Equations linéaires aux q-différences: Polygone de Newton et filtration canonique.

Jacques Sauloy - Laboratoire Emile Picard - E-mail : sauloy@picard.ups-tlse.fr

Exposés au groupe de travail sur les équations aux q-différences, 26/10/01 et 09/11/01

Résumé

L'étude locale des équations aux q-différences à coefficients formels ou convergents fait intervenir un polygone de Newton, qui est un objet intrinsèque: il peut être défini en fonction du module aux q-différences associé et possède de bonnes propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles. Dans le cas formel, il donne lieu à une décomposition du module aux q-différences associé en somme directe de modules purs (à une seule pente), comme dans le cas classique des équations différentielles complexes. Dans le cas convergent, apparait un phénomène spécifique aux q-différences: le lemme d'Adams garantit l'existence de solutions convergentes associées à la première pente. On en déduit d'abord une factorisation canonique convergente d'un opérateur aux q-différences, puis, pour tout module aux q-différences, l'existence d'une filtration canonique par les pentes avec des quotients purs; de plus, le gradué associé possède d'excellentes propriétés fonctorielles et abéliennes (d'où son interêt pour la classification) et tensorielles (d'où son interêt pour la théorie de Galois).

Plan général

1. Polygone de Newton, factorisation, solutions
   1. Le polygone de Newton d'une équation, d'un opérateur aux q-différences
   2. Factorisations formelle et convergente d'un opérateur aux q-différences
   3. Solutions formelles et convergentes d'une équation aux q-différences
2. Polygone de Newton d'un module aux q-différences
   1. Equations, systèmes, modules
   2. Définition intrinsèque du polygone de Newton
   3. Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles
3. La filtration canonique par les pentes et le gradué associé
   1. La filtration canonique par les pentes
   2. Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles
   3. Le gradué associé
   4. Applications à la classification et à la théorie de Galois

References

[1] **Adams C.R, 1929.** On the Linear Ordinary q-Difference Equations, *Ann. Math.*, Série 2, Vol. 30, no 2, pp 195-205.

[2] **Adams C.R, 1931.** Linear q-Difference Equations, *Bull. A.M.S.*, pp 361-399.

[3] **André Y., 2001.** Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Preprint de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.*

[4] **Bézivin J.-P., 1992.** Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Mathematicae*, 43, pp. 159-176.

[5] **Birkhoff G.D. and Guenther P.E., 1941.** Note on a Canonical Form for the Linear q-Difference System, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 27, No. 4, pp. 218-222.

[6] **Di Vizio L., 2000.** Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz conjecture on p-curvatures. Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, no 286.

[7] **Katz N., 1987.** On the calculation of some differential Galois groups, *Invent. math.*, 87, pp 13-61.

[8] **Marotte F. et Zhang C., 2000.** Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 50, fasc. 6, pp. 1859-1890.

[9] **Praagman C., 1983.** The formal classification pf linear difference equations, *Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. ser. a*, 86.

[10] **van der Put M. and Singer M.F., 1997.** *Galois theory of difference equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1666, Springer Verlag.

[11] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, *Annales de Fac. des Sciences de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, pp. 53-94.

[12] **Ramis J.-P., Sauloy J. and Zhang C., 2001.** Local analytic classification of irregular q-difference equations, *Article in preparation.*

[13] **Saavedra Rivano N., 1972.** *Catégories tannakiennes*, *Lecture Notes in Mathematics*, 265, Springer Verlag.

[14] **Sauloy J., 2000.** Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 50, fasc. 4, pp. 1021-1071.

[15] **Sauloy J., 2001.** Galois theory of fuchsian q-difference equations, *Article soumis à publication.*

[16] **Sauloy J., 2002.** Local Galois theory of irregular q-difference equations, *Article en preparation.*

[17] **Zhang C., 1999.** Développements asymptotiques q-Gevrey et séries G_q-sommables, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 49, fasc. 1, pp. 227-261.

1 Polygone de Newton, factorisation, solutions

Conventions générales

Soit q un nombre complexe de module $|q| > 1$. Nous fixons $\tau \in \mathbf{C}$ tel que $q = e^{-2\imath\pi\tau}$, ce qui permettra de spécifier, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une racine k-ème de q: $q = e^{-2\imath\pi\tau/k}$. Le corps de base K est l'un des suivants:

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}(\{z\}) \subset \mathbf{C}((z)).$$

Ce qui suit s'appliquera donc en particulier aux équations rationelles, i.e. à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$. Notons que dans le cas (que nous appellerons "classique") des équations différentielles, on ne considère pas habituellement le corps de base $\mathcal{M}(\mathbf{C})$. La raison pour le traiter à part ici est la propriété des équations aux q-différences à coefficients rationnels de "propager la méromorphie".

Le corps K est muni de la valuation discrète v_0 (valuation z-adique). On notera R l'anneau de valuation correspondant (le corps résiduel est $\mathbf{C}$). Le corps K est également muni d'un automorphisme:

$$\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz).$$

On considèrera de plus une extension (L, σ_q) du "corps aux q-différences" (K, σ_q), où l'on cherchera les solutions d'équations. On supposera en particlulier que l'on peut y résoudre les équations $\sigma_q f = zf$, $\sigma_q f = cf$, $c \in \mathbf{C}^*$ et $\sigma_q f = f + 1$. Dans le cas classique, ceci produit automatiquement des fonctions multivaluées, d'où la nécessité d'agrandir le corps de base. Nous réussirons à tout faire avec des fonctions uniformes, mais σ_q "propage les pôles", ceux des solutions forment des demi-spirales logarithmiques (engendrées par $q^{\pm\mathbf{N}}$) et il nous faudra tout de même agrandir le corps de base.

- Si $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$, on prendra en général $L = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$. Les équations élémentaires seront résolues à l'aide de la fonction Θ_q de Jacobi, et des fonctions qui en dérivent: q-caractères $e_{q,c}$ et q-logarithme l_q, comme dans [14].
- Si $K = \mathbf{C}(\{z\}))$, on prendra $L = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*, 0)$, le corps des germes en 0 de fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$. Les équations élémentaires seront résolues à l'aide des germes en 0 des fonctions précédentes.
- Si $K = \mathbf{C}((z))$ ("cas formel"), L sera obtenu par adjonction de symboles permettant de résoudre les équations $\sigma_q f = zf$, $\sigma_q c = zf$ (pour tout $c \in \mathbf{C}^*$) et $\sigma_q f = f + 1$, astreints à des relations algébriques comme par exemple dans [10]. Dans ce cas, L ne sera pas nécessairement un corps.

Sous ces conditions, on constate que l'on peut en fait résoudre dans L toute équation d'ordre 1.

Les constantes de notre théorie sont les éléments invariants par σ_q. Il est facile de vérifier que le corps des constantes de K est $\mathbf{C}$ dans tous les cas. Celui de L est encore $\mathbf{C}$ dans le cas formel (*voir* [10]). Dans le cas dit "convergent" (i.e. dans les deux premiers cas), on peut vérifier qu'il s'identifie au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ des fonctions elliptiques relatif à la courbe elliptique $\mathbf{E} = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ (*voir* [14]).

On notera enfin $\mathcal{D}_q = K\left\langle \sigma, \sigma^{-1} \right\rangle$ l'algèbre de Öre des polynômes de Laurent non commutatifs, caractérisée par les relations:

$$\forall x \in K, \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \sigma^k x = \sigma_q^k(x)\sigma^k.$$

Un tel polynôme $P \in \mathcal{D}_q$ modélise donc l'opérateur aux q-différences $P(\sigma_q)$ et agit sur L. On vérifie facilement que l'anneau $\mathcal{D}_q$ est euclidien (à gauche et à droite). Soit $P = \sum\limits_{\alpha \leq i \leq \beta} a_i \sigma^i$ un élément de $\mathcal{D}_q$. On appellera *degré absolu* de P l'entier naturel $\deg(P) = \beta - \alpha$ si $a_\alpha a_\beta \neq 0$ (et $-\infty$ si $P = 0$). Il est immédiat que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. On appellera *valuation z-adique* de P l'entier $v_0(P) = \min(v_0(a_\alpha), \ldots, v_0(a_\beta))$ (donc $+\infty$ si $P = 0$). Une variante du lemme de Gauss montre que $v_0(PQ) = v_0(P) + v_0(Q)$.

1.1 Le polygone de Newton d'une équation, d'un opérateur aux q-différences

1.1.1 Equations et opérateurs

On étudie l'équation aux q-différences d'ordre $n \geq 1$:

(1) $$P.f \underset{def}{=} a_0\, \sigma_q^n f + \cdots + a_n\, f = 0\ , \quad a_0, \ldots, a_n \in K\ ,\ a_0 a_n \neq 0.$$

Dans cette équation, l'opérateur aux q-différences P est le polynôme (entier) $a_0\, \sigma^n + \cdots + a_n$ de $\mathcal{D}_q$. La fonction inconnue f est recherchée dans L.

1.1.2 Polygone de Newton

Soit $P \in \mathcal{D}_q$ comme dans l'équation (1). On définit son *polygone de Newton* $N(P)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble:

$$\{(i,j)\ /\ 0 \leq i \leq n\ ,\ a_i \neq 0\ ,\ j \geq v_0(a_i)\}.$$

La restriction aux $a_i \neq 0$ n'est d'ailleurs pas indispensable. C'est aussi, par définition, le polygone de Newton de l'équation (1).

Terminologie. -

- La frontière est formée de deux demi-droites verticales et de $k \geq 1$ vecteurs de coordonnées $(r_1, d_1), \ldots, (r_k, d_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$, et de pentes $\mu_1 = \frac{d_1}{r_1}, \ldots, \mu_k = \frac{d_k}{r_k} \in \mathbf{Q}$. On suppose celles-ci rangées par ordre croissant: $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. Les lettres r, d sont choisies par analogie avec des notions de rang et de degré (de fibrés vectoriels, par exemple). La première pente est μ_1. La pente moyenne est $\frac{d_1 + \cdots + d_k}{r_1 + \cdots + r_k} = \frac{v_0(a_n) - v_0(a_0)}{n}$.
- L'ensemble des pentes de P est $S(P) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$. La fonction de Newton de P est la fonction $r_P : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ de support $S(P)$ et telle que $\mu_i \mapsto r_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

1.1.3 Manipulations élémentaires sur les pentes

1.1.3.1 Division de P à gauche par $a \in K^*$. - Le polygone de Newton $N(P)$ subit une translation verticale $-v_0(a)$. En particulier, en ramenant le coefficient dominant à $a_0 = 1$, on cale l'origine du premier vecteur en $(0,0)$.

1.1.3.2 Ramification $z = z_l^l$, $q = q_l^l$. - Les pentes sont multipliées par l. En particulier, en prenant pour l un multiple commun des r_i (par exemple $n!$), on se ramène au cas où les pentes sont entières. Cette opération revient à une extension de corps aux q-différences, soit à une extension du corps de base de l'algèbre $\mathcal{D}_q$. Elle est donc compatible avec les opérations sur les opérateurs aux q-différences.

1.1.3.3 Changement de fonction inconnue $f = ug$. - Soit u un élément non nul de L tel que $\sigma_q u = \alpha u$, $\alpha \in K^*$. On a alors $Pf = 0 \Leftrightarrow P^{[u]} g = 0$, avec:

$$P^{[u]} \underset{def}{=} u^{-1} P u = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\sigma_q^{n-i}(u)}{u} \sigma^{n-i} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \sigma_q^i(\alpha) \right) \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\sigma_q^i(\alpha) \cdots \sigma_q^{n-1}(\alpha)} \sigma^{n-i}.$$

Les pentes de $P^{[u]}$ sont donc $\mu_1 - v_0(\alpha), \ldots, \mu_k - v_0(\alpha)$. On peut ainsi ramener une pente entière à 0: si $\mu_i \in \mathbf{Z}$, on prend $u = \Theta_q^{\mu_i}$, où Θ_q est tel que $\frac{\sigma_q \Theta_q}{\Theta_q} \in \mathbf{C}^* z$. Si l'on est dans le cas convergent, on prendra pour Θ_q la fonction Θ_q de Jacobi. Si l'on est dans le cas formel, on pourra prendre pour Θ_q un symbole (transcendant).

