier en 0 une solution fondamentale de la forme $\mathcal{X}^{(0)} = Fe_{q,A^{(0)}}$ avec $F \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ et $A^{(0)} \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$Sp(A^{(0)}) \subset \mathcal{K}(1, |q|).$$

Lemme 6.2.15 *Tout système fuchsien est rationnellement équivalent à un système dont tous les exposants sont dans $\mathcal{K}(1, |q|)$.*

Preuve. - C'est immédiat avec l'algorithme de la proposition 6.2.11. □

Proposition 6.2.16 *Tout système singulier régulier en 0 admet une solution fondamentale normalisée. De plus, $Fe_{q,A^{(0)}}$ et $Ge_{q,B^{(0)}}$ sont solutions fondamentales normalisées d'un même système, si et seulement s'il existe une matrice $C \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $B^{(0)} = CA^{(0)}C^{-1}$ et $GC = F$.*

Preuve. - L'existence d'une solution normalisée est conséquence du lemme (et du théorème précédent). Si deux solutions normalisées sont liées par la relation indiquée, on a $Fe_{q,A^{(0)}} = Ge_{q,B^{(0)}}C$ car $e_{q,B^{(0)}} = e_{q,CA^{(0)}C^{-1}} = Ce_{q,A^{(0)}}C^{-1}$. Supposons réciproquement que $Fe_{q,A^{(0)}}$ et $Ge_{q,B^{(0)}}$ sont solutions fondamentales normalisées d'un même système et posons $C = G^{-1}F \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$. Si A est la matrice du système concerné, $F[A^{(0)}] = G[B^{(0)}] = A$, d'où $C[A^{(0)}] = B^{(0)}$. On développe C en série : $C = \sum z^k C_k$, et l'on voit que $q^k C_k A^{(0)} = B^{(0)} C_k$ pour tout k. Mais, grâce à la condition de normalisation, on a, pour $k \neq 0$, $Sp(q^k A^{(0)}) \cap Sp(B^{(0)}) = \emptyset$, d'où $C_k = 0$. On a donc $C \in GL_n(\mathbf{C})$ et le reste s'ensuit. □

Chapitre 7

Classification, confluence et monodromie

7.1 Classification

Heuristique : la méthode de Birkhoff

Comme on l'a vu dans la première partie de ce cours, le prolongement analytique est un outil puissant dans l'étude des fonctions spéciales solutions d'équations différentielles. On n'a pas pleinement développé ici le point de vue géométrique de Riemann, mais on a pu se convaincre de sa capacité à *remplacer les calculs par des idées* (Hilbert). Comme en théorie de Galois, *l'ambiguité* de la détermination des fonctions multiformes est un avantage plutôt qu'un inconvénient [1].

Dans cette seconde partie, on a constaté que les solutions d'équations aux q-différences admettent automatiquement un prolongement uniforme au plan complexe (à la sphère de Riemann). On pourrait donc penser que nous avons aggravé la situation en attribuant aux équations élémentaires des solutions uniformes au lieu des solutions multiformes pronées par Adams, Carmichael, Birkhoff .... En réalité, cela n'aurait pas vraiment changé grand chose. En effet, les solutions des anciens ne sont ramifiées qu'en 0 et ∞, leur groupe de monodromie est donc une représentation de $\pi_1(\mathbf{C}^*) = \mathbf{Z}$, donc très simple. Une telle représentation ne peut en aucune façon rendre compte de la complexité des relations entre les solutions de l'équation hypergéométrique basique, par exemple.

Dans [6], Birkhoff a proposé l'extension de la démarche de Riemann (que nous appelons maintenant *correspondance de Riemann-Hilbert*) au cas des équations aux q-différences, et aux différences. Le prolongement analytique le long des chemins, avec ses 'formules de connexion", y est remplacé par une notion originale de matrice de connexion. Ce chapitre contient une version remise au gout du jour des résultats de Birkhoff. Commençons par en donner une description qualitative rapide. Birkhoff part d'une équation globale sur la sphère de Riemann, de matrice $A(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{S})) = GL_n(\mathbf{C}(z))$, supposée singulière régulière en 0 et en ∞.

Exercice 7.1.1 On suppose que $\sigma_q X = AX$ et l'on pose $Y(w) = X(z)$, avec $w = 1/z$. De quelle équation Y est-elle solution ? Définir la notion de système singulier régulier et de système fuchsien en ∞.

Exercice 7.1.2 Démontrer qu'un système singulier régulier en 0 et en ∞ est rationnellement équivalent à un système fuchsien en 0 et en ∞.
Indication : voir la preuve dans [47], 2.1, p. 1040.

[1] Pour de passionnantes réflexions sur cette question, le lecteur est vivement encouragé à lire [40].

Selon les résultats de la section 6.2, on peut donc définir des solutions fondamentales matricielles $\mathcal{X}^{(0)}, \mathcal{X}^{(\infty)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$; nous les considérons intuitivement comme les solutions "au voisinage" de 0 et de ∞, bien qu'elles soient analytiquement de même nature : toutes deux méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ et toutes deux sauvages en 0 et en ∞.

Définition 7.1.3 La *matrice de connexion de Birkhoff* est :

$$P = \left(\mathcal{X}^{(\infty)}\right)^{-1} \mathcal{X}^{(0)}.$$

Naturellement, l'article "la" est abusif, sauf si A est fuchsienne non-résonnante en 0 et ∞ , puisque les solutions fondamentales $\mathcal{X}^{(0)}$ et $\mathcal{X}^{(\infty)}$ ne sont définies sans ambiguité que dans ce dernier cas. Il est clair que $P \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$, et l'on vérifie facilement que $\sigma_q P = P$, autrement dit, P est elliptique :

$$P \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)).$$

Notons qu'avec les définitions des anciens, la matrice P ne serait pas tout à fait elliptique. Du fait que $\mathcal{X}^{(0)}$ et $\mathcal{X}^{(\infty)}$ sont solutions d'une même équation aux q-différences, on aurait encore $\sigma_q P = P$; mais, du fait qu'elles ne sont pas uniformes, $P(ze^{2\imath\pi})$ serait lié à $P(z)$ par un *facteur d'automorphie non trivial*.

Exercice 7.1.4 Décrire ce facteur dans le cas où l'on n'a pas de composantes logarithmiques.

Ce détail mis à part, Birkhoff procède maintenant, comme nous l'avons fait dans 4.2.3, à un comptage des constantes. Du côté de l'équation, il semble y en avoir une infinité (coefficients de fractions rationnelles), mais en fait, on doit considérer la matrice A à équivalence rationnelle près. Du côté de la matrice de connexion, P est codée par n^2 fonctions elliptiques lesquelles sont (presque) déteminées par leurs diviseurs. Pour être complet, il faut également prendre en compte les *constantes locales* en 0 et ∞, qui sont, comme dans le cas des équations différentielles, des invariants linéaires des matrices $A(0)$ et $A(\infty)$. Au bout du compte, Birkhoff constate que le compte est bon : le nombre de paramètres indépendants présents dans les classes d'équivalence de systèmes fuchsiens est égal à celui nécessaire pour coder les invariants de connexion et locaux. Il pose alors le *problème inverse* : peut-on reconstituer A (au moins à équivalence près) à partir de la matrice P (ou des invariants qui codent celle-ci) et des invariants locaux ?

Il répond positivement dans ce qu'il appelle "le cas général", mais que nous appellerions plutôt de nos jours "le cas générique", celui où les valeurs $A(0)$ et $A(\infty)$ sont bien définies et semi-simples. Bien sûr, l'idée est que les constantes qui codent P forment un système complet d'invariants du système pour la classification rationnelle ; cependant, conformément au style de l'époque (pré-Bourbaki), on ne voit ni bijection ni même application clairement définie d'un ensemble dans un autre.

L'idée qui sous-tend encore plus profondément cette idée est que P tient lieu de représentation de monodromie : c'est un analogue des formules de connexion de la théorie des équations différentielles ; on espère donc en tirer une approche plus géométrique. Comme cependant P n'est pas à coefficients constants, il devrait y avoir quelques complications instructives ... Ce point de vue, prôné dans [39], est à l'origine de la renaissance de la théorie depuis les années 1990, au moins en ce qui concerne ses aspects "transcendants".

Dans ce chapitre, nous reprendrons la démarche de Birkhoff selon les standards modernes :

1. Pour tous les cas (pas seulement le cas générique),
2. avec une vraie bijection entre ensembles de classes d'équivalence,
3. et même fonctoriellement [2].

Il faut cependant dire nettement que *toutes les idées essentielles viennent de Birkhoff ([6])*.

[2]Cela a d'ailleurs déjà été fait par M. van der Put et M. Singer dans [37], mais ces auteurs évitent largement le point de vue "théorie des fonctions".

7.1.1 Trois catégories

Définition 7.1.5 La catégorie $\mathcal{E}$ des équations aux q-différences fuchsiennes sur **S** est ainsi définie :

1. Ses objets sont les matrices $A(z) \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ ($n \in \mathbf{N}^*$) qui sont régulières singulières en 0 et en ∞.
2. Les morphismes de l'objet $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ vers l'objet $B \in GL_p(\mathbf{C}(z))$ sont les matrices $F \in M_{p,n}(\mathbf{C}(z))$ telles que $(\sigma_q F)A = BF$.
3. Le morphisme identité de l'objet $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ est la matrice identité I_n. Le composé des morphismes $F : A \to B$ et $G : B \to C$ est le morphisme $GF : A \to C$ (produit matriciel).

