EXAMEN DE M1 SUR "SURFACES DE RIEMANN" AVEC CORRIGÉ SUCCINCT

19 mai 2010

L'épreuve dure quatre heures. L'usage des documents (notes de cours, polycopiés, livres) est autorisé.

1 Courbes de Fermat

Notations. Soient n un entier ≥ 3, $P(X,Y) := X^n + Y^n - 1 \in \mathbf{C}[X,Y]$ et $\Gamma \subset \mathbf{C}^2$ la courbe algébrique affine d'équation $P(x,y) = 0$. On notera de plus $\overline{P}(X,Y,Z)$ le polynôme homogénéisé de P et $\overline{\Gamma} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la projectifiée de Γ.

1) Démontrer que P est irréductible et Γ non singulière. Justifier très brièvement la possibilité d'associer à Γ une surface de Riemann, que l'on notera Σ. On précisera la possibilité d'utiliser comme carte analytique l'une ou l'autre des applications $\phi : (x,y) \mapsto x$ et $\psi : (x,y) \mapsto y$.

Solution:
Irréductibilité de P : critère d'Eisenstein en utilisant l'anneau $A = \mathbf{C}[X]$ et l'élément irréductible $X - 1$.
Non singularité : les dérivées partielles nX^{n-1} et nY^{n-1} ne s'annulent ensemble qu'en $(0,0)$ qui n'est pas sur la courbe.
D'après le cours, ϕ est une carte analytique là où $P'_y \neq 0$, c'est à dire en tout point autre que les n points $(e^{2i\pi j/n}, 0)$. De même, ψ est une carte analytique en tout point autre que les n points $(0, e^{2i\pi j/n})$. Il y a des cartes analytiques en tout point d'où une structure analytique.

---

2) Vérifier que l'application ϕ de Σ dans $\mathbf{C}$ est un morphisme de degré n. Montrer qu'elle est ramifiée en n points $P_1, \ldots, P_n$ que l'on déterminera. Calculer les multiplicités $e_{P_j}(\phi)$.

Solution:
L'holomorphie se vérifie dans les cartes. Dans la carte ϕ, c'est trivial. Au voisinage de chaque point $(e^{2i\pi j/n}, 0)$, on utilise la carte ψ : la fonction $\phi \circ \psi^{-1}$ est l'une des n déterminations de la fonction holomorphe $y \mapsto \sqrt[n]{1 - y^n}$, celle telle que $0 \mapsto e^{2i\pi j/n}$.
Un point $x \in \mathbf{C}$ a en général n antécédents distincts, le degré de ϕ est donc n.
Les seules exceptions sont les $x = e^{2i\pi j/n}$, $j = 1, \ldots, n$, dont les antécédents sont les n points de ramification $P_j = (e^{2i\pi j/n}, 0)$.
Comme chaque P_j est seul dans sa fibre, $e_{P_j}(\phi) = n$.

---

3) Déterminer l'équation homogène $\overline{P}$ de $\overline{\Gamma}$ et vérifier que cette dernière est non singulière et que la surface de Riemann associée $\overline{\Sigma}$ est compacte.

Solution:
On a $\overline{P}(X,Y,Z) = Z^n P(X/Z, Y/Z) = X^n + Y^n - Z^n$.
Ses dérivées partielles ne s'annulent ensemble qu'en $(0,0,0)$ qui ne correspond pas à un point de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, d'où la non singularité.
La surface $\overline{\Sigma}$ est un fermé de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, donc compacte.

---

4) Déterminer les n points à l'infini Q_j, $j = 1, \dots, n$, par leurs coordonnées projectives $[X_j : Y_j : Z_j]$ et par leurs coordonnées (u_j, v_j) dans la carte affine $u = Y/X$, $v = Z/X$. Vérifier que $(u,v) \mapsto v$ est une carte analytique en chaque Q_j.

Solution:
En faisant $Z = 0$, on trouve (par exemple) $[X_j : Y_j : Z_j] = [1 : y_j : 0]$, où $y_j = e^{(2j+1)i\pi/n}$ (les racines n^{es} de -1).
Dans la carte affine (u,v), cela donne $(u_j, v_j) = (y_j, 0)$.
L'équation de la courbe dans cette carte est $1 + u^n - v^n = 0$, et la dérivée partielle par rapport à u ne s'annule pas en les Q_j, donc $(u,v) \mapsto v$ y est une carte analytique.

---

5) Montrer que ϕ s'étend en une fonction méromorphe $\overline{\phi}$ sur $\overline{\Sigma}$, admettant des pôles simples en les Q_j. En déduire les multiplicités $e_{Q_j}(\overline{\phi})$. Calculer le diviseur $(\overline{\phi})$ de $\overline{\phi}$.