1.1.3.4 Symboles de transformation de jauge. - On peut remarquer que, d'après la troisième formule ci-dessus, $P^{[u]}$ peut être défini en fonction de α seul. On prouve alors directement:

- Que $P \mapsto P^{[u]}$ est un automorphisme de $\mathcal{D}_q$. Il est en effet clair qu'il est $\mathbf{C}$-linéaire, la multiplicativité peut donc être vérifiée sur le produit $(a\sigma^i).(b\sigma^j) = a\sigma_q^i(b)\sigma^{i+j}$. Notons $\pi_i(\alpha) = \frac{\sigma_q^i(u)}{u} = \alpha \cdots \sigma_q^{i-1}(\alpha)$, de sorte que:

$$\begin{aligned}
\left((a\sigma^i).(b\sigma^j)\right)^{[u]} &= a\sigma_q^i(b)\pi_{i+j}(\alpha)\sigma^{i+j} \\
(a\sigma^i)^{[u]}(b\sigma^j)^{[u]} &= (a\pi_i(\alpha)\sigma^i).(b\pi_j(\alpha)\sigma^j) \\
&= a\sigma_q^i(b)\pi_i(\alpha)\sigma_q^i(\pi_j(\alpha))\sigma^{i+j}
\end{aligned}$$

  Il s'agit donc de vérifier que $\pi_i(\alpha)\sigma_q^i(\pi_j(\alpha)) = \pi_{i+j}(\alpha)$, ce qui est immédiat (c'est un cocycle).

- Que $P^{[uv]} = \left(P^{[u]}\right)^{[v]}$. Cela se ramène, par des calculs encore plus simples, à vérifier que $\pi_i(\alpha\beta) = \pi_i(\alpha)\pi_i(\beta)$, ce qui est évident.

Nous garderons cependant la notation avec le "symbole" u, plus suggestive car elle rappelle qu'il s'agit en fait d'une transformation de jauge. La seule règle est que ces transformations agissent comme des automorphismes intérieurs.

En général, si $\alpha = cz^\mu\beta$, où $c \in \mathbf{C}^*$, $\mu \in \mathbf{Z}$ et $\beta(0) = 1$, nous prendrons $u = e_{q,c}\Theta_q^\mu v$, où $v(z) = \prod\limits_{k\geq 1} \beta(q^{-k}z)$; on vérifie en effet que $\beta \in \mathbf{K}^*$.

1.1.4 Equation caractéristique, exposants

On suppose ici que $S(P) \subset \mathbf{N}$. On va définir l'équation caractéristique et les exposants attachés à la i-ème pente $\mu = \mu_i$ de P. D'après 1.1.3.3, la i-ème pente de $P^{[\Theta_q^\mu]} = a'_0\sigma^n + \cdots + a'_n$ vaut 0. Il existe donc des indices $\alpha < \beta$ tels que, notant $l = v_0(P^{[\Theta_q^\mu]})$:

$$\begin{cases}
v_0(a'_\alpha) = v_0(a'_\beta) = l \\
\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ , \ v_0(a'_i) \geq l \\
\forall i \in \{0, \ldots, \alpha - 1\} \cup \{\beta + 1, \ldots, n\} \ , \ v_0(a'_i) > l
\end{cases}$$

On a donc $r_i = \beta - \alpha$. On introduit: $Q = z^{-l}P^{[\Theta_q^\mu]} = b_0\sigma^n + \cdots + b_n$, dont les coefficients sont donc dans l'anneau de valuation R. Plus précisément, en posant:

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &\underset{def}{=} b_0(0)\ \sigma^n + \cdots + b_n(0) \\
&= b_\alpha(0)\ \sigma^{n-\alpha} + \cdots + b_\beta(0)\ \sigma^{n-\beta} \\
&\in \mathbf{C}[\sigma, \sigma^{-1}]
\end{aligned}$$

(qui est donc un polynôme commutatif), on a $Q \equiv \overline{Q} \pmod{zR\langle\sigma,\sigma^{-1}\rangle}$. L'équation $\overline{Q} = 0$ et le polynôme $\overline{Q}$ lui-même sont appelés *équation caractéristique* attachée à la pente μ de P. On notera celle-ci $\overline{P}^{(\mu)}$, ou simplement $\overline{P}$ dans le cas de la pente $\mu = 0$. Si $\mu \notin S(P)$, l'équation caractéristique est une constante non nulle. En général:

$$\overline{P}^{(\mu)} = \left(z^{-v_0(P^{[\Theta_q^\mu]})}P^{[\Theta_q^\mu]}\right)_{z=0}.$$

On voit donc, dans tous les cas, que $r_P(\mu)$ est égal au degré absolu de l'équation caractéristique $\deg(\overline{P}^{(\mu)})$.

1.1.4.1 Lemme. - *L'équation caractéristique est multiplicative:*

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{D}_q \ , \ \forall \mu \in \mathbf{Q} \ , \ \overline{P_1P_2}^{(\mu)} = \overline{P_1}^{(\mu)}\overline{P_2}^{(\mu)}.$$

En effet, c'est une conséquence immédiate des propriétés de la valuation et du degré absolu dans $\mathcal{D}_q$ et de 1.1.3.4. □

1.1.4.2 Théorème. - *Le polygone de Newton est additif. Précisément, P_1 et P_2 étant des opérateurs aux q-différences comme ci-dessus: $r_{P_1 P_2} = r_{P_1} + r_{P_2}$, ce que l'on notera aussi $N(P_1P_2) = N(P_1) + N(P_2)$.*

On le déduit du lemme 1.1.4.1 et du fait que $r_P(\mu) = \deg(\overline{P}^{(\mu)})$. □

Les racines non nulles de l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P sont appelés les *exposants* attachés à cette pente. Tout complexe non nul s'écrit de manière unique:

$$c = q^{\epsilon(c)}\overline{c} \quad \text{avec} \quad \epsilon(c) \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq |c| < |q|.$$

Nous identifierons $\overline{c}$ à la classe de c modulo $q^{\mathbf{Z}}$. Nous dirons qu'un exposant c attaché à la pente μ est *non résonnant* si $\epsilon(c)$ est maximal pour sa classe de congruence, autrement dit, si aucun cq^l, $l \in \mathbf{N}^*$, n'est un exposant (attaché à cette pente).

1.1.4.3 Manipulations élémentaires sur l'équation caractéristique et sur les exposants. - Les propriétés suivantes découlent immédiatement de 1.1.3 et de de 1.1.4.1.

1. Si $\sigma_q u = z^l u$, l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P est égale à l'équation caractéristique attachée à la pente $\mu - l$ de $P^{[u]}$.
2. Si $\sigma_q u = cu$, $c \in \mathbf{C}^*$, et si l'on note $\overline{Q}(\sigma)$ l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P, l'équation caractéristique attachée à la pente μ de $P^{[u]}$ est $\overline{Q}(c\sigma)$. On peut donc toujours ramener un exposant donné à 1 par une telle transformation de jauge. Dans le cas convergent, cette transformations de jauge sera réalisée en prenant pour u un q-caractère $e_{q,c}$.
3. Dans ce dernier cas, quitte à utiliser encore une transformation de jauge avec $u = z^l$, $l \in \mathbf{Z}$, on peut même supposer 1 non résonnant.

1.2 Factorisations formelle et convergente d'un opérateur aux q-différences

1.2.1 Facteur droit associé à un exposant non résonnant

On commence par supposer que 0 est une pente de P et que 1 est un exposant non résonnant.

1.2.1.1 Lemme. - *L'équation (1) admet alors une unique solution série formelle f telle que $f(0) = 1$.*

La preuve est un calcul. On suppose $N(P)$ calé de sorte que la pente nulle soit sur l'axe des abcisses, de sorte que les coefficients a_i ont un développement en série:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ , \ a_i = \sum_{j \geq 0} a_{i,j} z^j.$$

L'équation caractéristique attachée à la pente 0 est donc égale à $\overline{P} = a_{0,0} \ \sigma^n + \cdots + a_{n,0}$. On écrit $f = \sum\limits_{m \geq 0} f_m z^m$ l'inconnue. Alors:

$$P.f = \sum_{l \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{l} F_{l-m}(q^m) f_m \right) z^l,$$

où l'on a posé:

$$F_j(X) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,j} X^i.$$

Ce polynôme est constitué des coefficients qui contribuent à la tranche d'ordonnée j dans l'intérieur du polygone de Newton. Ainsi $F_0 = \overline{P}$, d'où $F_0(1) = 0$ et $F_0(q^m) \neq 0$ pour $m \geq 1$ (puisque 1 est exposant non résonnant). On trouve les coefficients par récurrence en identifiant $P.f$ à 0. Comme $F_0(1) = 0$, f_0 est arbitraire et, comme $F_0(q^m) \neq 0$ pour $m \geq 1$, les f_m sont déterminés inductivement de manière unique. $\square$

1.2.1.2 Lemme. - *Soit maintenant c un exposant non résonnant quelconque, de multiplicité $m \geq 1$. On a alors une factorisation:*

$$P = Q.(\sigma - c).u_m^{-1} \cdots (\sigma - c).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des séries formelles telles que $u_i(0) = 1$. De plus, le polygone de Newton de Q s'obtient en diminuant de m la longueur de la pente horizontale de celui de P: $r_Q = r_P - m\delta_0$, et les équations caractéristiques correspondantes vérifient: $\overline{P} = (X - c)^m \overline{Q}$

On traite d'abord le cas où $c = 1$. Soit $u_1 = f$, la série formelle obtenue au lemme 1.2.1.1.. L'opérateur aux q-différences P admet une factorisation:

$$P = P_1.(\sigma - 1).u_1^{-1},$$

où l'on a posé:

$$P_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \left(- \sum_{i=0}^{j} a_{n-i} \ \sigma_q^i(u_1) \right) \sigma^j.$$

Le polygone de Newton de P_1 s'obtient en diminuant de 1 la longueur de la pente horizontale de celui de P: $r_Q = r_P - \delta_0$, et les équations caractéristiques correspondantes vérifient: $\overline{P} = (X - 1)\overline{P_1}$. Il suffit alors d'itérer le processus pour obtenir la factorisation:

$$P = Q.(\sigma - 1).u_m^{-1} \cdots (\sigma - 1).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des séries formelles telles que $u_i(0) = 1$. De plus, le polygone de Newton de Q s'obtient en diminuant de m la longueur de la pente horizontale de celui de P, autrement dit, en utilisant le symbole de Kronecker, $r_Q = r_P - m\delta_0$. Les équations caractéristiques correspondantes vérifient: $\overline{P} = (X-1)^m \overline{Q}$.

Dans le cas d'un exposant c quelconque (non résonnant), soit u un symbole de transformation de jauge tel que $\sigma_q u = cu$ (par exemple $e_{q,c}$ dans le cas convergent). Alors $P^{[u]}$ vérifie les hypothèses du premier cas. On écrit donc:

$$P^{[u]} = R.(\sigma - 1).u_m^{-1} \cdots (\sigma - 1).u_1^{-1}.$$

On applique à cette égalité la transformation de jauge de symbole u^{-1}, qui commute au produit, qui n'affecte pas les fonctions u_i et qui transforme $\sigma - 1$ en $c^{-1}\sigma - 1$. On obtient alors la factorisation voulue en prenant $Q = c^{-m} R^{[u^{-1}]}$. Le reste suit.

□

1.2.1.3 Proposition. - *Soit μ une pente entière de P. Soit c un exposant non résonnant attaché à la pente μ, de multiplicité m. On a alors une factorisation:*

$$P = Q.(z^{-\mu}\sigma - c).u_m^{-1} \cdots (z^{-\mu}\sigma - c).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des séries formelles telles que $u_i(0) = 1$. De plus, le polygone de Newton de Q s'obtient en diminuant de m la longueur de la pente de valeur μ de celui de P: $r_Q = r_P - m\delta_\mu$, et les équations caractéristiques correspondantes vérifient: $\overline{P}^{(\mu)} = (X - c)^m \overline{Q}^{(\mu)}$.

Soit u un symbole de transformation de jauge tel que $\sigma_q u = z^\mu u$ (par exemple $\Theta_q^\mu(-z/q)$ dans le cas convergent). Alors $P^{[u]}$ vérifie les hypothèses du lemme 1.2.1.2. On écrit donc:

$$P^{[u]} = R.(\sigma - c).u_m^{-1} \cdots (\sigma - c).u_1^{-1}.$$

On applique à cette égalité la transformation de jauge de symbole u^{-1}, et l'on applique 1.1.4.3. □

1.2.2 Factorisation formelle d'un opérateur aux q-différences

Il y a divers énoncés possibles, en voici un:

1.2.2.1 Proposition. - *Soit μ une pente entière de P. Soient $c_1, \ldots, c_p$ les exposants attachés à la pente μ, et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que, si $\frac{c_j}{c_i} = q^l$, $l \in \mathbf{N}^*$, alors $i < j$ (les exposants les moins résonnants sont factorisés les premiers). On a alors une factorisation $P = QR$, où $\mu \notin S(Q)$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,1}^{-1},$$

les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$. On, de plus, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p} (X - c_i)^{m_i}$.