Proposition 7.1.6 *La catégorie $\mathcal{E}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules aux q-différences $DiffMod(K,\sigma_q)$ (avec ici $K = \mathbf{C}(z)$).*

Preuve. - Soit A un objet de $\mathcal{E}$. Reprenant les notations de la section 5.3.1 : $\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma_q X$, nous lui associons un module aux q-différences $M_A = (\mathbf{C}(z)^n, \Phi_A)$. Soit B un autre objet de $\mathcal{E}$. Un morphisme de M_A dans M_B est en particulier un morphisme de $\mathbf{C}(z)^n$ dans $\mathbf{C}(z)^p$, donc une matrice $F \in M_{p,n}(\mathbf{C}(z))$. Pour que cette matrice F soit bien un morphisme dans $DiffMod(K,\sigma_q)$, il faut, et il suffit, que $F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F$. Un petit calcul convaincra le lecteur que ceci équivaut à $(\sigma_q F)A = BF$, qui est la condition pour que F soit un morphisme dans $\mathcal{E}$. Ainsi, en associant à l'objet A l'objet M_A et au morphisme F dans $\mathcal{E}$ le morphisme F dans $DiffMod(K,\sigma_q)$, on obtient un foncteur pleinement fidèle. Cela revient à dire que $\mathcal{E}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $DiffMod(K,\sigma_q)$. □

Définition 7.1.7 La catégorie $\mathcal{T}$ des "triplets de connection" de Birkhoff est ainsi définie :

1. Ses objets sont les triplets $(A_0,P,A_\infty) \in GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)) \times GL_n(\mathbf{C})$ ($n \in \mathbf{N}^*$), avec $Sp(A_0), Sp(A_\infty) \subset \mathcal{K}(1,|q|)$ (la couronne fondamentale $\{z \in \mathbf{C} \ / \ 1 \leq |z| < |q|\}$).
2. Les morphismes du triplet $(A_0,P,A_\infty) \in GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)) \times GL_n(\mathbf{C})$ vers le triplet $(B_0,Q,B_\infty) \in GL_p(\mathbf{C}) \times GL_p(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)) \times GL_p(\mathbf{C})$ sont les couples $(C_0,C_\infty) \in M_{p,n}(\mathbf{C}) \times M_{p,n}(\mathbf{C})$ tels que $C_0A_0 = B_0C_0$, $C_\infty A_\infty = B_\infty C_\infty$ et $QC_0 = C_\infty P$.
3. Le morphisme identité de l'objet $(A_0,P,A_\infty) \in GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)) \times GL_n(\mathbf{C})$ est le couple (I_n,I_n). Le composé des morphismes (C_0,C_∞) et (D_0,D_∞) est le morphisme $(D_0C_0,D_\infty C_\infty)$.

On pourrait relâcher la condition de "normalisation" $Sp(A_0), Sp(A_\infty) \subset \mathcal{K}(1,|q|)$, au prix d'une description un peu moins simple des morphismes. C'est effectivement ce que l'on fait pour la théorie de Galois, car les constructions tensorielles ne sont pas compatibles avec cette condition (la couronne fondamentale n'étant pas un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$).

Notre but est de prouver l'équivalence des catégories $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$: c'est la version fonctorielle promise du théorème de Birkhoff. A cause de la non canonicité de la construction des solutions d'un système fuchsien, il n'est toutefois pas très facile de définir directement un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{T}$ (ou l'inverse) : si l'on part d'un système fuchsien de matrice A quelconque, on ne sait pas en général lui associer un triplet (A_0,P,A_∞) bien défini, sauf dans le cas très particulier où les matrices $A(0)$ et $A(\infty)$ sont définies, régulières et non résonnantes. Réciproquement, on verra que le choix d'une matrice A parmi celles donnant un triplet (A_0,P,A_∞) n'est pas univoque.

Nous aurons donc l'usage d'une troisième catégorie $\mathcal{S}$, équivalente aux deux premières grâce à des foncteurs explicites de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{T}$. Le lecteur devra alors admettre que cela entraine bien l'équivalence désirée. La (petite) difficulté est qu'un foncteur entre des catégories n'est pas exactement une application entre des ensembles et qu'une équivalence de catégories n'est pas une bijection. Il y a moyen de définir une sorte de réciproque d'une équivalence, mais ce n'est pas très simple, voir par exemple [29], chap. IV, §4.

L'idée sous-jacente à la définition de $\mathcal{S}$ est que l'objet le plus complet, qui permet de reconstituer tous les autres (matrice du système, matrice de connexion ...) est la donnée des deux solutions avec leurs décompositions $\mathcal{X}_0 = F_0\, e_{q,A_0}$ et $\mathcal{X}_\infty = F_\infty\, e_{q,A_\infty}$. Bien sûr, il faut imposer une condition qui exprime que $\mathcal{X}^{(0)}$ et $\mathcal{X}^{(\infty)}$ sont bien solutions d'un même système aux q-différences ; c'est la condition $F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$ de la définition qui suivra.

Exercice 7.1.8 Si $\mathcal{X}_0 = F_0\, e_{q,A_0}$ et $\mathcal{X}_\infty = F_\infty\, e_{q,A_\infty}$, vérifier que l'égalité $F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$ est équivalente à $(\sigma_q \mathcal{X}_0)\, \mathcal{X}_0^{-1} = (\sigma_q \mathcal{X}_\infty)\, \mathcal{X}_\infty^{-1}$. (En fait, $(\sigma_q \mathcal{X}_0)\, \mathcal{X}_0^{-1} = F_0[A_0]$ et $(\sigma_q \mathcal{X}_\infty)\, \mathcal{X}_\infty^{-1} = F_\infty[A_\infty]$.)

Définition 7.1.9 La catégorie $\mathcal{S}$ des "(quadruplets de) solutions" est ainsi définie :

1. Ses objets sont les quadruplets $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C})) \times GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}_\infty)) \times GL_n(\mathbf{C})$, avec $Sp(A_0), Sp(A_\infty) \subset \mathcal{K}(1, |q|)$ et tels que $F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$. Rappelons que $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{S} \setminus \{0\}$.
2. Les morphismes du quadruplet $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C})) \times GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}_\infty)) \times GL_n(\mathbf{C})$ vers le quadruplet $(G_0, B_0, G_\infty, B_\infty) \in GL_p(\mathcal{M}(\mathbf{C})) \times GL_p(\mathbf{C}) \times GL_p(\mathcal{M}(\mathbf{C}_\infty)) \times GL_p(\mathbf{C})$ sont les triplets $(C_0, F, C_\infty) \in M_{p,n}(\mathbf{C}) \times M_{p,n}(\mathbf{C}(z)) \times M_{p,n}(\mathbf{C})$ tels que $C_0 A_0 = B_0 C_0$, $G_0 C_0 = F F_0$, $C_\infty A_\infty = B_\infty C_\infty$ et $G_\infty C_\infty = F F_\infty$.
3. Les morphismes identités et les composés de morphismes sont alors définis de manière naturelle.

Exercice 7.1.10 Compléter le dernier point de cette définition.

Exercice 7.1.11 Vérifier que, selon la définition d'un morphisme dans $\mathcal{S}$, on a automatiquement $(\sigma_q F) A = BF$, où l'on a posé $A = F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$ et $B = G_0[B_0] = G_\infty[B_\infty]$.

Exercice 7.1.12 Dans les trois définitions ci-dessus, on est supposé vérifier que les identités et les composés de morphismes sont bien des morphismes. Le lecteur est encouragé à le faire.

7.1.2 Deux foncteurs

Premier foncteur

Lemme 7.1.13 *Soit $M \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$. Alors on peut écrire $M = CR$ avec $C \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ et $R \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$, la matrice R étant de plus* régulière en 0, *c'est-à-dire telle que $R(0) \in GL_n(\mathbf{C})$.*

Preuve. - La preuve est un algorithme de type "pivot de Gauss", d'ailleurs valable sur tout anneau de valuation discrète. On va multiplier M à gauche par des matrices rationnelles inversibles jusqu'à obtenir une matrice régulière en 0. On commence par multiplier M par z^k pour la rendre holomorphe en 0 : on peut donc supposer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}\{z\})$, $\det M \in \mathbf{C}\{z\} \setminus \{0\}$ et $\det(M(0)) = (\det M)(0) = 0$. Les opérations suivantes visent à faire diminuer $v_0(\det M)$, ordre d'annulation en 0 du déterminant. Lorsque $v_0(\det M) = 0$, on a une matrice régulière en 0.

Tant que $v_0(\det M) > 0$, $M(0)$ est non inversible, et il existe $\beta \in \mathbf{C}^n$ non nul tel que $\beta M(0) = 0$. Soit k un indice tel que $\beta_k \neq 0$ et soit $L_{k,\beta}$ la matrice égale à I_n sauf en ce qui concerne sa k^{e}ligne, que l'on a remplacée par β :

$$L_{k,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On multiplie M à gauche par $L_{k,\beta}$, ce qui ne change pas $v_0(\det M)$. On peut donc dorénavant supposer que la k^{e}ligne de M s'annule en 0, donc est à coefficients dans $z\mathbf{C}\{z\}$. On multiplie à gauche M par la matrice égale à I_n sauf en ce qui concerne son k^{e}coefficient diagonal, que l'on a remplacé par z^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui diminue $v_0(\det M)$ de 1 sans changer les autres conditions. □

Proposition 7.1.14 *Soit $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ un objet de $\mathcal{S}$. Soit $A = F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$ (*cf *la définition de $\mathcal{S}$). Alors $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ et A est singulière régulière en* 0 *et en* ∞.

Preuve. - La matrice A est évidemment inversible. Elle est méromorphe sur $\mathbf{C}$ (car égale à $F_0[A_0]$) et sur $\mathbf{C}_\infty$ (car égale à $F_\infty[A_\infty]$), donc méromorphe sur $\mathbf{S}$, donc rationelle : $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$. Pour prouver qu'elle est singulière régulière en 0, on applique le lemme à $F_0 = C_0 R_0$: on voit que $R_0[A_0]$ est une matrice régulière en 0, donc fuchsienne. Ainsi, $A = C_0\,[R_0[A_0]]$ est singulière régulière en 0. On procède de même en ∞ avec la variable $w = 1/z$. □

Définition 7.1.15 Le foncteur SE de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ est défini comme suit :

1. A tout objet $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ de $\mathcal{S}$, il associe $A = F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$.
2. A tout morphisme (C_0, F, C_∞) dans $\mathcal{S}$, il associe F (c'est bien un morphisme dans $\mathcal{E}$ d'après l'exercice 7.1.11).