Solution:
Dans la carte (u,v), la fonction ϕ s'écrit $\dfrac{1}{v}$. Comme v est une carte holomorphe en chaque Q_j, ce sont bien des pôles simples de la fonction méromorphe $\overline{\phi}$ sur $\overline{\Sigma}$; en particulier, $e_{Q_j}(\overline{\phi}) = 1$.
Les zéros de $\overline{\phi}$ sont ceux de ϕ, donc, dans la carte affine (x,y), les points de coordonnées $(0,y)$ avec $y^n = 1$, donc les $R_j(0, e^{2i\pi j/n})$, $j = 1, \dots, n$. Le diviseur de $\overline{\phi}$ est donc :

$$(\overline{\phi}) = [R_1] + \cdots + [R_n] - [Q_1] - \cdots - [Q_n].$$

---

6) Déduire du théorème de Riemann-Hurwitz (première version) la caractéristique d'Euler-Poincaré et le genre de $\overline{\Sigma}$.

Solution:
On a $\chi\left(\overline{\Sigma}\right) = n\chi(\mathbf{S}) - r$, avec ici $r = \sum_{j=1}^{n} \left(e_{P_j}(\phi) - 1\right) = n(n-1)$, d'où $\chi\left(\overline{\Sigma}\right) = -n^2 + 3n$. Le genre de $\overline{\Sigma}$ est donc $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

---

7) Justifier l'existence d'une forme différentielle holomorphe ω sur Σ qui s'écrit $\dfrac{dx}{y^{n-1}} = -\dfrac{dy}{x^{n-1}}$. Quels sont ses zéros ?

Solution:
La forme $\frac{dx}{y^{n-1}}$, resp. $-\frac{dy}{x^{n-1}}$, est définie dans la carte x, resp. dans la carte y. De $x^n + y^n = 1$, on déduit $x^{n-1}dx + y^{n-1}dy = 0$, d'où la compatibilité des deux formes et la définition de $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$. D'après les deux écritures ci-dessus, ω n'a aucun zéro sur Σ.

---

8) On étend ω en une forme différentielle méromorphe $\overline{\omega}$ sur $\overline{\Sigma}$. Calculer le diviseur $(\overline{\omega})$ et en déduire une confirmation du genre de $\overline{\Sigma}$.

Solution:
En utilisant les formules $x = \frac{1}{v}$, $y = \frac{u}{v}$, on trouve que, dans la carte affine (u,v), la forme ω s'écrit $-\frac{v^{n-3}dv}{u^{n-1}}$ qui est holomorphe en les points à l'infini Q_j (hypothèse $n \geq 3$) et s'y annule à l'ordre $n-3$.
Le diviseur de $\overline{\omega}$ est donc :

$$(\overline{\omega}) = (n-3)\sum_{j=1}^{n}[Q_j].$$

Son degré est $n(n-3) = 2g-2$ (deuxième forme de Riemann-Hurwitz) et l'on retrouve bien l'égalité $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

---

9) À quelle condition la forme $x^i y^j \overline{\omega}$ est-elle holomorphe sur $\overline{\Sigma}$? En déduire une minoration de la dimension du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\Omega^1\left(\overline{\Sigma}\right)$.

Solution:
Dans la carte affine (x,y), on trouve immédiatement la condition $i,j \geq 0$. Dans la carte affine (u,v), la forme s'écrit $-u^{-n+1+j}v^{n-3-i-j}dv$, d'où les conditions $j \leq n-1$ et $i+j \leq n-3$. Il y a au total $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tels couples. Comme les $x^i y^j \overline{\omega}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$, on trouve :

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega^1\left(\overline{\Sigma}\right) \geq g.$$

En fait, on peut montrer qu'il y a égalité comme suit : toute forme différentielle méromorphe s'écrit $f\overline{\omega}$ où f est une fonction méromorphe sur $\overline{\Sigma}$. D'après la partie du dernier chapitre qui n'a pas été traitée en cours (cf. les feuilles distribuées), f est une fonction rationnelle de x,y, donc de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)y^i$, les P_i étant des fractions rationnelles : c'est dû au fait que y est algébrique de degré n sur $\mathbf{C}(x)$. Il reste à vérifier que, pour que $f\overline{\omega}$ soit holomorphe sur $\overline{\Sigma}$, il faut que chaque P_i soit un polynôme de degré $\leq n-3-i$.

---

10) (Plus difficile.) La courbe Γ admet-elle d'autres points à coordonnées rationnelles que $(0,1)$, $(1,0)$? (Attention : il y a un piège.)