On peut donner des conditions plus souples. Pour la résolution (formelle ou convergente), il sera au contraire commode d'être plus rigide et de considérer une classe d'exposants à la fois (modulo $q^{\mathbf{Z}}$):

1.2.2.2 Proposition. - *Soit μ une pente entière de P. Soient $c_1, \ldots, c_p$ les exposants d'une même classe modulo $q^{\mathbf{Z}}$ attachés à la pente μ, et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que $\epsilon(c_1) < \cdots < \epsilon(c_p)$ (les exposants les moins résonnants sont factorisés les premiers). On a alors une unique factorisation $P = QR$, où aucun exposant attaché à la pente μ de Q n'est congru aux c_i modulo $q^{\mathbf{Z}}$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,1}^{-1},$$

les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$. On, de plus, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p} (X - c_i)^{m_i}$.

Pour prouver l'une ou l'autre proposition, il suffit de rassembler les morceaux. □

1.2.3 Factorisation convergente d'un opérateur aux q-différences

Les résultats qui précèdent, ainsi que leur application à la résolution formelle (au 1.3) sont dus à Adams. Mais l'énoncé le plus caractéristique de la théorie, le *lemme d'Adams*, est l'existence de *solutions convergentes associées à la première pente* ([1], [2]). Il se prouve le plus aisément via la factorisation analytique. Un procédé analogue figure dans [5]. Ces énoncés ont été exhumés après un long sommeil par Changgui Zhang, voir [8] et [17], où l'on trouvera également des variantes des formulations ci-dessous.

Nous prenons ici pour corps de base $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$ ou $K = \mathbf{C}(\{z\})$. Nous dirons alors qu'une série (resp. une factorisation) est *convergente* si elle définit un élément de K (resp. si tous les facteurs sont à coefficients dans K).

1.2.3.1 Lemme. - *On reprend d'abord les hypothèses du lemme 1.2.1.1, en supposant de plus que* 0 *est la première pente, i.e. la plus petite. La série formelle f obtenue comme solution est alors convergente.*

Nous commençons par le cas où $K = \mathbf{C}(\{z\})$. Avec les conventions de 1.2.1.1, la première pente vaut 0, les suivantes sont > 0 et:

$$\begin{cases} \deg \overline{P} = \deg F_0 = n \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \ , \ \deg F_j \leq n \end{cases}$$

Ce qui suit est alors une application de la méthode des séries majorantes. Des conditions sur les degrés et du fait qu'aucun $F_0(q^l)$, $l \geq 1$ ne s'annule, on tire:

$$\exists A > 0 \ : \ \forall l \in \mathbf{N}^* \ , \ \left|F_0(q^l)\right| \geq A|q|^{ln}.$$

De la convergence des coefficients $a_0, \ldots, a_n$, on tire:

$$\exists B, C > 0 \ : \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \forall j \in \mathbf{N} \ , \ |a_{i,j}| \leq BC^j,$$

d'où l'on déduit (avec la condition sur les degrés):

$$\forall j \in \mathbf{N}^*, \forall l \in \mathbf{N} \ , \ \left|F_j(q^l)\right| \leq (n+1)BC^j|q|^{ln}.$$

Il vient, pour $l \geq 1$:

$$|f_l| \leq \frac{(n+1)B\left(C|q|^{(l-1)n}|f_{l-1}| + \cdots + C^l|q|^{(l-l)n}|f_0|\right)}{A|q|^{ln}}.$$

On pose $g_l = \frac{|q|^{ln}|f_l|}{C^l}$ et $D = \frac{(n+1)B}{A}$, et l'on a:

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ \forall l \geq 1 \ , \ g_l \leq D(g_0 + \cdots + g_{l-1}) \end{cases}$$

On montre alors par récurrence que $g_l \leq (D+1)^l$, d'où:

$$\forall l \geq 0 \ , \ |f_l| \leq \left(\frac{C(D+1)}{|q|^n}\right)^l.$$

On a donc bien $f \in \mathbf{C}(\{z\})$.

Supposons maintenant que $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$. Nous appliquons le principe, également caractéristique des équations aux q-différences, selon lequel "l'équation fonctionnelle propage la méromorphie". Nous réécrivons l'équation (1) sous la forme:

$$f(z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(q^{-n}z)}{a_0(q^{-n}z)} f(q^{-i}z).$$

Si f est définie et méromorphe dans un disque de centre 0 et de rayon $r > 0$, et qu'elle y vérifie cette équation, la même formule permet de la prolonger en une fonction méromorphe sur le disque de centre 0 et de rayon qr, qui y vérifie la même équation. On obtient ainsi (puisque $|q| > 1$) un prolongement à $\mathbf{C}$ tout entier. □

1.2.3.2 Lemme. - *On reprend les hypothèses de 1.2.1.2, en supposant de plus que μ est la première pente. Les factorisations obtenues sont convergentes.*

En effet, seul le calcul de P_1 dans la première étape est non formel, et il est clair qu'il fournit un polynôme en σ à coefficients convergents. □

1.2.3.3 Théorème (lemme d'Adams). - *On reprend les hypothèses de 1.2.2, en supposant de plus que μ est la première pente. Les factorisations obtenues en 1.2.2.1 et 1.2.2.2 sont convergentes.*

Encore une fois, il suffit de rassembler les morceaux. □

1.2.3.4. Remarque. - Le rayon de convergence garanti par la preuve de 1.2.3.1 est $\frac{|q|}{C(D+1)}$: le numérateur dépend de q seul, le dénominateur de l'équation seule.

1.3 Solutions formelles et convergentes d'une équation aux q-différences

Dans toute cette section, les pentes μ seront des entiers. D'après ce qui précède, nous sommes conduits à nous intéresser à l'équation avec second membre:

$$z^{-\mu}\sigma_q f - cf = g$$

laquelle se ramène, après transformation de jauge de symbole $\Theta_q^\mu e_{q,c}$, à l'équation:

$$\sigma_q f - f = g.$$

Si l'on adopte l'analogie habituelle avec le cas différentiel:

$$\frac{\sigma_q - 1}{q-1} \longleftrightarrow z\frac{d}{dz},$$

on est conduit à considérer cette résolution comme une *q-intégration.* Comme dans le cas différentiel, la constante 1 n'est pas q-intégrable et nécessite l'introduction du q-logarithme.

1.3.1 q-intégration

Soit π_0 le projecteur du $\mathbf{C}$ espace vectoriel $\mathbf{C}((z))$ qui associe à toute série de Laurent formelle son terme constant. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ et $\mathbf{C}(\{z\})$ sont stables, d'où, quelque soit le corps K, une décomposition:

$$K = \mathbf{C} \oplus K^\bullet.$$

L'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - 1$ de K est nul sur la premiìe composante et laisse stable la seconde.

1.3.1.1 Lemme. - *Il induit un automorphisme de $K^\bullet$.*

En effet, on peut poser (dans $\mathbf{C}((z))^\bullet$):

$$I_q\left(\sum_{i\neq 0} a_i z^i\right) = \sum_{i\neq 0} \frac{a_i}{q^i - 1} z^i,$$

définissant un inverse. Il est clair qu'il préserve, le cas échéant, la méromorphie près de 0 ou sur $\mathbf{C}$. □

On introduit donc maintenant un élément l_q de L tel que $\sigma_q l_q = l_q + 1$ (voir en 1.1 les conventions générales). On note de plus, pour tout entier naturel k:

$$l_q^{(k)} = \binom{l_q}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(l_q - i),$$

et $l_q^{(k)} = 0$ pour $k < 0$, de sorte que (calcul facile):

$$\forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \sigma_q l_q^{(k)} = l_q^{(k)} + l_q^{(k-1)}.$$

1.3.1.2 Lemme. - *Les $l_q^{(k)}$, $k \geq 0$, sont linéairement indépendants sur K; autrement dit, l_q est transcendant et :*

$$K[l_q] = \bigoplus_{k\geq 0} K l_q^{(k)}.$$

Soit en effet une relation:

$$l_q^{(k+1)} = a_0\, l_q^{(0)} + \cdots + a_k\, l_q^{(k)}, \quad \text{les } a_i \in K,$$

avec $k \geq 0$ le plus petit possible; il est donc en fait ≥ 1 puisque $l_q \notin K$. En appliquant $\sigma_q - 1$, à cette relation, on trouve:

$$l_q^{(k)} \equiv (\sigma_q a_k - a_k) l_q^{(k)} \pmod{K l_q^{(0)} + \cdots + K l_q^{(k-1)}}.$$

Par minimalité, on en déduit que $\sigma_q a_k - a_k = 1$, ce qui est impossible. □

1.3.1.3 Proposition. - *On a, pour tout entier naturel non nul k, une suite exacte:*

$$0 \to \mathbf{C} \to K_k[l_q] \xrightarrow{\sigma_q - 1} K_{k-1}[l_q] \to 0.$$

Ecrivons $f = f_0 l_q^{(0)} + \cdots + f_k l_q^{(k)}$ et $g = g_0 l_q^{(0)} + \cdots + g_{k-1} l_q^{(k-1)}$ des éléments respectifs de $K_k[l_q]$ et de $K_{k-1}[l_q]$. Par identification, l'équation $(\sigma_q - 1)f = g$ équivaut à:

$$\forall i \geq 0 \ , \ g_i = \sigma_q f_i - f_i + \sigma_q f_{i+1}.$$

La résoudre revient à résoudre le système:

$$\begin{cases} \sigma_q f_0 - f_0 + \sigma_q f_1 = g_0 \\ \vdots \\ \sigma_q f_i - f_i + \sigma_q f_{i+1} = g_i \\ \vdots \\ \sigma_q f_{k-1} - f_{k-1} + \sigma_q f_k = g_{k-1} \\ \sigma_q f_k - f_k = 0 \end{cases}$$

On voit, en commençant par le bas, que $f_k \in \mathbf{C}$ et même (avant-dernière équation) que c'est nécessairement $\pi_0(g_{k-1})$. On a alors la résolution itérative:

$$\begin{array}{rcl} f_k & = & \pi_0(g_{k-1}) \\ & \vdots & \\ f_i & = & \pi_0(g_{i-1}) + I_q(g_i - \sigma_q f_{i+1}) \\ & \vdots & \\ f_0 & = & \text{une constante arbitraire } + I_q(g_0 - \sigma_q f_1) \end{array}$$

□

1.3.2 Equations d'ordre 1 avec second membre

On se restreint dorénavant à la sous-algèbre S de L engendrée par les fonctions élémentaires:

$$S = K[\Theta_q, \Theta_q^{-1}, (e_{q,c})_{q \in \mathbf{C}^*}, l_q].$$

Notons temporairement $C(S)$ l'ensemble des caractères:

$$C(S) = \{u \in S - \{0\} \ / \ \exists c \in \mathbf{C}^* \ : \ \sigma_q u = cu\}.$$

On a une décomposition [1] :

$$S = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}} S_\mu, \quad \text{où} \quad S_\mu = \sum_{u \in C(S)} u \Theta_q^\mu K[l_q].$$

[1] Cette décomposition possède d'intéressantes propriétés algébriques, partiellement abordées dans [10] (cas formel) et [14] (cas convergent).

La formule, immédiatement vérifiée:

$$(dz^\nu\sigma - 1)(ue_{q,c}\Theta_q^\mu F) = ue_{q,c}\Theta_q^\mu(cd\sigma^{\mu+\nu}\sigma - 1)F$$

montre que l'endomorphisme $\Phi_{d,\nu} = dz^\nu\sigma - 1$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel S laisse stable chaque sous-espace $u\Theta_q^\mu K[l_q]$. De plus, l'isomorphisme $F \mapsto u\Theta_q^\mu F$ de $K[l_q]$ dans $u\Theta_q^\mu K[l_q]$ conjugue l'action de $\Phi_{cd,\mu+\nu}$ sur le premier avec l'action de $\Phi_{d,\nu}$ sur le deuxième. Notre but, dans ce paragraphe, est de préciser l'image et le noyau de ces endomorphismes.

1.3.2.1 Lemme. - *Soit $(c,\mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$. Il est clair que K est stable par $\Phi_{c,\mu}$.*
(i) Si $(\overline{c},\mu) \neq (1,0)$, la restriction de $\Phi_{c,\mu}$ à K est injective.
(ii) Elle est de plus surjective dans chacun des cas suivants:

1. *$\mu = 0$ et $\overline{c} \neq 1$.*
2. *$\mu < 0$.*
3. *$\mu > 0$ et $K = \mathbf{C}((z))$.*

Si $\mu = 0$, écrivant $f = \sum\limits_{k>>-\infty} f_k z^k$ et $g = \sum\limits_{k>>-\infty} g_k z^k$, on obtient l'équivalence:

$$(c\sigma - 1)f = g \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ (cq^k - 1)f_k = g_k,$$

qui suffit à montrer (i) et (ii) dans ce cas (c'est l'hypothèse $\overline{c} \neq 1$ qui garantit que $cq^k - 1$ ne s'annule pas).