Exercice 7.1.16 Vérifier que SE est bien un foncteur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$.

Deuxième foncteur

Lemme 7.1.17 *Soit $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ un objet de $\mathcal{S}$ et soient $\mathcal{X}_0 = F_0\, e_{q,A_0}$ et $\mathcal{X}_\infty = F_\infty\, e_{q,A_\infty}$. Alors $(\mathcal{X}_\infty)^{-1}\mathcal{X}_0 \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q))$.*

Preuve. - Il est évident que $(\mathcal{X}_\infty)^{-1}\mathcal{X}_0 \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$, il suffit donc de prouver sa σ_q-invariance. Utilisant les égalités $\sigma_q e_{q,A_0} = A_0\, e_{q,A_0}$ et $(\sigma_q F_0) A_0 = A F_0$, on calcule :

$$\sigma_q \mathcal{X}_0 = (\sigma_q F_0) A_0\, e_{q,A_0} = A F_0\, e_{q,A_0} = A\mathcal{X}_0.$$

On montre de même que $\sigma_q \mathcal{X}_\infty = A\mathcal{X}_\infty$, d'0ù :

$$\sigma_q\left((\mathcal{X}_\infty)^{-1}\mathcal{X}_0\right) = (\sigma_q \mathcal{X}_\infty)^{-1}(\sigma_q \mathcal{X}_0) = (A\mathcal{X}_\infty)^{-1} A\mathcal{X}_0 = (\mathcal{X}_\infty)^{-1}\mathcal{X}_0.$$

□

Définition 7.1.18 Le foncteur ST de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{T}$ est défini comme suit :

1. A tout objet $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ de $\mathcal{S}$, il associe (A_0, P, A_∞), où l'on a posé $P = (\mathcal{X}_\infty)^{-1}\mathcal{X}_0$, avec $\mathcal{X}_0 = F_0\, e_{q,A_0}$ et $\mathcal{X}_\infty = F_\infty\, e_{q,A_\infty}$.
2. A tout morphisme (C_0, F, C_∞) dans $\mathcal{S}$, il associe (C_0, C_∞).

Exercice 7.1.19 Vérifier que ST est bien un foncteur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{T}$. (Il faut démontrer les commutation de diagrammes qui font partie de la définition de $\mathcal{T}$.)

7.1.3 Equivalences de catégories

Théorème 7.1.20 *Le foncteur SE est une équivalence de catégories.*

Preuve. - Il est essentiellement surjectif d'après les résultats de la section 6.2. Soient $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ et $(G_0, B_0, G_\infty, B_\infty)$ deux objets de $\mathcal{S}$ et soient A et B leurs images par SE (donc, des objets de $\mathcal{E}$). Soit F un morphisme de A dans B dans $\mathcal{E}$. Nous voulons lui trouver un unique antécédent par SE dans $\mathcal{S}$. On pose $H = G_0^{-1} F F_0$. Comme composé des morphismes :

$$A_0 \xrightarrow{F_0} A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G_0^{-1}} B_0,$$

c'est un morphisme de A_0 dans B_0. Par construction, il est méromorphe sur $\mathbf{C}$. On le développe en série de Laurent : $H = \sum H_p z^p$. De la relation $(\sigma_q H) A_0 = B_0 H$, on tire, pour tout p : $q^p H_p A_0 = B_0 H_p$. Pour $p \neq 0$, les spectres de A_0 et B_0 sont disjoints (normalisation) et, d'après le lemme habituel, $H_p = 0$. On a donc prouvé que $G_0^{-1} F F_0 \in GL_n(\mathbf{C})$ et on le note C_0. On prouve de même que $C_\infty = G_\infty^{-1} F F_\infty \in GL_n(\mathbf{C})$. Le triplet (C_0, F, C_∞) est l'unique antécédent de F. $\square$

Exercice 7.1.21 Vérifier les nécessaires commutations de diagrammes de la définition des morphismes dans $\mathcal{S}$.

Théorème 7.1.22 *Le foncteur ST est une équivalence de catégories.*

Preuve. -
<u>Essentielle surjectivité. -</u> Soit (A_0, P, A_∞) un objet de $\mathcal{T}$. Notons $M = e_{q,A_\infty} P \left(e_{q,A_0}\right)^{-1} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$. *<u>D'après le lemme de factorisation de Birkhoff</u>,* (qui est le seul point profond de toute cette histoire), on a une factorisation : $M = (F_\infty)^{-1} F_0$, avec $F_0 \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ et $F_\infty \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}_\infty))$. Notons $\mathcal{X}_0 = F_0 \, e_{q,A_0}$ et $\mathcal{X}_\infty = F_\infty \, e_{q,A_\infty}$. On a donc :

$$(\mathcal{X}_\infty)^{-1} \mathcal{X}_0 = \left(e_{q,A_\infty}\right)^{-1} (F_\infty)^{-1} F_0 \, e_{q,A_0} = \left(e_{q,A_\infty}\right)^{-1} M \, e_{q,A_0} = P \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)).$$

De la σ_q-invariance de $(\mathcal{X}_\infty)^{-1} \mathcal{X}_0$, on déduit l'égalité : $(\sigma_q \mathcal{X}_\infty)(\mathcal{X}_\infty)^{-1} = (\sigma_q \mathcal{X}_0)(\mathcal{X}_0)^{-1}$, puis, de cette dernière : $F_0[A_0] = F_\infty[A_\infty]$. L'objet $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ de $\mathcal{S}$ est donc un antécédent de (A_0, P, A_∞) par ST dans $\mathcal{S}$.

<u>Pleine fidélité. -</u> Soient $(F_0, A_0, F_\infty, A_\infty)$ et $(G_0, B_0, G_\infty, B_\infty)$ deux objets de $\mathcal{S}$ et soient (A_0, P, A_∞) et (B_0, Q, B_∞) leurs images par ST (donc, des objets de $\mathcal{T}$). Soit (C_0, C_∞) un morphisme de (A_0, P, A_∞) dans (B_0, Q, B_∞) dans $\mathcal{T}$. Nous voulons lui trouver un unique antécédent par ST dans $\mathcal{S}$. On vérifie d'abord que $G_0 C_0 F_0^{-1} = G_\infty C_\infty F_\infty^{-1}$; c'est donc un élément de $GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C})) \cap GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}_\infty)) = GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{S})) = GL_n(\mathbf{C}(z))$. Notons le F. Le triplet (C_0, F, C_∞) est l'unique antécédent de (C_0, C_∞). $\square$

Exercice 7.1.23 Compléter les (petits) trous de cette démonstration.

Corollaire 7.1.24 *On a une bijection entre :*
- *L'ensemble des classes d'équivalence rationnelle de systèmes fuchsiens en* 0 *et en* ∞*, d'une part, et*
- *l'ensemble des classes d'équivalence de triplets* $(A_0, P, A_\infty) \in GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)) \times GL_n(\mathbf{C})$*, avec* $Sp(A_0), Sp(A_\infty) \subset \mathcal{K}(1, |q|)$ *d'autre part, la relation d'équivalence étant ainsi définie :*

$$(A_0, P, A_\infty) \sim (B_0, Q, B_\infty) \iff \exists (C_0, C_\infty) \in GL_n(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathbf{C}) \ : \begin{cases} B_0 = C_0 A_0 C_0^{-1}, \\ B_\infty = C_\infty A_\infty C_\infty^{-1}, \\ Q = C_\infty P C_0^{-1}. \end{cases}$$

Preuve. - Le premier ensemble est l'ensemble des classes d'isomorphie dans la catégorie $\mathcal{E}$, le deuxième ensemble est l'ensemble des classes d'isomorphie dans la catégorie $\mathcal{T}$. $\square$

Exercice 7.1.25 (i) Démontrer que la relation d'isomorphie entre objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence.
(ii) Soit F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Vérifier qu'il induit une application de l'ensemble des classes d'isomorphie d' objets de $\mathcal{C}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphie d' objets de $\mathcal{D}$.
(iii) Démontrer que, si F est une équivalence de catégories, l'application ci-dessus est une bijection.

Remarque 7.1.26 ATTENTION ! Les classes d'isomorphie d' objets d'une catégorie ne forment pas nécessairement un ensemble : par exemple, cela ne marche pas avec la catégorie des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Mais cela marche avec *toutes* les catégories rencontrées dans ce cours : par exemple celle des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

7.2 Confluence et monodromie

Cette section n'a fait l'objet ni d'un cours en bonne et due forme ni d'une rédaction. L'exposé oral a consisté en une description sans preuve du phénomène de la *confluence* lorsque $q \to 1$ d'un système aux q-différences fuchsien non résonnant, avec l'interprétation de la limite de la matrice de connexion de Birkhoff. Il s'agit de la deuxième partie du contenu de [47]. En guise de document écrit, les auditeurs ont reçu la version préliminaire de *loc. cit.* (rédigée de manière moins canonique, mais comportant plus de détails) parue sous porme de prépublication [46].

7.3 Théorie de Galois

Où est donc la vue géométrique promise ? Quel groupe remplacera le groupe de monodromie de la théorie des équations différentielles ? Autrement dit, la catégorie $\mathcal{E}$ est-elle équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe, et peut-on voir dans celui-ci une sorte de groupe fondamental d'un espace dont la géométrie serait celle qui nous intéresse ?

Le sujet n'a même pas été effleuré dans le cours. Une réponse très algébrique est donnée dans le livre de référence de M. van der Put et M. Singer, [37]. Malheureusement, les méthodes purement algébriques ne permettent de construire "que" l'analogue du *groupe de Galois différentiel* (c'est déjà quelque chose). On a tenté de transmettre ici l'idée que la théorie des fonctions était un outil irremplaçable. Cette approche de la théorie de Galois des équations aux q-différences est exposée dans [13], [39] et [49].