Solution:
Voir Wiles, Andrew (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Annals of Mathematics (141) (3), 443-551.

---

2 Diverses applications de la formule de Riemann-Hurwitz

Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes. Que peut-on déduire de la formule de Riemann-Hurwitz lorsque X est la sphère de Riemann ? Lorsque X est un tore complexe ?

Solution:
On a $\chi(X) = n\chi(Y) - r$ et $n \geq 1$, $r \geq 0$, $\chi(X), \chi(Y) \leq 2$. Si X est la sphère de Riemann, $n\chi(Y) \geq 2$, ce qui n'est possible que si le genre de Y est 0. On peut montrer que Y est alors la sphère de Riemann. Si X est un tore complexe, $n\chi(Y) \geq 0$, ce qui n'est possible que si le genre de Y est 0 ou 1. De plus, dans le deuxième cas (dont on peut montrer qu'il correspond à un tore complexe), le morphisme est non ramifié (isogénie).

---

3 Certains isomorphismes de coubes elliptiques

Soient Λ un réseau de $\mathbf{C}$ et $a \in \mathbf{C}^*$. L'application $z \mapsto az$ induit donc un isomorphisme de surfaces de Riemann $f : \mathbf{C}/\Lambda \to \mathbf{C}/\Lambda'$, où $\Lambda' = a\Lambda$. Soit d'autre part ϕ l'isomorphisme de $\mathbf{C}/\Lambda$ sur une cubique projective non singulière $\overline{\Gamma}$ induit par $z \mapsto \big(\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z)\big)$ (fonction de Weierstrass et sa dérivée) ; soit ϕ' l'isomorphisme analogue de $\mathbf{C}/\Lambda'$ sur $\overline{\Gamma'}$. Expliciter l'isomorphisme $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$ de $\overline{\Gamma}$ sur $\overline{\Gamma'}$ et vérifier qu'il est compatible avec les équations de $\overline{\Gamma}$ et de $\overline{\Gamma'}$.

Solution:
Tout repose sur les formules $\wp_{\Lambda'}(az) = a^{-2}\wp_\Lambda(z)$ et $\wp'_{\Lambda'}(az) = a^{-3}\wp'_\Lambda(z)$ dont la preuve est immédiate. L'application de $\overline{\Gamma}$ sur $\overline{\Gamma'}$ est donc $(x,y) \mapsto (a^{-2}x, a^{-3}y)$ en coordonnées affines, $[X:Y:Z] \mapsto [a^{-2}X : a^{-3}Y : Z]$ en coordonnées projectives. Cette application est bien bijective de la courbe $\overline{\Gamma}$ d'équation $Y^2Z = 4X^3 - g_2X^2Z - g_3Z^3$ sur la courbe $\overline{\Gamma'}$ d'équation $Y^2Z = 4X^3 - g'_2X^2Z - g'_3Z^3$ parce qu'un calcul analogue au précédent donne $g'_2 = a^{-4}g_2$ et $g'_3 = a^{-6}g_3$.

---

4 Du bon usage des formes différentielles

Soient Λ, Λ' deux tores complexes. On note π, π' les projections canoniques de $\mathbf{C}$ sur ces deux tores et ω, resp. ω' l'unique forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{C}/\Lambda$, resp. $\mathbf{C}/\Lambda'$ telle que $\pi^*\omega = dz$, resp. $\pi'^*\omega' = dz$. On rappelle que ω, resp. ω' est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\Omega^1(\mathbf{C}/\Lambda)$, resp. $\Omega^1(\mathbf{C}/\Lambda')$. Soit $f : \mathbf{C}/\Lambda \to \mathbf{C}/\Lambda'$ un morphisme de surfaces de Riemann. On note $\phi = f \circ \pi$.
1) Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $\phi^*\omega' = adz$.
2) Posant $\psi(z) := \phi(z) - az \pmod{\Lambda'}$, calculer $\psi^*\omega'$.
3) En déduire que ψ est constante et que $a\Lambda \subset \Lambda'$.
4) Quel théorème du cours retrouve-t-on ainsi ?

Solution:
1) $\phi^*\omega' \in \Omega^1(\mathbf{C}/\Lambda) = \mathbf{C}\,dz$, donc il est de la forme adz.
2) $\psi^*\omega' = \phi^*\omega' - adz = 0$.
3) La dérivée de l'expression de ψ dans les cartes est donc nulle d'où la constance, *i.e.* $\phi(z) = az + b \pmod{\Lambda'}$. Pour que cette application factorise par π, il est nécessaire (et suffisant) que $a\Lambda \subset \Lambda'$.
4) On retrouve ainsi la description de tous les morphismes de surfaces de Riemann entre tores complexes.