Si $\mu \neq 0$, posons $\mu = m\epsilon$, avec $m = |\mu|$ et $\epsilon = \pm 1$. La décomposition:

$$\mathbf{C}((z)) = \bigoplus_{0 \leq i < m} z^i \mathbf{C}((z^m))$$

induit des décompositions similaires de $\mathbf{C}(\{z\})$ et de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$. La formule (facile à vérifier):

$$(cz^\mu\sigma - 1)z^i F(z^m) = z^i(cq^i z^{m\epsilon} F(q^m z^m) - F(z^m))$$

montre que chaque composante est stable. Ecrivant alors $Z = z^m$, $Q = q^m$, $C = cq^i$, $f(z) = z^i F(z^m)$ et $g(z) = z^i G(z^m)$, on obtient l'équivalence:

$$(cz^\mu\sigma - 1)f = g \Leftrightarrow CZ^\epsilon F(QZ) - F(Z) = G(Z).$$

Autrement dit, on s'est ramené au cas où $\mu = \pm 1$, ce que l'on suppose maintenant. On reprend les notations $f = \sum\limits_{k>>-\infty} f_k z^k$ et $g = \sum\limits_{k>>-\infty} g_k z^k$.

Si $\mu = -1$, on obtient les équivalences:

$$\begin{aligned}(cz^{-1}\sigma - 1)f = g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ cq^{k+1} f_{k+1} - f_k = g_k \\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ c^{k+1} q^{k(k+1)/2} f_{k+1} - c^k q^{k(k-1)/2} f_k = c^k q^{k(k-1)/2} g_k \\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ c^k q^{k(k-1)/2} f_k = \sum_{i<k} c^i q^{i(i-1)/2} g_i\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Phi_{c,-1}$ est bijectif dans le cas formel. Dans le cas convergent, la relation

$$|c^k f_k| \leq \sum_{i<k} |c^i g^i|$$

entraine que la série $f(cz)$ est dominée par la série $\frac{g(cz)}{1-z}$, ce qui conclut encore.

Si $\mu = +1$, on obtient les équivalences:

$$\begin{aligned}
(cz\sigma - 1)f = g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ cq^{k-1}f_{k-1} - f_k = g_k \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \frac{f_{k-1}}{(c/q)^{k-1}q^{k(k-1)/2}} - \frac{f_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} = \frac{g_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \frac{f_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} = -\sum_{i<k} \frac{g_i}{(c/q)^i q^{i(i+1)/2}}
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Phi_{c,1}$ est bijectif dans le cas formel. □

Dans le cas convergent avec $\mu > 0$, on ne peut pas en général conclure, les coefficients f_k pouvant être très rapidement croissants. Par exemple, si $c = 1$ et $g = -1$, on trouve, pour $k > 0$, $f_k = q^{k(k-1)/2}$. C'est un q-analogue de la série d'Euler.

On va maintenant étudier l'action de $\Phi_{c,\mu}$ sur $K[l_q]$. Le cas où $(c, \mu) = (1, 0)$ a fait l'objet du 1.3.1. Le cas où $(\overline{c}, \mu) = (1, 0)$ s'y ramène car l'automorphisme $F \mapsto z^l F$ de $K[l_q]$ conjugue $\Phi_{c,\mu}$ avec $\Phi_{q^l c,\mu}$.

1.3.2.2 Corollaire. - *On suppose $(\overline{c}, \mu) \neq (1, 0)$. Les conclusions sont les mêmes: la restriction de $\Phi_{c,\mu}$ à $K[l_q]$ est injective; elle est de plus surjective, sauf dans le cas convergent si $\mu > 0$.*

Ecrivant $f = \sum_{i \geq 0} f^{(i)} l_q^{(i)}$ et $g = \sum_{i \geq 0} g^{(i)} l_q^{(i)}$ (qui sont des sommes finies), on obtient l'équivalence:

$$(cz^\mu \sigma - 1)f = g \Leftrightarrow \forall i \geq 0\ ,\ (cz^\mu \sigma - 1)f^{(i)} = g^{(i)} - cz^\mu \sigma_q f^{(i+1)}.$$

Ce système se résoud itérativement, en commençant par la fin, à l'aide du lemme 1.3.2.1. □

1.3.2.3 Corollaire. - *On considère la restriction de $\Phi_{d,\nu}$ à $u\Theta_q^\mu K[l_q]$, où $\sigma_q u = cu$.*
(i) Si $cd = q^l, l \in \mathbf{Z}$, et si $\mu + \nu = 0$, cet endomorphisme est surjectif de noyau $\mathbf{C}u\Theta_q^\mu z^{-l}$.
(ii) Si $\overline{cd} \neq 1$ et $\mu + \nu = 0$, ou bien si cd est quelconque et $\mu + \nu < 0$, l'endomorphisme est bijectif.
(iii) Même conclusion dans le cas formel si $\mu + \nu > 0$.

C'est immédiat par conjugaison (voir le début de 1.3.2). □

Nous synthétisons maintenant les résultats les plus importants:

1.3.2.4 Théorème. - *L'endomorphisme $\Phi_{d,\nu}$ de S_μ est surjectif si $\mu + \nu \leq 0$, et aussi si $\mu + \nu > 0$ dans le cas formel.* □

1.3.3 Résolution formelle

1.3.3.1 Définition. - *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des éléments de L. Leur q-Wronskien, ou Casoratien, ou Pochhammerien est:*

$$W_q(f_1, \ldots, f_m) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_j & \ldots & f_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_q^i f_1 & \ldots & \sigma_q^i f_j & \ldots & \sigma_q^i f_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_q^{m-1} f_1 & \ldots & \sigma_q^{m-1} f_j & \ldots & \sigma_q^{m-1} f_m \end{pmatrix}$$

Rappelons que l'ensemble $C = L^{\sigma_q}$ des constantes de L en est un sous-corps. Dans ces conditions, on a le:

1.3.3.2 Lemme. - *Le q-Wronskien $W_q(f_1, \ldots, f_m)$ est non nul si et seulement si les f_i sont linéairement indépendants sur C.*

La preuve est donnée dans [6]. □

Si les f_i sont solutions d'une équation aux q-différences, nous dirons simplement dans ce cas que ces solutions sont indépendantes. Notre but est de construire une famille maximale de solutions indépendantes de l'équation (1).

1.3.3.3 Lemme. - *Le nombre de solutions indépendantes de (1) ne peut excéder n, l'ordre de l'équation.*

Soient en effet $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des solutions de (1). Les lignes $L_i = (\sigma_q^i f_1, \ldots, \sigma_q^i f_{n+1})$ sont alors liées par la relation $a_0 L_n + \cdots + a_n L_0$ et l'on conclut grâce au lemme 1.3.3.2. □

1.3.3.4 Théorème. - *Dans le cas formel, on peut construire n solutions indépendantes.*

La preuve se fait par récurrence sur l'ordre de l'opérateur P; l'algorithme correspondant est récursif. On exploite naturellement les résultats sur la factorisation de 1.2 et ceux sur les équations du premier ordre avec second membre de 1.3.1.

Si $n = 1$, on peut écrire $P = a(z^{-\mu}\sigma - c)u^{-1}$, et $ue_{q,c}\Theta_q^\mu$ est une solution non nulle.

Si P est d'ordre $n = m + 1 \geq 2$, on écrit $P = a(z^{-\mu}\sigma - c)u^{-1}Q$, où Q est d'ordre m. Par hypothèse de récurrence, il y a m solutions indépendantes $f_1, \ldots, f_m$ de Q. D'après le théorème 1.3.2.4, il existe $f \in L$ tel que $Qf = ue_{q,c}\Theta_q^\mu$. Il est clair que $f, f + f_1, \ldots, f + f_m$ sont solutions de P.

Par multilinéarité alternée du déterminant le q-Wronskien de $f, f + f_1, \ldots, f + f_m$ est égal à celui de $f, f_1, \ldots, f_m$. On manipule les lignes de ce dernier on remplace L_m par $b_0 L_m + \cdots + b_m L_0$, 0ù $Q = b_0\sigma^m + \cdots + b_m$. Cela multiplie le déterminant par b_0. Mais cela remplace aussi la dernière ligne par $(Qf, Qf_1, \ldots, Qf_m) = (Qf, 0, \ldots, 0)$. Le coefficient Qf vaut $ue_{q,c}\Theta_q^\mu$ et son cofacteur est le q-wronskien de $(f_1, \ldots, f_m)$. On obtient ainsi la formule:

$$W_q(f, f + f_1, \ldots, f + f_m) = \frac{1}{b_0} ue_{q,c}\Theta_q^\mu W_q(f, f_1, \ldots, f_m).$$

Il est donc non nul, ce qui achève la preuve. □

1.3.4 Résolution analytique

On se place ici dans le cas convergent. Si l'on reprend la factorisation $P = a(z^{-\mu}\sigma - c)u^{-1}Q$ exploitée en 1.3.3, on constate que l'on n'a la garantie d'une factorisation convergente que si toutes les pentes de Q sont $\leq \mu$ (1.2.3). Mais, si l'une d'elles est $< \mu$, le théorème 1.3.2.4 ne s'applique pas. Ainsi, la méthode de 1.3.3 ne s'applique à la résolution convergente que si $S(P) = \{\mu\}$, autrement dit, si P est *pur*. On ne peut donc espérer trouver n solutions indépendantes en général.

1.3.4.1 Théorème (Adams). - *Soit μ_1 la première pente de P. L'équation (1) admet alors $r_P(\mu_1)$ solutions convergentes indépendantes.*

On déduit en effet de 1.3.3 une factorisation $P = QR$ avec R pur de pente μ_1 et de d'ordre $r_P(\mu_1)$. On applique alors à R la méthode de 1.3.3 (on est dans la cas (i) du théorème 1.3.2.4). □

1.3.4.2 Exercice. - Traiter le cas de $(\sigma - 1)(z\sigma - 1)$ et celui de $(z\sigma - 1)(\sigma - 1)$.

2 Polygone de Newton d'un module aux q-différences

2.1 Equations, systèmes, modules

2.1.1 Les objets

Nous décrivons ici différents modèles de l'équation aux q-différences scalaire d'ordre n et leurs relations.

2.1.1.1 Des équations aux systèmes et des systèmes aux modules aux q-différences. -

1. Soit f la fonction inconnue de l'équation (1) (cf. 1.1.1). On peut supposer, et l'on suppose, que $a_0 = 1$. On note:
$$X_f = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix}.$$
Alors f est solution de l'équation (1) si et seulement si X_f est solution de l'équation (ou système) linéaire de rang n:
$$\sigma_q X = AX, \tag{2}$$
où l'inconnue X est un vecteur et où la matrice du système est:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in GL_n(K).$$
Il découlera réciproquement du lemme du vecteur cyclique (cf. *infra* 2.1.1.2 et 2.1.4.3) que tout système (2) est *équivalent* (au sens expliqué plus loin) à un système provenant d'une équation scalaire (1).

2. On peut écrire l'équation (2) sous forme d'équation au point fixe: $\Phi_A(X) = X$, où l'on a défini $\Phi_A : X \mapsto A^{-1}(\sigma_q X)$. L'opérateur Φ_A est *σ_q-linéaire* autrement dit, il est additif et $\forall \lambda, X$: $\Phi_A(\lambda X) = \sigma_q(\lambda)\Phi_A(X)$.

   Ceci conduit à définir un *module aux q-différences* sur le corps aux q-différences (K, σ_q) comme un couple (M, Φ), où M est un K-espace vectoriel de dimension finie et Φ un automorphisme σ_q-linéaire de M. Par le choix d'une base de M, tout tel module s'identifie à un module de la forme (K^n, Φ_A) avec $A \in GL_n(K)$.

   Sur toute extension (K', σ'_q) de (K, σ_q), on peut définir un module aux q-différences (M', Φ') obtenu par extension des scalaires: sur $M' = K' \otimes_K M$, on pose $\Phi'(a \otimes x) = \sigma'_q(a) \otimes \Phi(x)$. Les solutions de (2) à valeurs dans l'extension (K', σ'_q) sont alors les points fixes de Φ' dans M' [2].

3. De même qu'un couple (V, ϕ) formé d'un K-espace vectoriel V et d'un endomorphisme (resp. d'un automorphisme) K-linéaire ϕ de V peut être considéré comme un module sur l'anneau principal $K[X]$ (resp. $K[X, X^{-1}]$), de même un module aux q-différences (M, Φ) peut être considéré comme un module *à gauche* sur l'anneau $\mathcal{D}_q$ (cf. les conventions générales au début de 1): si $P = \sum a_i \sigma^i \in \mathcal{D}_q$ et $x \in M$, on pose $P.x = \sum a_i \Phi^i(x)$. Le fait que $\dim_K(M) < \infty$ équivaut au fait que le $\mathcal{D}_q$-module M est de longueur finie. Les modules aux q différences sont donc exactement les $\mathcal{D}_q$-modules

[2] Cette représentation est analogue à la représentation des solutions du système différentiel $X' = AX$ comme éléments du noyau de la connexion $\Delta : X \mapsto X' - AX$. La semi-linéarité correspond à la formule de Leibnitz.