Troisième partie

Suppléments

Chapitre 8

Exposés par les étudiants

8.1 Preuve du lemme de Birkhoff

La rédaction est due à Jean Lécureux.

Théorème 8.1.1 *Soient $C_1,\ldots,C_r$ r courbes fermées simples analytiques dans* $\mathbf{S}$*. Soient $A_1(z),\ldots,A_r(z)$ des matrices de fonctions définies sur $C_1,\ldots,C_r$ respectivement, qui sont $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques sauf en un nombre fini de points, et de déterminant non nul. On suppose, de plus, qu'à chaque point d'intersection de C_j et C_k, toutes les dérivées de $A_jA_k - A_kA_j$ sont nulles.Alors il existe une matrice de fonctions $\Phi(z)$ ayant les propriétés suivantes :*

- *Φ est analytique, sauf sur $C_1,\ldots,C_r$ et en un pôle éventuel $\alpha \in \mathbf{S}$ arbitraire.*
- *Φ est $\mathcal{C}^\infty$ le long de C_k, de chaque côté de C_k, et analytique, sauf aux points d'intersection des courbes et aux points où A_k n'est pas analytique.*
- *Si l'on choisit un côté $+$ et un côté $-$ de C_k, alors :*

$$\forall z_k \in C_k\ ,\ \lim_{z\to z_k^+}\Phi(z) = \left(\lim_{z\to z_k^-}\Phi(z)\right)A_k(z_k),$$

  la notation $z \to z_k^+$ (resp. $z \to z_k^-$) signifiant que z tend vers z_k du côté $+$ (resp. du côté $-$) de C_k.
- **Certainement une condition d'inversibilité ...**

Preuve. - La démonstration se fait par récurrence sur le nombre r de courbes. Commençons donc par le cas où il n'y a qu'une seule courbe C. On peut supposer que C est contenue dans le plan $\mathbf{C}$, l'infini ne jouant pas de rôle particulier. Précisons tout d'abord les hypothèses. Que C soit une courbe "analytique" signifie qu'elle est donnée par une fonction analytique d'un paramètre, que l'on peut prendre sur le cercle unité. Mais, puisqu'elle est analytique, on peut élargir le domaine de définition de cette fonction à une couronne autour du cercle unité. On définit ainsi une fonction τ, holomorphe et définissant une bijection d'une couronne autour du cecle unité vers un espace compris entre deux courbes C_1 et C_2 respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de C (voir figure).

Avant de montrer des égalités sur des matrices, nous aurons besoin de voir ce qui se passe avec de simples fonctions. Supposons donc que l'on ait une fonction $a(z)$ définie sur C, qui soit $\mathcal{C}^\infty$ et analytique sauf en un nombre fini de points. Ces hypothèses impliquent que a se prolonge analytiquement en une fonction définie entre des courbes D_1 et D_2 à l'intérieur et à l'extérieur de C, tangentes à C aux points où a n'est pas analytique. On peut également prolonger a continument entre C_1 et C_2 de façon à ce que l'on ait des inégalités de la forme $|a(z)| \le K$ et $\left|\frac{a(z)-a(z')}{z-z'}\right| \le K$.

Figure

FIG. 8.1 – La legende.

Dans toute la suite, on utilisera la convention suivante : l'exposant $^+$ servira à désigner des fonctions définies et analytiques à l'intérieur de C, ayant une limite continue sur C. De la même façon, l'exposant $^-$ servira à désigner des fonctions définies et analytiques à l'extérieur de C, ayant une limite continue sur C. Pour une telle fonction g^+ quelconque, considérons l'intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2\imath\pi} \int_C \frac{\tau^p(t)g^+(t)a(t)}{t-z}\, dt.$$

Si z est entre C et C_2, d'après la formule des résidus, on a $\frac{1}{2\imath\pi}\int_{C_1} \frac{\tau^p(t)g^+(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\imath\pi}\int_{C} \frac{\tau^p(t)g^+(t)}{t-z}\, dt$. Par conséquent, on a :

$$f^-(z) = \frac{1}{2\imath\pi} \int_C \tau^p(t)g^+(t)\frac{a(t)-a(z)}{t-z}\, dt + \frac{a(z)}{2\imath\pi} \int_C \frac{\tau^p(t)g^+(t)}{t-z}\, dt. \tag{8.1.1.1}$$

L'inégalité $\left|\frac{a(z)-a(z')}{z-z'}\right| \leq K$ montre que la première intégrale a une limite continue quand z tend vers C. Comme il en est évidemment de même de la deuxième, f a une limite continue quand z s'approche de la courbe depuis l'intérieur ; ceci justifie l'utilisation de l'exposant $^-$. On montre de la même façon que, pour z entre C et C_1, on a :

$$f^+(z) = \tau^p(z)g^+(z)a(z) + \frac{1}{2\imath\pi} \int_C \tau^p(t)g^+(t)\frac{a(t)-a(z)}{t-z}\, dt + \frac{a(z)}{2\imath\pi} \int_C \frac{\tau^p(t)g^+(t)}{t-z}\, dt,$$

puisqu'il y a cette fois-ci un résidu. On voit donc que l'on a sur C l'équation $f^+(z) - f^-(z) = \tau^p(z)g^+(z)a(z)$.

On aura également besoin par la suite de considérer le maximum de la fonction $|f^-|$. Comme celle-ci est nulle à l'infini, ce maximum est atteint sur C. Soit L le maximum de $|g^+|$, il est également atteint sur C. Si l'on intègre sur D_1 au lieu de C dans l'égalité 8.1.1.1, on obtient, en utilisant les inégalités portant sur a, que :

$$\left|f^-(z)\right| \leq \frac{KL}{2\pi}\left(\int_{D_1} |\tau^p(t)|\, dt + \int_{C_1} \left|\frac{\tau^p(t)}{t-z}\right|\, dt\right).$$

Or, à l'intérieur de C, $|\tau| \leq 1$, donc τ^p tend uniformément vers 0, tandis que $|t-z|$ reste fini quand t reste sur C_1. Les points où D_1 est tangent à C, étant en nombre fini, ne posent pas problème pour affirmer que $\max|f^-| \leq \varepsilon \max|g^+|$ le long de C, pour p suffisamment grand.

De la même façon, on peut considérer $f(z) = \frac{1}{2\imath\pi}\int_C \frac{\tau^{-p}(t)g^-(t)a(t)}{t-z}\, dt$. On a alors comme précédemment, sur C, $f^+(z) - f^-(z) = \tau^{-p}(z)g^-(z)a(z)$, et également, pour p assez grand, $\max|f^+| \leq \max|g^-|$.

Il est temps maintenant de passer à des équations matricielles. Considérons le système défini sur C :

$$\begin{cases} F^+ - F^- = \tau^p(z)G^+(z)A(z) \\ G^- - G^+ = \tau^{-p}(z)F^-(z)A^{-1}(z) - I \end{cases},$$

A étant une matrice vérifiant les mêmes hypothèses que les A_i de l'énoncé du théorème. Pour le résoudre, on va procéder par approximations successives. Posons donc $F_0^\pm = G_0^- = 0$ et $G_0^+ = I$ et résolvons, pour k entier, les systèmes :

$$\begin{cases} F_{k+1}^+ - F_{k+1}^- = \tau^p(z)G_k^+(z)A(z) \\ G_{k+1}^- - G_{k+1}^+ = \tau^{-p}(z)F_k^-(z)A^{-1}(z) \end{cases}.$$

Posons $P_0^{\pm} = Q_0^{+} = 0$ et $Q_0^{-} = I$, puis $P_m^{\pm} = F_m^{\pm} - F_{m-1}^{\pm}$ et $Q_m^{\pm} = G_m^{\pm} - G_{m-1}^{\pm}$. Le système ci-dessus se réécrit alors :

$$\begin{cases} P_{m+1}^{+} - P_{m+1}^{-} = \tau^{p}(z) Q_m^{+}(z) A(z) \\ Q_{k+1}^{-} - Q_{m+1}^{+} = \tau^{-p}(z) P_m^{-}(z) A^{-1}(z) - I \end{cases}.$$

Mais ces équations sont, coefficient par coefficient, de la forme :

$$p_{i,j,m}^{+} - p_{i,j,m}^{-} = \tau^{p}(z) \sum_{k=1}^{n} q_{i,k,m-1}^{+} a_{k,j},$$

où $p_{i,j,m}^{+}$ désigne le coefficient de la i^{e}ligne el la j^{e}colonne de P_m^{+}, et ainsi de suite. Le travail fait auparavant nous permet de trouver des solutions à ces équations.

De plus, si $L_m = \max(\left|p_{i,j,m}^{-}\right|, \left|q_{i,j,m}^{+}\right|$, le maximum étant pris sur tous les i et j, les égalités déjà obtenues sur les maxima montrent que l'on a $L_m \leq n\varepsilon L_{m-1}$ pour p assez grand.

Par conséquent, pour p assez grand, les séries $F^{-}(z) = \sum_{m\geq 0} P_m^{-}(z)$ et $G^{+}(z) = \sum_{m\geq 0} Q_m^{+}(z)$ sont convergentes. Posons donc $F_M^{-}(z) = \sum_{m=0}^{M} P_m^{-}(z)$ et $G_M^{+}(z) = \sum_{m=0}^{M} Q_m^{+}(z)$. On peut poser, pour z sur C, $F_M^{+}(z) = \tau^{p} G_{M-1}^{+}(z) A(z) + F_M^{-}(z)$, et définir ensuite, pour z à l'intérieur de C, $F_M^{+}(z) = \int_C \frac{F_M^{+}(t)}{2\imath\pi(t-z)}\, dt$. On peut alors en prendre la limite quand M tend vers l'infini et définir ainsi $F^{+}(z)$ et, de la même façon, $G^{-}(z)$. Il n'est pas difficile de se convaincre que ces fonctions sont bien solutions du système de départ.