à gauche de longueur finie. On verra plus loin comment interpréter dans ce modèle la notion de solution.

Par abus de langage, on appellera *rang* d'un $\mathcal{D}_q$-module à gauche de longueur finie la dimension du K-espace vectoriel sous-jacent, c'est à dire le rang du module aux q-différences correspondant.

Soit $F \in GL_n(K)$. Si l'on pose $X = FY$ dans (2), on est conduit à une équation $\sigma_q Y = BY$, avec $B = (\sigma_q F)^{-1} AF$, que l'on considèrera comme équivalente à (2). On notera en conséquence $A \sim (\sigma_q F)^{-1} AF$. Cela équivaut à l'isomorphie des $\mathcal{D}_q$-modules associés (voir la description intrinsèque des morphismes en 2.1.2).

A titre d'exemple, si l'on part de l'équation d'ordre 1: $\sigma_q f = af$, $a \in K^*$, on obtient le module $(K, a^{-1}\sigma_q)$. C'est aussi le $\mathcal{D}_q$-module monogène $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, où $P = \sigma - a^{-1}$. On voit facilement que tout module de rang 1 est de cette forme (donc provient bien d'une équation). De plus, l'équation $\sigma_q f = af$ est équivalente à l'équation $\sigma_q f = bf$ si et seulement si $\exists u \in K^* \ : \ \frac{b}{a} = \frac{\sigma_q(u)}{u}$.

2.1.1.2 Lemme du vecteur cyclique. - *Soit (M, Φ) un module aux q-différences de rang n sur K. Alors il existe $x \in M$ tel que $(x, \Phi(x), \ldots, \Phi^{n-1}(x))$ est une base de M.*

Une preuve analytique, due à Birkhoff, est donnée dans [14] et une preuve algébrique plus générale, inspirée de Katz, est donnée dans [6]. □

On dira que $(x, \Phi(x), \ldots, \Phi^{n-1}(x))$ est une *base cyclique* et que x est un *vecteur cyclique*. On peut alors écrire $\Phi^n(x) + a_1\Phi^{n-1}(x) + \cdots + a_n x = 0$; le polynôme non commutatif $P = \sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathcal{D}_q$ annule le générateur x du $\mathcal{D}_q$-module à gauche M. De l'euclidianité de $\mathcal{D}_q$ on tire que $\mathcal{D}_q P$ est même l'idéal annulateur de x.

2.1.1.3 Corollaire. - *Tout module aux q-différences est isomorphe à un module de la forme $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, où P est entier unitaire, autrement dit, de la forme ci-dessus.* □

On verra en 2.1.4 comment en déduire qu'un tel module provient d'une équation d'ordre n; il faut cependant prendre garde que ce n'est pas l'équation $P.f = 0$ mais l'équation *duale*, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus (équation d'ordre 1). Ceci sera détaillé en 2.1.4.

Plus généralement, soit y un élément du module aux q-différences M. Il existe un plus grand entier p tel que la famille $(y, \Phi(y), \ldots, \Phi^{p-1}(y))$ est libre sur K; le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est stable par Φ et Φ^{-1}, il admet donc une structure de module aux q-différences. La relation linéaire $\Phi^p(y) + b_1\Phi^{p-1}(y) + \cdots + b_p y = 0$ détermine l'unique polynôme entier unitaire de degré minimum $Q = \sigma^p + b_1\sigma^{p-1} + \cdots + b_p$ tel que $Q(\Phi)(y) = 0$: on l'appellera le *polynôme (annulateur) minimal* de y. L'idéal à gauche annulateur dans $\mathcal{D}_q$ de y est $\mathcal{D}_q Q$ et le module engendré par y est isomorphe à $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q$. La suite exacte correspondante sera examinée plus loin (cf. 2.2.1).

2.1.2 Les morphismes

La catégorie des modules aux q-différences est en fait la sous-catégorie pleine de la catégorie (abélienne) des $\mathcal{D}_q$-modules à gauche formée des modules de longueur finie. On sait donc d'avance qu'il s'agit d'une catégorie abélienne. On va tout de même en donner une description plus terre à terre.

2.1.2.1 Morphismes de modules aux q-différences. -

1. Un morphisme du système $\sigma_q X = AX$ de rang n vers le système $\sigma_q Y = BY$ de rang p devrait être une transformation de jauge $X \mapsto Y = FX$ qui envoie les solutions du premier vers les solutions du second. On le définit donc comme une matrice $F \in M_{p,n}(K)$ telle que $(\sigma_q F)\, A = BF$.

2. De manière plus intrinsèque, un morphisme de (M, Φ) vers (N, Ψ) est une application K-linéaire $f : M \to N$ telle que $\Psi \circ f = f \circ \Phi$ (un choix de bases redonne la description précédente).

3. Il est clair que cela équivaut exactement à la $\mathcal{D}_q$-linéarité pour l'application correspondante entre $\mathcal{D}_q$-modules à gauche.

La composition et les morphismes identités sont définis de manière évidente.

2.1.2.2 Proposition. - *On obtient ainsi une catégorie abélienne $DiffMod(K, \sigma_q)$, dans laquelle tout objet M s'insère dans une suite exacte:*

$$0 \to \mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q \to M \to 0.$$

En effet, si $M = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, la flèche $\mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q$ n'est autre que la multiplication à droite par P. □

2.1.2.3 Objet unité et foncteurs solutions. - L'équation triviale $\sigma_q f = f$ a pour modèle le module aux q-différences (K, σ_q), soit le $\mathcal{D}_q$-module à gauche $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - 1)$. C'est *l'unité* pour la structure tensorielle introduite en 2.1.3 et on le note (traditionnellement) $\underline{\mathbf{1}}$. On définit les deux foncteurs représentés par $\underline{\mathbf{1}}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &\underset{def}{=} Hom(\underline{\mathbf{1}}, M) \\ \Gamma^\vee(M) &\underset{def}{=} Hom(M, \underline{\mathbf{1}}) \end{aligned}$$

Prenons pour M un module aux q-différences admettant les deux descriptions: $(M, \Phi) = (K^n, \Phi_A)$ (notations de 2.1.1.1) et $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ (notation de 2.1.1.3). On a alors les identifications naturelles:

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &= \{x \in M \ / \ \Phi(x) = x\} = \{X \in K^n \ / \ \sigma_q X = AX\} \\ \Gamma^\vee(M) &= \{f \in K \ / \ P(\sigma_q)(f) = 0\} \end{aligned}$$

Ces deux foncteurs sont exacts à gauche. Le foncteur Γ est covariant, c'est le *foncteur des cosolutions*, le foncteur $\Gamma^\vee$ est contravariant, c'est le *foncteur des solutions* (ceci pour respecter ce qui semble être devenu l'usage standard en théorie des $\mathcal{D}$-modules). On peut aussi considérer Γ comme un foncteur "sections globales".

Soit (K', σ'_q) une extension du corps aux q-différences (K, σ_q). On peut définir un foncteur "extension des scalaires" $DiffMod(K, \sigma_q) \to DiffMod(K', \sigma'_q)$ (il est covariant et exact). Par composition avec Γ et $\Gamma^\vee$, on obtient des foncteurs "(co)solutions dans K'".

2.1.3 Constructions tensorielles

Les constructions qui suivent et les preuves de leurs propriétés sont détaillées dans [15], qui est accessible sur ma page web. Elles ne sont pas centrales pour cet exposé, mais rendront les calculs de dimensions beaucoup plus commodes au 3.4.

2.1.3.1 Produit tensoriel et *Hom* interne. - Soient (M, Φ) et (N, Ψ) deux modules aux q-différences. Il y a un unique automorphisme σ_q-linéaire de $M \otimes_K N$ tel que $x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)$. Il en fait un module aux q-différences. De même, l'automorphisme σ_q-linéaire de $Hom_K(M, N)$ défini par $f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ en fait un module aux q-différences. On a donc deux bifoncteurs, le produit tensoriel et le "*Hom* interne", que l'on notera $\underline{Hom}$.

2.1.3.2 Lemme. - *Ces deux foncteurs sont exacts, et on a la propriété d'adjonction:*

$$\underline{Hom}(M \otimes N, P) = \underline{Hom}(M, \underline{Hom}(N, P)).$$

De plus, $\underline{\mathbf{1}}$ est une unité pour le produit tensoriel. Le foncteur de passage au dual: $M^\vee = \underline{Hom}(M, \underline{\mathbf{1}})$ est exact et compatible avec le produit tensoriel. □

On voit que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $Hom(M, N)$ est en fait formé des sections globales (ou cosolutions) de $\underline{Hom}(M, , N)$. En particulier, le K-espace vectoriel sous-jacent au dual de (M, Φ) est le dual du K-espace vectoriel M.

2.1.3.3 Proposition. - *La catégorie $DiffMod(K, \sigma_q)$ est une catégorie tensorielle rigide $\mathbf{C}$-linéaire.* □

Il ne lui manque donc que des foncteurs fibres pour être tannakienne. Il s'en présente naturellement deux:

1. Le foncteur oubli $(M, \Phi) \rightsquigarrow M$ qui, à un module aux q-différences, associe l'espace vectoriel sous-jacent. Il est défini sur K.
2. Le foncteur "solutions dans L". C'est bien un foncteur fibre si L est choisi égal à $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$, comme dans les conventions générales (cf. début de 1) [3]. Il est défini sur le corps des constantes de L, qui est le corps de fonctions elliptiques $\mathcal{M}(\mathbf{E})$, où $\mathbf{E}$ est la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

Notons qu'il n'est pas facile d'obtenir un foncteur fibre défini sur $\mathbf{C}$.

2.1.4 Dualité

Les calculs qui suivent sont inspirés du lemme de Gabber (cf. [7], I.1.5).

Soit (M, Φ) un module aux q-différences admettant la base cyclique $(e_0, \ldots, e_{n-1})$. On a donc, pour $0 \leq i \leq n-2$, $e_{i+1} = \Phi(e_i)$ et $\Phi(e_{n-1}) = -a_n e_0 - \cdots - a_1 e_{n-1}$, où $P = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-1} + \cdots + a_n$ est le polynôme minimal de e_0. D'après 2.1.3.1 et 2.1.3.2, le dual de (M, Φ) est $(M^\vee, \Phi^\vee)$, où $M^\vee$ est le dual de M et $\Phi^\vee$ la contragrédiente (transposée de l'inverse) de Φ. Soit $(e_0^\vee, \ldots, e_{n-1}^\vee)$ la base duale de la base $(e_0, \ldots, e_{n-1})$. On notera $\langle u, v \rangle$ l'application d'une forme linéaire u à un élément v.

2.1.4.1 Lemme. - *Soient $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Alors:*

$$\text{(i)}\quad \left\langle \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle = \begin{cases} \text{si } j \leq n-2 \ : \ \delta_{i,j+1} \\ \text{si } j = n-1 \ : \ -\sigma_q^{-1}(a_{n-i}) \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee) = \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : \ -\sigma_q^{-1}(a_n) e_{n-1}^\vee \\ \text{si } i \geq 1 \ : \ e_{i-1}^\vee - \sigma_q^{-1}(a_{n-i}) e_{n-1}^\vee \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad e_i^\vee = \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : \ -a_n \Phi^\vee(e_{n-1}^\vee) \\ \text{si } i \ \geq 1 \ : \ \Phi^\vee(e_{i-1}^\vee) - a_{n-i} \Phi^\vee(e_{n-1}^\vee) \end{cases}$$

La première assertion se prouve en remarquant que, par définition du dual, on a la formule générale: $\langle \Phi^\vee(u), \Phi(v) \rangle = \sigma_q(\langle u, v \rangle)$, d'où $\langle u, v \rangle = \sigma_q^{-1}(\langle \Phi^\vee(u), \Phi(v) \rangle)$. On applique cette dernière égalité à $u = \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee)$ et $v = e_j$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle &= \sigma_q^{-1}(\langle e_i^\vee, \Phi(e_j) \rangle) \\ &= \sigma_q^{-1}\left(\begin{cases} \text{si } j \leq n-2 \ : \ \langle e_i^\vee, e_{j+1} \rangle = \delta_{i,j+1} \\ \text{si } j = n-1 \ : \ \langle e_i^\vee, -a_n e_0 - \cdots - a_1 e_{n-1} \rangle = -a_{n-i} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

[3] Plus généralement, tout corps L dans lequel toute équation (1) admet un "full complement of solutions" convienddrait pour fabriquer un foncteur fibre. La difficulté est que pour un tel corps, le corps des constantes est gros par rapport à $\mathbf{C}$.

d'où l'on tire bien la formule annoncée.