Mais en additionnant la première ligne de ce système avec la seconde multipliée à droite par $-\tau^{p} A$, on voit que l'on a $F^{+} = \tau^{p}(I + G^{-})A$. Remarquons tout d'abord que, puisque G^{-} est nulle à l'infini, le déterminant de $I + G^{-}$ et de F^{+} n'est pas identiquement nul.

Soit maintenant c à l'intérieur de C. Posons, pour z à l'intérieur de C, $\phi(z) = \log\tau(z) - \log(z-c)$. C'est bien une fonction monovaluée. On peut trouver θ^{+} et θ^{-} telles que l'on ait $\theta^{+} - \theta^{-} = \log\tau(z) - \log(z-c)$ (avec $p = 0$, $g = 1$, $a = \phi$).

Alors, en posant $\Phi = e^{-p\theta^{+}} F^{+}$ et $\Psi = (z-c) e^{-p\theta^{-}} (I + G^{-})$, on vérifie que l'on a bien $\Phi = \Psi A$ sur C. De plus, ce sont des fonctions de déterminant non identiquement nul. Remarquons également que Ψ a un pôle d'ordre p à l'infini. (L'infini joue le rôle du point α du théorème ; pour arriver à un α arbitraire, il suffit de faire le changement de coordonnées adéquat.)

Il reste à montrer que l'on peut faire en sorte que Φ et Ψ vérifient les propriétés annoncées par le théorème, c'est-à-dire que Φ et Ψ sont $\mathcal{C}^{\infty}$ le long de C de chaque côté de C, analytiques aux points où A et analytique et, de plus, de déterminant partout non nul.

Tout d'abord, en chaque point de C où A est analytique, on peut prolonger Φ et Ψ analytiquement (Φ se prolonge en ΨA, par exemple). Par conséquent, Φ et Ψ y sont également analytiques. Montrons maintenant qu'elles sont $\mathcal{C}^{\infty}$; pour cela, écrivons :

$$A(t) = A(y) + (t-y)\frac{d}{dy}A(y) + \cdots + \frac{(t-y)^k}{k!}\frac{d^k}{dy^k}A(y) + (t-y)^k B(t,y).$$

D'autre part, on a, pour z à l'intérieur de C :

$$\frac{d^{k-1}\Phi(z)}{dz^{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2\imath\pi} \int_C \frac{\Psi(t)A(t)}{(t-z)^k}\, dt.$$

Il nous faut prouver que, pour tout k, cette expression a une limite quand z tend vers un point de C. Remplaçant A par l'expression ci-dessus, on obtient tout d'abord, à constante près, des termes de la forme $\frac{d^l A(y)}{dy^l}\int_C \frac{(t-y)^l\Psi(t)}{(t-z)^k}\,dt$ pour $k<l$. Cette intégrale pouvant être calculée sur C_2 au lieu de C, lorsque z s'approche de C, elle tend bien vers une limite continue en z et en y.

Il reste également un terme de la forme : $\int_C \left(\frac{t-y}{t-z}\right)^k \Psi(t)B(t,y)\,dt$. Supposons que z tende vers un point z_0 de C. Faisons maintenant varier y : prenons le comme étant le pied de la normale issue de z sur C. On voit qu'alors $\left(\frac{t-y}{t-z}\right)^k$ tend vers 1 uniformément, sauf pour un t dans un voisinage arbitrairement petit de z_0, pour lequel elle reste finie. Par conséquent, $\int_C \left(\frac{t-y}{t-z}\right)^k \Psi(t)B(t,y)\,dt$ a une limite finie. On montre bien ainsi que Φ est $\mathcal{C}^\infty$ le long de C. Le même raisonnement s'applique pour Ψ.

Il nous reste maintenant à montrer que l'on peut choisir Φ et Ψ tels que leur déterminant ne s'annule jamais.

Supposons donc que $\det\Phi(c)=0$ pour un sertain c. Il existe une matrice M de déterminant non nul telle que les coefficients de la première ligne de $M\Phi(c)$ s'annulent tous. On remarque qu'alors $\overline{\Phi}=\frac{M\Phi}{z-c}$ et $\overline{\Psi}=\frac{M\Psi}{z-c}$ fournissent également une solution à notre problème. On peut ainsi diminuer la multiplicité du zéro c de $\det\Phi$. On peut recommencer cette opération. Les seule points où l'on n'est pas sûr de s'arrêter sont les points où Φ n'est pas analytique, c'est-à-dire les points de C où A n'est pas analytique. Mais en fait, il ne peut y avoir de zéro de multiplicité infinie. En effet, considérons les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ solutions de $\tilde{\Phi}(z)=A^{-1}(z)\tilde{\Psi}(z)$. En comparant avec $\Phi=A\Psi$, il vient $\det\Phi\det\tilde{\Phi}=\det\Psi\det\tilde{\Psi}$. La fonction $\det\Phi\det\tilde{\Phi}$ est donc analytique à l'intérieur et à l'extérieur de C, donc sur $\mathbf{C}$ tout entier. Elle a également un pôle d'ordre p à l'infini : c'est donc un polynôme. Par conséquent, $\det\Phi$ a un zéro de multiplicité finie.

Ceci achève la démonstration dans le cas d'une seule courbe. Il reste maintenant à faire la récurrence. On se donne des courbes $C_1,\ldots,C_{k+1}$ et des matrices $A_1,\ldots,A_{k+1}$ vérifiant les hypothèses du théorème. On suppose que l'on a déjà trouvé Φ_k solution du problème pour les courbes $C_1,\ldots,C_k$. Cherchons Φ_{k+1} de la forme $\Phi_{k+1}=U\Phi_k$. Alors :

- U est analytique sauf sur $C_1,\ldots,C_k$, a un pôle en α et est de déterminant partout non nul.
- U admet une limite de chaque côté de C_i, qui est $\mathcal{C}^\infty$ et analytique, sauf à l'intersection des courbes et aux points où A_i n'est pas analytique.
- On a :
$$\forall i\le k\ ,\ \lim_{z\to z_i^+} U(z)=\lim_{z\to z_i^-} U(z)$$
et
$$\lim_{z\to z_{k+1}^+} U(z)\Phi_k(z)=\left(\lim_{z\to z_{k+1}^-} U(z)\Phi_k(z)\right)A_{k+1}(z_{k+1}).$$

Ces conditions impliquent d'une part que U est analytique sauf sur C_{k+1}, et que l'on a :
$$\lim_{z\to z_{k+1}^+} U(z)=\left(\lim_{z\to z_{k+1}^-} U(z)\right)\Phi_k(z_{k+1})A_{k+1}(z_{k+1})\Phi_k^{-1}(z_{k+1}).$$

Il nous suffit donc de vérifier que l'on a bien les hypothèses du théorème pour $C=C_{k+1}$ et $A=\Phi_kA_{k+1}\Phi_k^{-1}$. Mais A est bien analytique sauf en un nombre fini de points et de déterminant non nul. La seule difficulté réside en montrer que A est bien $\mathcal{C}^\infty$ aux points d'intersection des courbes. Supposons que l'on ait une intersection entre C_i et C_{k+1}. Quand on passe du côté $+$ au côté $-$ de C_i, Φ_k devient Φ_kA_i. Par conséquent, A devient $\Phi_kA_iA_{k+1}A_i^{-1}\Phi_k^{-1}$. Or, la condition sur les dérivées des A_i montre précisément que les dérivées de cette matrice sont les dérivées de A au point d'intersection, donc que les dérivées se raccordent bien. On peut donc appliquer le théorème déjà démontré pour une seule courbe pour trouver U, donc Φ_{k+1}, et ainsi achever la récurrence. □

8.2 Equations aux différences I

Ce chapitre sera rédigé après l'exposé de Landry Salle.

8.3 Equations aux différences II

Ce chapitre sera rédigé après l'exposé de Julien Roques.

8.4 Sur un article de Praagman

Ce chapitre sera rédigé après l'exposé d'Anne Granier.

8.5 Algorithmes algébriques

Ce chapitre sera rédigé après l'exposé d'Olivier Moioli.

Chapitre 9

Examen de fin d'année

Les temps attribués aux trois parties de l'examen étaient respectivement : 1 heure, 1 heure 15 et 1 heure 30 (avec ramassage des copies et pause d'un quart d'heure entre deux parties).

9.1 Première partie : trois exercices sur les équations différentielles

Les questions en italiques sont plus difficiles.

Exercice 1. -

On se propose d'étudier l'équation différentielle linéaire rationnelle d'ordre 1 :

(9.1.0.1) $$f'(z) = a(z)f(z) \quad \text{où } a(z) \in \mathbf{C}(z).$$

Afin de fixer les notations, on appellera $z_1, \ldots, z_m$ les pôles de $a(z)$ et l'on écrira :

$$a(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(z-z_j)^k} \quad \text{avec } P(z) \in \mathbf{C}[z]\ ,\ m \geq 1\ ,\ \mu_1, \ldots, \mu_m \geq 1\ ,\ a_{1,\mu_1}, \ldots, a_{m,\mu_m} \neq 0.$$

1) Décrire *a priori* (à l'aide des théorèmes généraux) et sans justification ce que l'on sait des solutions sur $\mathbf{C}$ (existence, monodromie ...). Pourquoi peut-on ici parler *du* groupe de monodromie sans précision ?

2) On fixe $z_0 \in \mathbf{C}$ point régulier de l'équation 9.1.0.1. Donner explicitement la solution fondamentale f_0 au voisinage de z_0 telle que $f_0(z_0) = 1$. On précisera un disque ouvert de définition.
Indication : on pourra écrire $a = b + c$ et obtenir en conséquence $f_0 = g_0 h_0$, où b admet une primitive et g_0 est uniforme, et où c et h_0 sont aussi simples que possible.

3) Décrire le groupe de monodromie de l'équation 9.1.0.1 relativement à la base f_0. En déduire que f_0 est uniforme si et seulement si les $a_{j,1}$, $j = 1, \ldots, m$ sont entiers.

4) Que dire des solutions de 9.1.0.1 sur la sphère de Riemann $\mathbf{S}$?

5) Montrer que f_0 est algébrique seulement si les $a_{j,1}$, $j = 1, \ldots, m$ sont rationnels. Formuler une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 2. -

Soit $A(z) \in M_n(\mathbf{C}(z))$ et soit $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \{$ pôles de $A\}$. Le théorème de Cauchy garantit l'existence d'une unique solution $\mathcal{X}(z)$ du système $X'(z) = A(z)X(z)$ développable en série entière au voisinage de z_0 sous la forme :

$$\mathcal{X}(z) = I_n + \mathcal{X}_1(z-z_0) + \mathcal{X}_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad \text{les } \mathcal{X}_i \in M_n(\mathbf{C}).$$

Donner un minorant du rayon de convergence de cette série.

Exercice 3 -

Lors de la preuve de la proposition 3.3.7 du cours, on a obtenu la situation suivante :

1. On a une série entière matricielle :

$$A(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \quad \text{les } A_i \in M_n(\mathbf{C}).$$

2. On a construit une suite de matrices $F_k \in M_n(\mathbf{C})$ telles que $F_0 = I_n$ et :

$$\forall k \geq 1 \text{ , } ||F_k|| \leq \frac{C}{k} \sum_{j=0}^{k-1} ||A_{k-j}||\, ||F_j||.$$

Ici, $C > 0$ désigne un réel fixé et l'on note $||-||$ une norme d'algèbre quelconque sur $M_n(\mathbf{C})$.

Démontrer que la série entière matricielle $\sum F_k z^k$ converge. Attention, l'indication donnée dans le cours n'est pas fiable ! ! !

9.2 Corrigé succinct de la première partie

Corrigé de l'exercice 1. -

1) Soit $\Sigma = \{z_1, \ldots, z_m\}$. Alors, pour tout ouvert connexe $V \subset \mathbf{C} \setminus \Sigma$, l'espace $Sol(V)$ des solutions de 9.1.0.1 sur V est de dimension ≤ 1. Si V est simplement connexe, $Sol(V)$ est de dimension 1. Le prolongement analytique le long d'un chemin γ qui relie un point de l'ouvert simplement connexe V_1 à un point de l'ouvert simplement connexe V_2 induit un isomorphisme $Sol(V_1) \to Sol(V_2)$ et cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ dans $\mathbf{C} \setminus \Sigma$.

En principe, "le" groupe de monodromie n'est déterminé qu'à conjugaison près dans $GL_n(\mathbf{C})$ (il dépend du choix d'un point base et d'une solution fondamentale). Ici, $n = 1$ et $GL_n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ est abélien : le groupe de monodromie est donc un sous-groupe parfaitement défini de $\mathbf{C}^*$.

2) Prenons $c = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{j,1}}{z-z_j}$ et $b = a - c$. On prend $g_0 = e^B$, où B est la primitive de b qui s'annule en z_0 :

$$B(z) = \int_{z_0}^{z} P(x)\, dx - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2}^{\mu_j} \left(\frac{a_{j,k}}{(k-1)(z-z_j)^{k-1}} - \frac{a_{j,k}}{(k-1)(z_0-z_j)^{k-1}} \right).$$

g_0 est définie sur $\mathbf{C} \setminus \Sigma$. On prend $h_0 = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{z-z_j}{z_0-z_j} \right)^{a_{j,1}}$, qui est définie sur $\overset{\circ}{D}(z_0, dist(z_0, \Sigma))$.

3) Le groupe de monodromie est le sous-groupe de $\mathbf{C}^*$ engendré par les $e^{2\imath\pi a_{j,1}}$, $j = 1,\ldots,m$. La fonction f_0 est uniforme si et seulement si ce groupe est trivial, c'est-à dire si les $a_{j,1}$ sont entiers.

4) $\infty \in \mathbf{S}$ est régulier $\Leftrightarrow w^{-2}a(w^{-1})$ est défini en $w = 0 \Leftrightarrow P = 0$ et $\sum_{j=1}^m a_{j,1} = 0$. Dans le cas contraire, le résidu en ∞ est $a_{\infty,1} = -\sum_{j=1}^m a_{j,1}$ et la monodromie locale est $e^{2\imath\pi a_{\infty,1}}$.

5) Si f_0 est algébrique, elle n'a qu'un nombre fini de conjugués et le groupe de monodromie est fini, donc les $a_{j,1}$ rationnels. Pour une CNS, il faut de plus “tuer” les facteurs exponentiels, c'est-à-dire demander que $b = 0$ (notation de la question 2).

Corrigé de l'exercice 2. -

On sait qu'une série entière a un rayon de convergence $\geq R$ si et seulement si la fonction holomorphe qu'elle définit admet un prolongement analytique à $\overset{\circ}{D}(0,R)$. D'après le théorème de Cauchy, le minorant demandé est donc la distance de z_0 au plus proche pôle de A.

Corrigé de l'exercice 3. -

Puisque la série $A(z)$ converge, il existe $D,R > 0$ tels que $\forall i \geq 0$, $||A_i|| \leq DR^{-i}$. Posons $f_j = ||F_j||$ et $g_j = f_j R^j$. On a $g_0 = 1$ et :

$$\forall k \geq 1 \text{ , } g_k \leq \frac{CD}{k} \sum_{j=0}^{k-1} g_j.$$

En distinguant les cas $CD \leq 1$ et $CD \geq 1$, on prouve par récurrence que $\forall k \geq 0$, $g_k \leq \max(1,CD)^k$ d'où $||F_k|| \leq \left(R^{-1}\max(1,CD)\right)^k$. La conclusion est immédiate.

9.3 Deuxième partie : trois exercices sur les équations aux q-différences

On suppose, dans ces exercices, que $|q| > 1$.

Les questions en italiques sont plus difficiles.

Exercice 1. -

Soit $A \in GL_n(\mathbf{C})$. On définit la série de Laurent matricielle :

$$\theta_{q,A}(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k q^{-k(k-1)/2} z^k A^k.$$

1) Montrer que $\theta_{q,A}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et que $\theta_{q,A}(qz) = (-qz)A\theta_{q,A}(z) = (-qz)\theta_{q,A}(z)A$. En déduire une solution fondamentale méromorphe $E_{q,A}$ du système $\sigma_q X = AX$.

2) Vérifier que, si $P \in GL_n(\mathbf{C})$, on a $\theta_{q,PAP^{-1}} = P\,\theta_{q,A}\,P^{-1}$. Calculer $\theta_{q,A}$ lorsque A est semi-simple. Quelles sont (dans tous les cas) les singularités de $\theta_{q,A}$?

3) Calculer $\theta_{q,A}$ lorsque A est quelconque et $n = 2$. Suggérer une formule générale.

Exercice 2. -

On considère l'équation aux q-différences linéaire d'ordre 2 :

(9.3.0.2) $$a(z)f(q^2z) + b(z)f(qz) + c(z)f(z) = 0\,,\ \text{ où } a(z), b(z), c(z) \in \mathbf{C}\{z\} \text{ et } a(z)c(z) \neq 0.$$

On écrira $a = a_0 + a_1z + \cdots$, $b = b_0 + b_1z + \cdots$, $c = c_0 + c_1z + \cdots$ et l'on supposera de plus que a_0, b_0, c_0 ne sont pas tous les trois nuls. Il est clair que l'on peut toujours mettre une équation analytique d'ordre 2 sous cette forme. On notera $P(r) = a_0r^2 + b_0r + c_0$ (polynôme de l'équation caractéristique).

1) Montrer que, si l'on substitue $f = f_0 + f_1z + \cdots$ dans l'équation 9.3.0.2, on obtient des relations de récurrence de la forme : $P(1)f_0 = 0$ et, pour $k \geq 1$: $P(q^k)f_k =$ combinaison linéaire de $f_0, \ldots, f_{k-1}$. En déduire qu'une condition *nécessaire* pour que 9.3.0.2 admette une solution série avec $f_0 = 1$ est que $P(1) = 0$; puis qu'une condition *suffisante* pour avoir l'existence et l'unicité est que de plus $\forall k \geq 1$, $P(q^k) \neq 0$.

2) On suppose dorénavant ces conditions vérifiées et l'on note f la solution correspondante. Etudier la convergence de la série f si $a = 1$, $b = -1$, $c = z$. Même question si $a = z$, $b = 1$, $c = -1$.

3) On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Montrer que f converge (lemme d'Adams).

Exercice 3 -

1) On note $p = q^{-1}$. Soit $u \in \mathbf{C}$. En considérant l'équation aux q-différences d'ordre 1 satisfaite par le membre gauche de l'égalité, démontrer le *théorème q-binomial* :

$$\frac{(uz;p)_\infty}{(z;p)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u;p)_n}{(p;p)_n} z^n.$$

Pour quelles valeurs des paramètres la fonction hypergéométrique basique est-elle égale à $\frac{(uz;p)_\infty}{(z;p)_\infty}$?

2) Résoudre la même équation à l'infini selon la méthode du cours et préciser la matrice de connexion (ici de rang 1).

3) Que donne le théorème q-binomial lorsque l'on fait tendre q vers 1 avec $u = p^\alpha$, α étant fixé ?

9.4 Corrigé succinct de la deuxième partie

Corrigé de l'exercice 1. -

1) La série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbf{C}^*$. Le calcul qui suit est le même que pour θ_q : $\theta_{q,A}(qz) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{k+1} q^{-k(k+1)/2} q^{k+1} z^{k+1} A^{k+1} = -qzA \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k q^{-k(k-1)/2} z^k A^k = -qzA\theta_{q,A}(z)$, et l'on peut aussi bien "sortir" le A à droite. On peut alors poser (au plus simple) $E_{q,A} = \frac{1}{\theta_q}\theta_{q,A}$.