Pour la deuxième assertion, on part de la formule générale $\forall u \in M^\vee$, $u = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, e_j \rangle e_j^\vee$, que l'on applique à $u = (\Phi^\vee)^{-1}(e_i^\vee)$:

$$\begin{aligned} (\Phi^\vee)^{-1}(e_i^\vee) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle (\Phi^\vee)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle e_j^\vee \\ &= -\sigma_q^{-1}(a_{n-i}) e_{n-1}^\vee + \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : \ 0 \\ \text{si } i \geq 1 \ : \ e_{i-1}^\vee \end{cases} \end{aligned}$$

La troisième assertion vient alors immédiatement. □

2.1.4.2 Proposition. - *Sous les hypothèses ci-dessus, $e_{n-1}^\vee$ est un vecteur cyclique de $M^\vee$, de polynôme minimal $P^\vee = \sigma^n + b_1\sigma^{n-1} + \cdots + b_n$, où (en posant, par commodité, $a_0 = 1$):*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ b_i = \frac{\sigma_q^{n-i-1}(a_{n-i})}{\sigma_q^{n-1}(a_n)}.$$

D'après le point (iii) du lemme 2.1.4.1, le plus petit sous-espace de $M^\vee$ stable par $\Phi^\vee$ et contenant $e_{n-1}^\vee$ est $M^\vee$, donc $e_{n-1}^\vee$ est un vecteur cyclique, dont il reste à déterminer le polynôme minimal. On déduit également du lemme, par récurrence:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \ : \ e_i^\vee = -\sum_{j=0}^{i} \sigma_q^{i-j}(a_{n-j}) \, (\Phi^\vee)^{i-j+1} \, (e_{n-1}^\vee),$$

d'où $Q(\sigma_q)(e_{n-1}^\vee) = 0$, avec $Q = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_q^{i-j}(a_{n-j})\sigma^{n-j} \in \mathcal{D}_q$. En divisant ce polynôme (entier) par son coefficient dominant $\sigma_q^{n-1}(a_n)$, on obtient le polynôme minimal entier unitaire $P^\vee$ annoncé. □

2.1.4.3 Lien entre solutions et cosolutions. On va maintenant élucider le lien entre les deux modèles de l'équation (1). On peut supposer celle-ci écrite sous la forme $P(\sigma_q)(f) = 0$, où $P = \sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \cdots + a_n$.

1. Notons ${}_PM$ le module obtenu par transformation de (1) en système. C'est donc K^n muni de l'automorphisme σ_q-linéaire $X \mapsto A^{-1}(\sigma_q X)$, où A est la matrice décrite en 2.1.1.1.
2. Notons M_P le module $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$. Son opérateur Φ est la multiplication par σ modulo P. Une base cyclique est donc formée des classes modulo P: $\overline{1}, \overline{\sigma}, \ldots, \overline{\sigma^{n-1}}$. La matrice de Φ dans cette base est ${}^tA$. Ce module est donc isomorphe à K^n muni de l'automorphisme σ_q-linéaire $X \mapsto B^{-1}(\sigma_q X)$, où $B = {}^tA^{-1}$ est la contragrédiente de A.

Ainsi, les modèles ${}_PM$ et M_P de (1) sont duaux l'un de l'autre, ce qui explique pourquoi les solutions de (1) peuvent être vues au choix comme solutions de l'un ou cosolutions de l'autre. On en déduit aussi que tout module aux q-différences est isomorphe à un module ${}_PM$, autrement dit qu'il provient d'une équation.

2.2 Définition intrinsèque du polygone de Newton

2.2.1 Dévissage et triangularisation

Voici quelques précisions sur la structure des modules aux q-différences dans les cas formel et convergent.

2.2.1.1 Modules de rang 1 et polynômes minimaux. - Il découle du lemme du vecteur cyclique (2.1.1.2 et 2.1.1.3) que tout objet M de $DiffMod(K, \sigma_q)$ s'écrit sous la forme $M_P = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ avec P entier unitaire. L'anneau $\mathcal{D}_q$ n'étant pas commutatif, on ne peut cependant pas caractériser l'idéal $\mathcal{D}_q P$ comme idéal annulateur de M et en déduire l'unicité de P.

Par ailleurs, le rang du module M (c'est à dire sa dimension sur K, cf. 2.1.1.1) est un invariant d'isomorphie (car toute bijection $\mathcal{D}_q$-linéaire est K-linéaire) et M_P a pour rang le degré de P. Donc M_P est de rang 1 si et seulement si $P = \sigma - a, a \in K^*$. De plus, la description donnée à la fin de 2.1.1.1 entraine que tout P' tel que $M_P \simeq M_{P'}$ est, dans ce cas, de la forme $P' = \sigma - a'$, où $\exists u \in K^* \ : \ \frac{a'}{a} = \frac{\sigma_q(u)}{u}$. En particulier, on peut associer à tout module de rang 1 un élément du groupe quotient de K^* par le sous-groupe $\{\frac{\sigma_q(u)}{u} \ / \ u \in K^*\}$. Nous noterons temporairement (sections 2.2 et 2.3) ce groupe C.

2.1.1.2 Triangularisation. - Tout objet M de la catégorie abélienne $DiffMod(K, \sigma_q)$ étant, par hypothèse, de longueur finie, il admet un dévissage:

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$

où tous les quotients $S_i = M_i/M_{i-1}$ sont simples. Le rang de M est la somme des longueurs des rangs des S_i. Tout objet de rang 1 est donc simple. D'après le théorème de Jordan-Holder, les classes d'isomorphie des modules S_i sont bien déterminées dans leur ensemble, c'est à dire à permutation près, et en conservant leurs multiplicités. On peut donc associer à M une combinaison linéaire formelle de classes d'isomorphie des modules simples, à coefficients dans $\mathbf{N}$; cette application est additive pour les suites exactes (ceci revient en fait à décrire le groupe de Grothendieck de $DiffMod(K, \sigma_q)$).

On dira que le module M est *triangularisable* si les modules simples qui interviennent dans le dévissage ci-dessus sont de rang 1. Cela revient exactement à dire que la matrice A qui apparait dans la description sous la forme (K^n, Φ_A) peut être choisie triangulaire supérieure. En combinant la remarque précédente à 2.1.1.1, on associe à un module triangularisable une combinaison linéaire formelle d'éléments du groupe C, à coefficients dans $\mathbf{N}$; cette application est encore additive pour les suites exactes.

2.2.1.3 Suites exactes et polynômes minimaux. - Soient P, Q, R des polynômes non commutatifs entiers unitaires tels que $P = QR$. Alors $\mathcal{D}_q P \subset \mathcal{D}_q R$, d'où la surjection canonique $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q R \to 0$. L'anneau $\mathcal{D}_q$ étant intègre, le noyau $\mathcal{D}_q R/\mathcal{D}_q P = \mathcal{D}_q R/\mathcal{D}_q QR$ est canoniquement isomorphe, via l'application linéaire à gauche $F \mapsto FR$, à $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q$. On obtient donc une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q R \to 0. \tag{3}$$

Réciproquement, on déduit facilement de 2.2.1.1 que toute suite exacte dans $DiffMod(K, \sigma_q)$ s'identifie à une suite exacte (3).

2.2.1.4 Théorème. - *Soit M un module aux q-différences sur l'un des corps aux q-différences (K, σ_q) mentionnés dans les conventions générales. Il existe une extension (K_l, σ_{q_l}) de (K, σ_q) obtenue par ramification $z = z_l^l, q = q_l^l$ (cf. 1.1.3.2) telle que le module $M_l = K_l \otimes_K M$ obtenu par extension des scalaires est triangularisable.*

En effet, c'est une conséquence immédiate des résultats de 1.2 et de 2.2.1.3. □

Notons C_l le groupe associé à (K_l, σ_{q_l}) par le procédé de 2.2.1.1 (donc $C = C_1$). La restriction de σ_{q_l} à K étant égale à σ_q, il y a un morphisme naturel de C dans C_l. Plus généralement, il y a un tel morphisme de C_l dans $C_{l'}$ dès que $l \mid l'$ et ces morphismes sont compatibles, d'où un système inductif de groupes dont la limite inductive sera notée C_∞.

2.2.1.5 Corollaire. - *A tout module aux q-différences M on peut associer une combinaison linéaire formelle d'éléments de C_∞ à coefficients dans $\mathbf{N}$; cette application est additive pour les suites exactes.*

En effet, le rang des modules et l'exactitude des suites sont préservés par extension des scalaires. □

2.2.2 Construction du polygone de Newton

Notons v_0 la valuation z-adique sur les corps qui nous intéressent. Notre but est d'attribuer la pente $v_0(a)$ à l'équation $\sigma_q f = af$ et d'identifier celle-ci au module $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a)$, donc au *second* modèle (celui des solutions et non celui des cosolutions). Ce point est important, car la confusion entre les deux modèles a entrainé la présence d'énoncés inexacts dans ma note de CRAS sur ce sujet. Shame upon me ...

2.2.2.1 L'algorithme. - La méthode employée est inspirée de Katz (cf [7], II.2). On part d'un module aux q-différences M sur (K, σ_q). On va construire la *fonction de Newton* $r_M : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ de M (cf. 1.1.2).

1. Quitte à ramifier, on peut supposer M triangularisable.
2. Chaque module simple S_i qui intervient dans la décomposition de M est de rang 1, donc de la forme $M_{\sigma - a}$, l'élément a étant déterminé à un facteur $\frac{\sigma_q(u)}{u}$ près; en particulier, la valuation $\mu = v_0(a)$ est bien déterminée. On attribue à S_i la fonction de Newton δ_μ qui vaut 1 en μ et 0 sur $\mathbf{Q} - \{\mu\}$: autrement dit, le polygone de Newton de S_i a une seule pente, de valeur μ et de multiplicité 1.
3. On attribue à M la fonction de Newton r_M somme des r_{S_i}. D'après le théorème de Jordan-Holder, celle-ci est bien déterminée (i.e. ne dépend pas du dévissage choisi).
4. Si l'on a dû ramifier au niveau l, on divise toutes les pentes calculées par l. Comme la ramification au niveau l multiplie les valuations par l, le choix du niveau de ramification n'influe pas sur le résultat final.

Cette définition du polygone de Newton est tautologiquement additive pour les suites exactes. Par construction, si M_P est de rang 1, son polygone de Newton est égal à celui du polynôme non commutatif P. D'après 1.1.4.2 et 2.2.1.3, cela est encore vrai si M_P est triangularisable. Enfin, d'après 1.1.3.2 et le dernier point de l'algorithme, cela reste vrai en toute généralité.

On peut rendre cette construction et cette preuve plus formelle en utilisant les groupes C_l et le corollaire 2.2.1.5. Puisque $\forall u \in K^*$, $v_0(\frac{\sigma_q(u)}{u}) = 0$, la valuation induit une application bien définie du groupe $C = C_1$ vers $\mathbf{Z}$; c'est un morphisme de groupes (ce point sera utile pour l'étude du produit tensoriel). Ce morphisme s'étend naturellement, pour tout entier non nul l, en un morphisme: $C_l \to \frac{1}{l}\mathbf{Z}$ (puisque la valuation d'uniformisante z est égale à l fois la valuation d'uniformisante z_l). Ces morphismes sont compatibles, donc donnent à la limite inductive un morphisme $C_\infty \to \mathbf{Q}$. D'après 2.2.1.5, on peut donc associer à tout module aux q-différences une combinaison linéaire formelle d'éléments de $\mathbf{Q}$ à coefficients dans $\mathbf{N}$, cette application étant de plus additive pour les suites exactes. Mais un tel objet est exactement la même chose qu'une application $\mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ à support fini.

2.2.2.2 Théorème et définition. - *On peut associer à tout module aux q-différences M un polygone de Newton N_M défini par la fonction de Newton associée r_M, de manière que:*
(i) Le polygone de Newton d'un polynôme non commutatif entier unitaire P est celui de M_P.
(ii) Le passage au polygone de Newton est additif pour les suites exactes. □

2.3 Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles

2.3.1 Propriétés de la fonction et du polygone de Newton

Nous exprimerons plutôt ces propriétés à l'aide de la fonction de Newton.

2.3.1.1 Théorème. - *(i) La fonction de Newton est additive pour les suites exactes. Précisément, si la suite de modules aux q-différences $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte, on a $r_M = r_{M'} + r_{M''}$.*
(ii) La fonction de Newton est multiplicative par rapport au produit tensoriel, avec le produit de Cauchy. Précisément, si M_1 et M_2 sont des modules aux q-différences :

$$\forall \mu \in \mathbf{Q} \ : \ r_{M_1 \otimes M_2}(\mu) = \sum_{\mu_1 + \mu_2 = \mu} r_{M_1}(\mu_1) r_{M_2}(\mu_2).$$

(iii) La fonction de Newton du dual d'un module aux q-différences M est donnée par la formule:

$$\forall \mu \in \mathbf{Q} \ : \ r_{M^\vee}(\mu) = r_M(-\mu).$$

La première assertion a déjà été vue au 2.2. Pour la seconde assertion (où l'on a bien affaire à une somme finie de termes non nuls), on vérifie d'abord la formule dans le cas où M_1 et M_2 sont de rang 1: elle vient alors, par application de la définition (2.2.2.1, point 2), de l'égalité:

$$(\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_1)) \otimes (\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_2)) = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_1 a_2),$$

que l'on vérifie facilement. Le cas de deux modules triangularisables s'en déduit grâce à (i) et à l'exactitude du produit tensoriel (cf. 2.1.3.2). Le cas général vient alors de 2.2.1.4, du comportement du polygone de Newton par ramification (cf. 1.1.3.2) et de la compatibilité du produit tensoriel avec l'extension des scalaires (donc avec la ramification). Pour la troisième assertion, on raisonne de la même manière à partir de l'égalité:

$$(\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a))^\vee = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a^{-1}).$$

□

2.3.1.2 Remarque. - Ces propriétés s'expriment agréablement à l'aide de la série génératrice :

$$\mathcal{R}_M(T) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}} r_M(\mu) T^\mu,$$

qui est un polynôme ramifié. On verra en 3.3 que l'on peut en fait l'interpréter comme une série de Hilbert-Samuel.

Comme en 1.1.2, on introduit *l'ensemble $S(M)$ des pentes du module aux q-différences M*: c'est le support de sa fonction de Newton r_M. Ce qui suit est immédiat:

2.3.1.3 Corollaire. - *(i) Si la suite de modules aux q-différences $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte, on a $S(M) = S(M') \cup S(M'')$.*
(ii) Si M_1 et M_2 sont des modules aux q-différences, $S(M_1 \otimes M_2) = S(M_1) + S(M_2)$.
(iii) L'ensemble des pentes du dual de M est donné par la formule $S(M^\vee) = -S(M)$. □

Notons en particulier les très utiles conséquences suivantes:

2.3.1.4 Corollaire. - *(i) Soit N un quotient de M, par exemple, l'image $f(M)$ de M par un morphisme. Alors $S(N) \subset S(M)$.*
(ii) Soient M' et M'' des sous-modules de M. Alors $S(M')$, $S(M'') \subset S(M)$ et $S(M' + M'') = S(M') \cup S(M'')$. Si de plus $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$, leur somme est directe.
(iii) Si $S(M) \cap S(N) = \emptyset$, tout morphisme de M dans N est nul. □

2.3.2 Modules purs, modules fuchsiens

Un module *pur de pente* μ est un module M tel que $S(M) = \{\mu\}$. Notons que la question difficile, à ce stade, est de savoir si un module M tel que $\mu \in S(M)$ admet un sous-module de pente μ (sous-entendu: non trivial), autrement dit, si l'on peut "casser les pentes" de son polygone de Newton. Ce sera l'objet de la section 3.1.

2.3.2.1 Proposition. - *(i) Tout sous-module, tout module quotient, toute image par un morphisme d'un module pur de pente μ sont soit triviaux, soit des modules purs de pente μ.*
(ii) Toute extension de modules purs de pente μ en est un.
(iii) Si $\mu \in S(M)$, la somme N des sous-modules purs de pente μ de M est soit nulle, soit le plus grand sous-module pur de pente μ de M. Les sous-modules ainsi associés aux différentes pentes $\mu \in S(M)$ sont en somme directe.
(iv) Le dual d'un module pur de pente μ est un module pur de pente $-\mu$.
(v) Le produit tensoriel de deux modules purs de pentes μ et ν est un module pur de pente $\mu + \nu$.

Cela découle immédiatement de 2.3.1.2 et 2.3.1.3. □

Un module *fuchsien* est un module pur de pente 0. Le lien avec les autres caractérisations des équations fuchsiennes et des systèmes fuchsiens est explicité dans l'appendice de [14] et dans [15]. Leur rôle est crucial dans l'étude générale des équations aux q-différences.

2.3.2.2 Théorème. - *La sous-catégorie pleine de la catégorie $DiffMod(K, \sigma_q)$ formée des modules fuchsiens est stable par passage aux sous-quotients, aux extensions, au produit tensoriel, au dual et aux Hom internes. C'est donc une catégorie tensorielle rigide $\mathbf{C}$-linéaire*

Il faut simplement noter que le Hom interne s'exprime à l'aide du produit tensoriel et du dual:

$$\underline{Hom}(M, N) = M^\vee \otimes N.$$

Tout le reste est conséquence immédiate de 2.3.2.1. □

Il est démontré dans [15] que cette catégorie est tannakienne sur $\mathbf{C}$. Notons que, dans le théorème ci-dessus, le plus compliqué est de prouver qu'un sous-module d'un module fuchsien est fuchsien (le cas du quotient s'en déduisant par dualité).

2.3.2.3 Formes canoniques. - Tout module de pente entière μ est le produit tensoriel du module de rang 1 (nécessairement pur) et de pente μ : $(K, z^{-\mu}\sigma_q) = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - z^\mu)$ par un module fuchsien. Des formes canoniques pour les modules fuchsiens sont décrites dans [14] et dans [15]. Dans ce dernier article, on étudie plus généralement, sous le nom de "tamely irregular modules" les sommes directes de modules purs. Le problème des formes canoniques pour les modules purs de pente non entière est intéressant et plus compliqué. Il sera abordé dans [16].

3 La filtration canonique par les pentes et le gradué associé

3.1 La filtration canonique par les pentes

Partout dans cette section et la plupart du temps dans les suivantes, le corps aux q-différences (K, σ_q) est l'un de ceux mentionnés dans les conventions générales. On dit qu'on est *dans le cas formel* si $K = \mathbf{C}((z))$ et *dans le cas convergent* sinon. Les résultats marchent souvent par paire.

3.1.1 Le plus grand sous-module pur de pente μ

Soit $\mu \in S(M)$. On notera temporairement (c'est à dire uniquement dans la section 3.1.1) $M^{[\mu]}$ le plus grand sous-module pur de pente μ de M, dont l'existence a été établie en 2.3.2.1, (iii). Il découle des résultats de 2.3.2 que son rang est *a priori* majoré par $r_M(\mu)$ d'une part, qu'il est *invariant par tout automorphisme du module aux q-différences* M d'autre part.

Dans le cas formel, la pente μ sera quelconque. Dans le cas convergent, on supposera que c'est la plus grande pente de M: $\mu = \max S(M)$. Nous allons prouver que, sous ces hypothèses, $M^{[\mu]}$ a le rang maximum. C'est (avec l'usage de Jordan-Holder pour la définition intrinsèque du polygone de Newton) la deuxième étape cruciale dans la linéarisation des résultats d'Adams-Birkhoff-Guenter.

3.1.1.1 Cas non ramifié. - On suppose, pour simplifier, que $S(M) \subset \mathbf{Z}$; en particulier, M est triangularisable (2.2.1.4). On écrit $M = M_P$ avec P entier unitaire. On a donc $\mu \in S(M) = S(P)$. D'après les résultats de 1.2.2 (cas formel) et de 1.2.3 (cas convergent), il y a une factorisation $P = QR$, où Q et R sont entiers unitaires et $S(Q) = \{\mu\}$, $S(R) = S(P) - \{\mu\}$. Le degré de Q est $r_P(\mu) = r_M(\mu)$. Le sous-module M_Q de $M = M_P$ (2.2.1.3) est donc pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$. C'est donc $M^{[\mu]}$ et ce dernier a bien le rang maximum dans ce cas.

3.1.1.2 Cas général. - On prend maintenant M quelconque. Il existe un entier naturel non nul l tel que $S(M) \subset \frac{1}{l}\mathbf{Z}$. Notons $(K', \sigma_{q'})$ l'extension (K_l, σ_{q_l}) déjà utilisée en 2.2.1.4. Soit $M' = K' \otimes_K M$ le module obtenu par extension des scalaires et notons $\mu' = l\mu$: c'est une pente de M', la plus grande dans le cas convergent; de plus, $S(M') = lS(M) \subset \mathbf{Z}$. D'après 3.1.1.1, $M'^{[\mu']}$ a le rang maximum, soit $r_{M'}(\mu') = r_M(\mu)$.

Le groupe de Galois de K' sur K est cyclique, engendré par l'automorphisme $\gamma : f(z') \mapsto f(jz')$, où l'on a noté z' la variable ramifiée z_l et où j est une racine primitive l-ème de l'unité. L'automorphisme K-linéaire $\gamma \otimes Id_M$ de M' commute à σ', c'est donc un automorphisme de module aux q'-différences. Il laisse donc $M'^{[\mu]}$ invariant (d'après les remarques précédentes). Par descente galoisienne (cf. par exemple Springer T. A., "Linear Algebraic Groups", Birkhäuser, 1998, chap. 11.1), il existe un unique sous-espace vectoriel M_1 du K-espace vectoriel M tel que $M'^{[\mu]} = K' \otimes_K M_1$. Il est alors facile de voir que M_1 est en fait le sous-module $M^{[\mu]}$ et que celui-ci a bien pour rang le rang maximum $r_M(\mu) = r_{M'}(\mu')$.

3.1.1.3 Théorème. - *Soit μ une pente du module M, supposée maximale dans le cas convergent. Alors M admet un sous-module $M^{[\mu]}$ pur de pente μ et de rang maximum $r_M(\mu)$.* □

De l'additivité du polygone de Newton pour les suites exactes on tire alors le

3.1.1.4 Corollaire. - *Le sous-module $M^{[\mu]}$ est tel que $S(M/M^{[\mu]}) = S(M) - \{\mu\}$.* □

Le lemme d'Adams permet donc de casser les pentes.

3.1.2 La filtration canonique

Soit M un module aux q-différences. On numérote ses pentes: $S(M) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$. Dans le cas formel, l'ordre est arbitraire; dans le cas convergent, on suppose que $\mu_1 > \cdots > \mu_k$.

3.1.2.1 Théorème. - *Dans le cas convergent, Il existe une unique tour de sous-modules:* $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ *telle que, pour* $1 \leq i \leq k$, *le module quotient* M_i/M_{i-1} *est pur de pente* μ_i. *Les rangs de ces quotients sont alors les* $r_M(\mu_i)$.

Cela vient tout seul en itérant 3.1.1.3 et 3.1.1.4. □

3.1.2.2 Théorème. - *Dans le cas formel,* M *admet une unique décomposition en somme directe de modules purs. Ceux-ci sont purs de pentes* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *et leurs rangs sont les* $r_M(\mu_i)$.

Cela découle de 3.1.1.3 et de 2.3.2.1. □

3.1.2.3 La filtration canonique: notations. - Tout ce qui suit est conséquence triviale des deux résultats précédents et vise seulement à les mettre en forme pour la suite. Soit $\mu \in \mathbf{Q}$ quelconque (pas nécessairement une pente de M).

On note $M^{\geq\mu}$ ou $F^{\geq\mu}(M)$ (resp. $M^{>\mu}$ ou $F^{>\mu}(M)$) le plus grand sous-module de M dont toutes les pentes sont $\geq \mu$ (resp. $> \mu$). On a donc:

$$S(M^{\geq\mu}) = S(M) \cap [\mu; +\infty[\text{ et son rang vaut } \sum_{\mu_i \geq \mu} r_M(\mu_i),$$

$$S(M^{>\mu}) = S(M) \cap]\mu; +\infty[\text{ et son rang vaut } \sum_{\mu_i > \mu} r_M(\mu_i).$$

Les $F^{\geq\mu}(M)$ forment la *filtration canonique (descendante) par les pentes de* M, dont les propriétés seront étudiées en 3.2.

On note $M^{(\mu)} = M^{\geq\mu}/M^{>\mu}$: c'est $\{0\}$ si μ n'est pas une pente de M, un module pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$ si μ est une pente de M.

On note $Q^{<\mu}(M)$ (resp. $Q^{\leq\mu}(M)$ le quotient $M/F^{\geq\mu}(M)$ (resp. $M/F^{>\mu}(M)$). Les couples $(F^{\geq\mu}(M), Q^{<\mu}(M))$ et $(F^{>\mu}(M), Q^{\leq\mu}(M))$ cassent donc en deux le polygone de Newton.

3.1.2.4 Remarque. - Il est possible de caractériser les éléments $x \in M^{\geq\mu}$ en termes de vitesse de croissance z-adique de la suite des itérés de x par Φ_M.

3.2 Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles

Tout ce qui suit repose sur des raisonnements par "abstract nonsense" à partir du principe suivant, qui est une paraphrase des résultats de 3.1.2:
Soit $(G^{\geq\mu}(M))_{\mu\in\mathbf{Q}}$ *une filtration descendante d'un module aux q-différences* M *tel que les sauts non triviaux* $G^{\geq\mu}(M)/G^{>\mu}(M)$ *(nécessairement en nombre fini) soient purs de pente l'indice* μ *du saut. Alors c'est la filtration canonique.*

3.2.1 Propriétés fonctorielles et abéliennes

3.2.1.1 Lemme. - *(i) Soit* M' *un sous-module de* M. *Alors* $\forall\mu\in\mathbf{Q}$, $F^{\geq\mu}(M') = F^{\geq\mu}(M)\cap M'$.
(ii) Soit M'' *un module quotient de* M. *Alors* $\forall\mu\in\mathbf{Q}$, $F^{\geq\mu}(M'') =$ *image de* $F^{\geq\mu}(M)$ *dans* M''.