2) L'égalité $\theta_{q,PAP^{-1}} = P\theta_{q,A}P^{-1}$ est immédiate (vraie pour tout polynôme de Laurent, puis continuité). Lorsque $A = P\ \mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)\ P^{-1}$, on en déduit $\theta_{q,A}(z) = P\ \mathrm{diag}(\theta_q(c_1z),\ldots,\theta_q(c_nz))\ P^{-1}$. En général, en trigonalisant A, on voit que les singularités de $\theta_{q,A}$ (*i.e.* les pôles de $\theta_{q,A}^{-1}$) sont simples et sur $Sp(A^{-1})\ q^{\mathbf{Z}}$.

3) Si A est semi-simple, le calcul a déjà été fait. Sinon :

$$A = P\,c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow A^k = P\,c^k\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \theta_{q,A}(z) = P\ \begin{pmatrix}\theta_q(cz) & cz\theta_q'(cz)\\ 0 & \theta_q(cz)\end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc, en posant $A = D + N$ (Dunford additif), on trouve : $\theta_{q,A} = \theta_{q,D} + z(\theta_{q,D})'N$. Une formule générale s'obtient et en appliquant la formule de Taylor à la fonction $t \mapsto \theta_{q,D+tN}$; l'exercice est laissé au lecteur ... Notons que des formules analogues valent pour toute série de Laurent (à la place de θ_q).

Corrigé de l'exercice 2. -

1) Notons $P_i(r) = a_ir^2 + b_ir + c_i$. Le coefficient de z^k dans $a(z)f(q^2z) + b(z)f(qz) + c(z)f(z)$ est alors $\sum_{i+j=k} P_i(q^j)f_j$. Comme $P = P_0$, toute la question s'ensuit.

2) Pour $a = 1$, $b = -1$, $c = z$, on trouve $q^{2k}f_k - q^kf_k + f_{k-1} = 0$, d'où $f_k/f_{k-1} = -1/(q^{2k} - q^k)$. Le rayon de convergence de f est donc infini. Pour $a = z$, $b = 1$, $c = -1$, on trouve $q^{2k-2}f_{k-1} + q^kf_k - f_k = 0$, d'où $f_k/f_{k-1} = -q^{2k-2}/(q^k - 1)$. Le rayon de convergence de f est donc nul.

3) D'après le calcul de la question 1, $f_k = -\sum_{i=1}^{k} f_iP_i(q^{k-i})/P_0(q^k)$, avec $\deg P_i \leq 2$ et $\deg P_0 = 2$. Avec un peu d'efforts, on en déduit que le rayon de convergence est > 0.

Corrigé de l'exercice 3. -

1) Le membre gauche est analytique, vaut 1 en 0 et satisfait l'équation : $(1-qz)f(qz) = (1-uqz)f(z)$. Ses coefficients vérifient donc les relations : $f_0 = 1$ et $(q^k-1)f_k = (q^k-uq)f_{k-1}$, d'où l'égalité. On retrouve $\Phi(a,b,c;q,z)$ pour $a = u$ et $b = c$ ou $b = u$ et $a = c$.

2) Posant $w = 1/z$ et $g(w) = f(1/w)$, on a $u(1-w/u)g(qw) = (1-w)g(w)$, d'où la solution canonique : $f(z) = g(w) = e_{q,1/u}(w)(pw;p)_\infty/(pw/u;p)_\infty$ et la "matrice" de connexion (qui P est bien q-invariante) :

$$P(z) = \frac{(uz;p)_\infty(p/uz;p)_\infty}{(z;p)_\infty(p/z;p)_\infty}\frac{\theta_q(u/z)}{\theta_q(1/z)} = \frac{\theta_q(uz)\theta_q(u/z)}{\theta_q(z)\theta_q(1/z)} = u\frac{\theta_q(uz)\theta_q(z/u)}{\theta_q(z)^2} \ \text{ car } \ \theta_q(\frac{1}{z}) = \frac{-1}{z}\theta_q(z).$$

3) Pour les coefficients, on a $\frac{(u;p)_n}{(p;p)_n} \to (-1)^n\begin{pmatrix}-\alpha\\ n\end{pmatrix}$. Sous de bonnes hypothèses, $\frac{(uz;p)_\infty}{(z;p)_\infty} \to (1-z)^{-\alpha}$, mais ce n'est nullement évident ! Cela découle (par exemple) de la théorie générale de la confluence. On obtient donc à la limite le théorème binomial .

9.5 Troisième partie : un problème sur les équations différentielles

Les questions en italiques sont plus difficiles.

Rappels sur l'équation hypergéométrique, notations et conventions en vigueur dans le problème. -

Il s'agit de l'équation différentielle :

$$(E_{\alpha,\beta,\gamma}) \quad f''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right) f'(z) + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} f(z) = 0.$$

On supposera que l'on est dans le cas "générique" (semi-simple non résonnant) en chacune des singularités $0, 1, \infty$, autrement dit, $\gamma \notin \mathbf{Z}$, $\alpha - \beta \notin \mathbf{Z}$ et $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbf{Z}$. Pour simplifier, on écrira $D = d/dz$ et :

$$D^2 + pD + q = D^2 + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right) D + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}.$$

Définition. - Un opérateur différentiel $P(D) \in \mathbf{C}(z) < D >$ sera dit *réductible* s'il s'écrit $P(D) = Q(D)R(D)$, où $Q(D)$ et $R(D)$ sont des opérateurs différentiels de degré ≥ 1 en D (et *irréductible* dans le cas contraire).

Le disque $\Omega = \overset{\circ}{D}(1/2, 1/2)$ est un ouvert simplement connexe qui ne rencontre pas le lieu singulier de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $V = Sol(\Omega)$ des solutions de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ sur Ω est donc de dimension 2. Pour décrire la monodromie, nous choisissons comme point-base $p = 1/2$ et comme générateurs libres du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, p) = \pi_1(\mathbf{S} \setminus \{0,1,\infty\}, p)$ les classes d'homotopie des deux lacets γ_0 et γ_1 définis par les formules : $\gamma_0(t) = \frac{1}{2}e^{2\imath\pi t}$ et $\gamma_1(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{2\imath\pi t}$, et nous posons $\gamma_\infty = (\gamma_0.\gamma_1)^{-1}$.

La représentation de monodromie associée est ainsi définie : pour tout lacet γ dans $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$, de base p, pour tout $\phi \in V$, le prolongement analytique de ϕ le long de γ donne une fonction $\psi \in V$ et l'application $\phi \mapsto \psi$ est un automorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel V. Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie $\overline{\gamma} \in \pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, p)$ et nous le noterons $M(\overline{\gamma})$.

Nous obtenons ainsi une application M de $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0,1\}, p)$ dans $Aut_{\mathbf{C}}(V)$ qui est une antireprésentation, autrement dit : $M(\overline{\gamma\gamma'}) = M(\overline{\gamma'})M(\overline{\gamma})$. On parlera cependant de "représentation de monodromie", soit par abus de langage, soit en faisant référence à la représentation du groupe opposé (ce qui ne changera rien dans la pratique).

Définition. - Une représentation (ou une antireprésentation) linéaire $G \to GL(V)$ sera dite *réductible* s'il existe un sous-espace W de V, $W \neq V$, $\{0\}$ et stable sous l'action de G (et *irréductible* dans le cas contraire).

Problème. -

A. Une implication. -

On suppose que la représentation de monodromie est réductible.

1) Démontrer qu'il existe $f \in V \setminus \{0\}$ qui est simultanément vecteur propre de $M(\overline{\gamma}_0)$, $M(\overline{\gamma}_1)$ et $M(\overline{\gamma}_\infty)$ (on ne dit rien des valeurs propres).

2) Démontrer que f'/f admet un prolongement uniforme $r(z)$ à $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$.

3) Par considération de son type de croissance aux voisinages de $0,1,\infty$, montrer que la fonction $r(z)$ est rationnelle.

4) En déduire que l'on peut factoriser l'opérateur différentiel D^2+pD+q sous la forme :

$$D^2+pD+q = (D-s)(D-r),$$

avec $s \in \mathbf{C}(z)$.

B. La réciproque. -

On suppose que l'opérateur différentiel D^2+pD+q est réductible.

1) Montrer qu'il peut s'écrire sous la forme $(D-s)(D-r)$, avec $r,s \in \mathbf{C}(z)$ et $r'+r^2+pr+q=0$.

2) Montrer qu'en tout pôle a de r dans $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$, on peut écrire : $r = \frac{1}{z-a}+$ une fonction holomorphe en a. En déduire que $r = r_1 + \frac{r_2'}{r_2}$, où r_1 est une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle sur Ω et r_2 un polynôme.

3) Montrer que l'équation $Df_1 = r_1 f_1$ admet une solution non triviale holomorphe dans Ω qui est vecteur propre de tous les automorphismes de monodromie et que $f = r_2 f_1$ est solution de D^2+pD+q.

4) Montrer que la représentation de monodromie est réductible.

C. Synthèse. -

1) Formuler un théorème d'équivalence entre irréductibilité d'une représentation et irréductibilité d'un opérateur différentiel.

2) Proposer une généralisation de cette équivalence et en esquisser une preuve.

9.6 Corrigé succinct de la troisième partie

A. Une implication. -

1) La représentation de monodromie est ici de dimension 2. Dire qu'elle est réductible, c'est dire qu'il y a une droite stable, c'est-à-dire un vecteur propre commun à tous les automorphismes de monodromie.

2) La dérivation commute au prolongement analytique ; si $M(\bar\gamma_a)(f) = \lambda_a f$ pour $a \in \{0,1,\infty\}$, alors $M(\bar\gamma_a)(f') = \lambda_a f'$ et f'/f est invariant par les $M(\bar\gamma_a)$, donc admet un prolongement uniforme r à $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$.