En effet, dans chaque cas, le membre de droite est le terme général d'une filtration à laquelle on peut appliquer le principe énoncé plus haut. □

3.2.2.2 Proposition. - *Tout morphisme de modules aux q-différences est strict relativement aux filtrations canoniques. Autrement dit, si* f *est un morphisme de* M *dans* N:

$$\forall\mu\in\mathbf{Q}\ ,\ f(M^{\geq\mu}) = f(M)\cap N^{\geq\mu}.$$

Cela découle immédiatement du lemme. □

3.2.2.3 Corollaire. - *Les* $F^{\geq\mu}$ *et les* $F^{>\mu}$ *sont des endofoncteurs de la catégorie* $DiffMod(K,\sigma_q)$. □

Les propriétés spécifiquement abéliennes (comportement vis à vis des suites exactes) viennent de la proposition et apparaitront plus clairement en 3.3, avec l'étude du foncteur "gradué associé".

3.2.2 Propriétés tensorielles

On part d'un produit tensoriel $M = M_1\otimes M_2$. On a donc $S(M) = S(M_1)+S(M_2)$ (cf. 2.3.1.3).

3.2.2.1 Une filtration. - Pour $\mu\in\mathbf{Q}$, on pose:

$$G^{\geq\mu}(M) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} M_1^{\geq\mu_1}\otimes M_2^{\geq\mu_2}.$$

Il est clair que les $(G^{\geq\mu}(M))_{\mu\in\mathbf{Q}}$ forment une filtration descendante de M dont les sauts ont lieu aux pentes de M.

Notons temporairement:

$$H^{\mu}(M) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} \left(M_1^{\geq\mu_1}\otimes M_2^{>\mu_2} + M_1^{>\mu_1}\otimes M_2^{\geq\mu_2}\right)$$

On voit que $H^{\mu}(M)\subset G^{\geq\mu}(M)$, l'inclusion étant stricte si et seulement si μ est une pente de M. Soient $\mu' > \mu$ deux pentes consécutives de M. Alors, si $\mu_1+\mu_2=\mu$, on voit que $M_1^{>\mu_1}\otimes M_2^{\geq\mu_2}\subset H^{\mu'}(M)$ puis, par symétrie et en additionnant, que $H^{\mu}(M)\subset G^{\geq\mu'}(M)$. Par conséquent, $H^{\mu}(M) = G^{>\mu}(M)$.

On a deux surjections naturelles:

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu} M_1^{\geq\mu_1}\otimes M_2^{\geq\mu_2}\to G^{\geq\mu}(M)\to 0,\qquad \bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu}\left(M_1^{\geq\mu_1}\otimes M_2^{>\mu_2} + M_1^{>\mu_1}\otimes M_2^{\geq\mu_2}\right)\to G^{>\mu}(M)\to 0,$$

d'où, par passage au quotient, une surjection:

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu} \frac{M_1^{\geq\mu_1} \otimes M_2^{\geq\mu_2}}{M_1^{\geq\mu_1} \otimes M_2^{>\mu_2} + M_1^{>\mu_1} \otimes M_2^{\geq\mu_2}} \to \frac{G^{\geq\mu}(M)}{G^{>\mu}(M)} \to 0.$$

Or, de la formule générale :

$$\frac{A'}{A} \otimes \frac{B'}{B} = \frac{A' \otimes B'}{A \otimes B' + A' \otimes B},$$

on déduit l'isomorphisme canonique:

$$\frac{M_1^{\geq\mu_1} \otimes M_2^{\geq\mu_2}}{M_1^{\geq\mu_1} \otimes M_2^{>\mu_2} + M_1^{>\mu_1} \otimes M_2^{\geq\mu_2}} = M_1^{(\mu_1)} \otimes M_2^{(\mu_2)},$$

autrement dit, on a une surjection:

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu} M_1^{(\mu_1)} \otimes M_2^{(\mu_2)} \to \frac{G^{\geq\mu}(M)}{G^{>\mu}(M)} \to 0,$$

qui entraine que $G^{\geq\mu}(M)/G^{>\mu}(M)$ est pur de pente μ.

3.2.2.2 Proposition. - *La filtration canonique sur le produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ est donnée par la formule:*

$$F^{\geq\mu}(M_1 \otimes M_2) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} F_1^{\geq\mu_1}(M_1) \otimes F_2^{\geq\mu_2}(M_2).$$

Cela découle de l'étude précédente et du principe général énoncé plus haut. □

3.2.2.3 Remarque. - Ces propriétés de la filtration sont analogues à celles axiomatisées par Saavedra dans dans [13] (en mieux puisque nous filtrons par des sous-objets) et *opposées* à celles axiomatisées par Yves André dans [3].

3.3 Le gradué associé

On récolte ici presque gratuitement les fruits du travail déjà fait.

3.3.1 Modules modérément irréguliers

3.3.1.1 La catégorie $DiffMod_{mi}(K, \sigma_q)$. - On appellera *modérément irrégulier* un module aux q-différences somme directe de modules purs. C'est une terminologie temporaire, inspirée de "modérément ramifié" en arithmétique et en géométrie algébrique. La propriété d'être modérément irrégulier est conservée par extension des scalaires. On notera $DiffMod_{mi}(K, \sigma_q)$ la sous-catégorie pleine de $DiffMod(K, \sigma_q)$ formée des modules modérément irréguliers et, pour tout entier naturel non nul l (niveau de ramification suffisant pour triangulariser), on notera $DiffMod_{mi,l}(K, \sigma_q)$ la sous-catégorie pleine dont les objets ont toutes leurs pentes dans $\frac{1}{l}\mathbf{Z}$. La catégorie $DiffMod_{mi}(K, \sigma_q)$ est naturellement graduée par $\mathbf{Q}$. Les morphismes sont de degré 0. La catégorie est stable par sous-quotient et constructions tensorielles, mais pas par extensions. C'est donc une sous-catégorie tannakienne de $DiffMod(K, \sigma_q)$. Ces propriétés sont encore valables pour chacune des sous-catégories $DiffMod_{mi,l}(K, \sigma_q)$. La projection $M \rightsquigarrow M^{(\mu)}$ sur la composante de degré (ou pente) μ est un foncteur exact.

3.3.1.2 Fonction et polynôme de Hilbert-Samuel. - On peut associer à tout module modérément irrégulier $M = \bigoplus M^{(\mu)}$ sa *fonction de Hilbert-Samuel* $\mu \mapsto r_M(\mu) = \dim_K(M^{(\mu)})$ (qui est aussi sa fonction de Newton) et son *polynôme de Hilbert-Samuel*:

$$\mathcal{R}_M(T) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}} r_M(\mu) T^{\mu},$$

(qui est un polynôme ramifié). La formation de ce dernier est additive pour les suites exactes et multiplicative pour le produit tensoriel. La dualisation se traduit par $T \leftarrow T^{-1}$. En combinaison avec 3.3.2, ces propriétés "expliquent" (ou enrichissent) les propriétés de la fonction de Newton obtenues en 2.3.1.

3.3.2 Propriétés fonctorielles,abéliennes et tensorielles

Si M est un module aux q-différences, rappelons que l'on note $M^{(\mu)} = \frac{F^{\geq \mu}(M)}{F^{> \mu}(M)}$ le facteur de pente μ de M et que celui-ci est non nul si et seulement si μ est une pente de M; dans ce cas, il est pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$. Nous noterons:

$$gr(M) = \bigoplus_{\mu \in \mathbf{Q}} M^{(\mu)} = \bigoplus_{\mu \in S(M)} M^{(\mu)}$$

le *gradué associé* à la filtration canonique de M; c'est un module modérément irrégulier. D'après 3.2.1, tout morphisme $f : M \to N$ envoie $F^{\geq \mu}(M)$ dans $F^{\geq \mu}(N)$ et $F^{> \mu}(M)$ dans $F^{> \mu}(N)$, donc induit $f^{(\mu)} : M^{(\mu)} \to N^{(\mu)}$ donc aussi $gr(f) : gr(M) \to gr(N)$.

3.3.2.1 Théorème. - *On définit ainsi un foncteur $\mathbf{C}$-linéaire exact de la catégorie abélienne $DiffMod(K, \sigma_q)$ dans sa sous-catégorie pleine $DiffMod_{mi}(K, \sigma_q)$. Ce foncteur est une rétraction de l'inclusion.*

L'exactitude est une conséquence classique du fait que tous les morphismes sont stricts (cf 3.3.2.2). □

3.3.2.2 Théorème. - *Le foncteur gr est compatible au produit tensoriel et fidèle.*

D'après [13], IV.2.1, il découle de 3.2.2.2 que le foncteur qui associe à M le K-espace vectoriel sous-jacent à $gr(M)$ possède les propriétés indiquées. Le fait que gr lui-même possède ces propriétés est alors trivial. □

3.3.2.3 Remarque. - D'après 3.1.2.2, dans le cas formel, $DiffMod_{mi}(K, \sigma_q) = DiffMod(K, \sigma_q)$ et ce foncteur est isomorphe au foncteur identité.

3.4 Applications à la classification et à la théorie de Galois

Il s'agit d'esquisses. Pour les détails, voir les références correspondantes.

3.4.1 Applications à la classification

D'après 3.3, la classification locale "analytique modulo formelle" se ramène à la classification à gradué donné. Celle-ci se ramène à des calculs de classes d'extensions. On prouve:

1. Que le foncteur "sections globales" Γ est exact à gauche et que $Hom(M,N) = \Gamma(\underline{Hom}(M,N)))$.
2. Que les $\Gamma^i(M) = Ext^i(\underline{1}, M)$ sont les foncteurs dérivés du foncteur Γ.
3. Que $Ext^i(M,N) = Ext^i(\underline{1}, \underline{Hom}(M,N))$ (à cause de la rigidité de la catégorie).
4. Que les $Ext^i, i \geq 2$ sont nuls (à cause de 2.1.2.2).
5. Que les $Ext^i, i = 0,1$ sont de dimension finie.

On définit alors la *caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(M) = \dim \Gamma^0(M) - \dim \Gamma^1(M)$, qui est additive pour les suites exactes. Dans le cas d'objets de rang 1, Γ^0 et Γ^1 s'interprètent respectivement comme un noyau et un conoyau d'opérateur aux q-différences et la caractéristique d'Euler-Poincaré comme un *indice*, ce qui permet des calculs exacts.

Enfin, via la nouvelle sommation discrète de Zhang, on uniformise Ext^1 par un espace de fonctions elliptiques à pôles contrôlés, ou, de façon plus intrinsèque, par un espace de sections méromorphes d'un fibré sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ (à pôles contrôlés aussi).

Références. -

1. Prochainement, les exposés à la q-semaine (27 au 31 mai 2002) , qui seront rédigés et accessibles sur le site du Groupe de Travail.
2. L'article en préparation [12].

3.4.2 Applications à la théorie de Galois

On ne parle ici que du cas convergent, le cas formel étant plus simple. On se restreint ici au cas "non ramifié". Le cas général (avec ramification) est un peu plus compliqué et sera décrit dans [16]. On note $DiffMod_1(K,\sigma_q)$ la sous-catégorie pleine de $DiffMod(K,\sigma_q)$ formée des objets à pentes entières. C'est une sous-catégorie tannakienne, stable par extensions. Il est démontré dans [15] que le groupe de Galois $G^{(0)}_{mi,1}$ de $DiffMod_{mi,1}(K,\sigma_q)$ est égal à $\mathbf{C}^* \times G^{(0)}_f$, où $G^{(0)}_f$ est le groupe de Galois local fuchsien, qui est isomorphe à:

$$Hom_{gr}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}, \mathbf{C}^*) \times \mathbf{C}.$$

D'après 3.3.2, le groupe de Galois $G^{(0)}_{irr,1}$ de $DiffMod_1(K,\sigma_q)$ est le produit semi-direct d'un groupe unipotent et de $G^{(0)}_{mi,1}$. Le groupe unipotent est formé des automorphismes galoisiens dont l'effet ne se voit pas sur le gradué, c'est à dire ceux qui ont vocation à être considérés comme des Stokes.

Conjecturalement, il y a une description en termes de fibrés sur la courbe elliptique pour laquelle la filtration canonique correspond à la filtration de Harder-Narasimhan.

Références. -

1. Pour les cas fuchsien et modérément irrégulier (non ramifié), l'article soumis [15].
2. Pour le cas ramifié et, plus généralement,pour le cas irrégulier, l'article en préparation [16].