3) Comme f est vecteur propre de $M(\bar{\gamma}_0)$ c'est une solution associée à l'un des exposants : $f = z^\lambda g$, où g est holomorphe inversible en 0 (en fait, ici : $\lambda \in \{0, 1-\gamma\}$ et la valeur propre est $e^{2\iota\pi\lambda}$). Alors $r = f'/f = (\lambda/z) + (g'/g)$ qui a une croissance modérée près de 0. On fait le même raisonnement en 1 et ∞ : r étant uniforme à croissance modérée partout, elle est méromorphe sur $\mathbf{S}$, c'est-à-dire rationnelle.

4) On a $(D-s)(D-r) = D^2 - (r+s)D + (rs - r')$. On cherche donc s tel que $s + r = -p$ et $rs - r' = q$, d'où $s = -p - r$ et l'on veut $r' + r(p+r) + q = 0$, avec $r = f'/f$, c'est-à-dire $f'' + pf' + qf = 0$.

B. La réciproque. -

1) $D^2 + pD + q$ réductible $\Rightarrow$ ses facteurs sont de degré 1 en $D \Rightarrow D^2 + pD + q = (s_0 D - s_1)(r_0 D - r_1)$. Alors $s_0 r_0 = 1 \Rightarrow D^2 + pD + q = (D - (s_1 r_0 - s_0 r_0'))(D - r_1 s_0)$, La formule concernant r a été vue en A.4.

2) Si r a un pôle d'ordre $k > 0$ en a, r' y a un pôle d'ordre $k+1$ et r^2 un pôle d'ordre $2k$. Comme p, q sont holomorphes en a, l'égalité $r' + r^2 = -pr - q$ implique d'abord $k = 1$ et ensuite la forme demandée. La partie polaire de r sur Ω est donc une somme (finie) de termes de la forme $\frac{1}{z-a}$, donc s'écrit $\frac{r_2'}{r_2}$, avec $r_2 = \prod(z-a) \in \mathbf{C}[z]$ (où a parcourt l'ensemble des pôles de r dans Ω).

3) L'espace W_1 des solutions de $Df_1 - r_1 f_1 = 0$ dans Ω est une droite (Cauchy) stable par la monodromie, car le prolongement analytique préserve les relations différentielles à coefficients uniformes. On a alors $Df/f = Df_1/f_1 + Dr_2/r_2$, d'où $(D-r)f = 0$, d'où $(D-s)(D-r)f = 0$.

4) La droite $W = r_2 W_1$ engendrée par f est contenue dans V et elle est stable par la monodromie car r_2 est uniforme. La représentation de monodromie est donc réductible.

C. Synthèse. -

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) la représentation de monodromie de $(E_{\alpha,\beta,\gamma})$ est irréductible ; (ii) L'opérateur $D^2 + pD + q$ est irréductible dans $\mathbf{C}(z) < D >$.

2) L'opérateur $P(D)$ est irréductible si et seulement si la représentation de monodromie associée l'est.

Si $P(D) = Q(D)R(D)$, on raisonne comme pour la réciproque ci-dessus, avec $W = \mathrm{Ker}(R(D))$.

Si la représentation est réductible, soit W un sous-espace stable de base $f_1, \ldots, f_k$. Soit $\mathcal{X}$ la matrice wronskienne de cette base. La matrice $A = \mathcal{X}'\mathcal{X}^{-1}$ est uniforme car, quand $\mathcal{X}$ se prolonge en $\mathcal{X}C$, $C \in GL_k(\mathbf{C})$ (stabilité de W), $\mathcal{X}'$ se prolonge en $\mathcal{X}'C$. Donc $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$; comme $\mathcal{X}$ est une matrice wronskienne, on vérifie sans peine que A est la matrice d'un système provenant d'une équation (cette partie du raisonnement est proche de la preuve de la proposition 3.1.18 du cours). Les f_i sont donc solutions de $R(D)f = 0$, où $R(D)$ est de degré k. La division euclidienne $P(D) = Q(D)R(D) + S(D)$ montre que tous les f_i sont solutions de $S(D)$, ce qui fait une dimension trop grande, sauf si $S(D) = 0$, ce qui donne la factorisation voulue.

Bibliographie

[1] **Ahlfors L., 1979.** *Complex analysis*, McGraw-Hill.

[2] **Anosov D.V. and Bolibrukh A.A., 1994.** *The Riemann-Hilbert Problem*, *Aspects of Mathematics*, vol. E22, Vieweg.

[3] **Arnold V.I. & Ill'yashenko Yu.S., 1988.** *Ordinary differential equations,* in *Dynamical Systems I,* D.V. Anosov & V.I. Arnold (Eds.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 1, Springer.

[4] **Artin M., 1991.** *Algebra*, Prentice-Hall.

[5] **Beauville A., 1993.** Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann [d'après A. Bolibruch], Séminaire Bourbaki no 765, Astérisque 216, Société Mathématique de France.

[6] **Birkhoff G.D., 1913.** The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc. Amer. Acad.*, 49, pp. 521-568.

[7] **Bourbaki N., 1981** *Algèbre, chap. IV à VII*, Masson.

[8] **Bourbaki N., 1976.** *Fonctions d'une variable réelle*, Diffusion C.C.L.S.

[9] **Cartan H., 1985.** *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,* Collection Enseignement des sciences, Hermann.

[10] **Cartier P., 1988.** Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées, Séminaire Bourbaki no 687, Astérisque 161-162, Société Mathématique de France.

[11] **Deligne P., 1970.** *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture notes in mathematics 163, Springer.

[12] **Dieudonné J., 1960.** *Cours d'analyse, t. I*, Gauthier-Villars.

[13] **Di Vizio L., Ramis J.-P., Sauloy J. et Zhang C., 2003.** Equations aux q-différences, *Gazette des mathématiciens* n° 96, 20-49.

[14] **Erdelyi A. (ed), 1953.** *Higher transcendental functions, vol. I*, McGraw-Hill.

[15] **Evgrafov M.A., 1989.** *Series and Integral Representations*, in *Analysis I,* R.V. Gamkrelidze (Ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 13, Springer.

[16] **Gasper G. and Rahman M., 1990.** *Basic hypergeometric series*, *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 35, Cambridge University Press.

[17] **Godbillon C., 1985.** *Elements de topologie algébrique,* Collection Méthodes, Hermann.

[18] **Godement R., 1964.** *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann.

[19] **Goursat E., 1936.** *Leçons sur les séries hypergéométriques*, Hermann.

[20] **Gunning R. C., 1967.** *Lectures on vector bundles over Riemann Surfaces*, Princeton University Press.

[21] **Gunning R. C. & Rossi H., 1965.** *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall.

[22] **Hardy G.H. and Wright E.M., 1988.** *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford.

[23] **Hain R. M., 1992.** Classical polylogarithms, `arXiv:alg-geom/9202022`.

[24] **Hilbert D., 1976.** *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol. XXVIII, part 1 and 2, AMS.

[25] **Ince E.L., 1956.** *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications.

[26] **Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S. et Yoshida M., 1990.** *From Gauss to Painlevé, Aspects of Mathematics*, vol. E16, Vieweg.

[27] **Jones G. A. and Singerman A., 1986.** *Complex Functions*, Cambridge.

[28] **Lang S., 1987.** *Elliptic Functions*, Springer.

[29] **Mac Lane S., 1971.** *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics no 5, Springer.

[30] **Maisonobe P. et Sabbah C. , 1993.** *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Collection Travaux en cours, vol. 45, Hermann.

[31] **Maisonobe P. et Sabbah C. , 1993.** *Images directes et constructibilité*, Collection Travaux en cours, vol. 46, Hermann.

[32] **Massey W., 1991.** *A basic course in algebraic topology*, Graduate texts in mathematics no 127, Springer.

[33] **Mneimné R. et Testard F., 1986.** *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Collection Méthodes, Hermann.

[34] **Mumford D., 1983.** *Tata lectures on Theta, I*, Birkhaüser.

[35] **Oesterlé J., 1993..** Polylogarithmes, Séminaire Bourbaki no 762, Astérisque 216, Société Mathématique de France.

[36] **Pham F., 1979.** *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Mathematics, vol. 2, Birkhäuser.

[37] **van der Put M. and Singer M.F., 1997.** *Galois theory of difference equations, Lecture Notes in Mathematics*, 1666, Springer Verlag.

[38] **van der Put M. and Singer M.F., 2003.** *Galois theory of linear differential equations*, Springer Verlag.

[39] **Ramis J.P., 1990.** Fonctions θ et équations aux q-différences, non publié, Strasbourg.

[40] **Ramis J.P., 1993.** Séries divergentes et théories asymptotiques, Panoramas et Synthèses no 0, Bulletin SMF, supplément au t. 121.

[41] **Riemann B., 1968.** *Oeuvres mathématiques*, Librairie Albert Blanchard.

[42] **Riemann B., 1851.** Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe, *in* [41].

[43] **Riemann B., 1854.** Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$. *in* [41].

[44] **Rudin W., 1977.** *Analyse réelle et complexe*, Masson.

[45] **Sabbah C., 2002.** *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, CNRS Editions, EDP Sciences.

[46] **Sauloy J., xxxx.** Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, ***PREPRINT PICARD XXXX***.

[47] **Sauloy J., 2000.** Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Ann. Inst. Fourier*, 50-4 , 1021-1071.

[48] **Sauloy J., 2004.** La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé, *Ann. Inst. Fourier*, 54-1 , 185-215.

[49] **Sauloy J., 2003.** Galois theory of fuchsian q-difference equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36, no 6, 925-968.

[50] **Serre J.-P., 1967.** *Représentations linéaires des groupes finis*, Collection Méthodes, Hermann.

[51] **Serre J.-P., 1970.** *Cours d'arithmétique*, PUF.

[52] **Varadarajan V. S., 1996.** Linear meromorphic differential equations : a modern point of view, Bull. A.M.S. 33,1,1-42.

[53] **Whittaker E.T. and Watson G.N., 1927.** *A course of modern analysis*, Cambridge.

[54] **Yoshida M., 1987.** *Fuchsian Differential Equations*, Aspects of Mathematics E11, Vieweg.

[55] **Zisman M., 1996.** *Mathématiques pour l'agrégation*, Dunod.