Systèmes aux q-différences singuliers réguliers: solutions canoniques, classification, matrice de connexion et monodromie

Jacques SAULOY
Laboratoire Emile Picard, UMR 5580
Université Paul Sabatier,118,route de Narbonne,31062,Toulouse Cedex, France.
E-mail : sauloy@picard.ups-tlse.fr

22 février 1999

Résumé

G.D. Birkhoff a posé, par analogie avec le cas classique des équations différentielles, le problème de Riemann-Hilbert pour les systèmes "fuchsiens" aux q-différences linéaires, à coefficients rationnels. Il l'a résolu dans le cas générique : l'objet classifiant qu'il introduit est constitué de la matrice de connexion P et des exposants en 0 et ∞. Nous reprenons sa méthode dans le cas général, mais en traitant symétriquement 0 et ∞ et sans recours à des solutions à croissance "sauvage". Lorsque q tend vers 1, P tend vers une matrice localement constante $\tilde{P}$ telle que les valeurs (en nombre fini) $\tilde{P}(a)^{-1}\tilde{P}(b)$ sont les matrices de monodromie du système différentiel limite (supposé non résonnant en 0 et ∞) en les singularités de $\mathbf{C}^*$.

Mots clés : Equations aux q-différences - Matrice de connexion - Monodromie - Fonctions hypergéométriques basiques.

Classification AMS : 05A30 - 33D - 39A10 - 58 F.

Abstract

G.D. Birkhoff extended the classical Riemann-Hilbert problem for differential equations to the case of "fuchsian" linear q-difference systems with rational coefficients. He solved it in the generic case : the classifying object which he introduces is made up of the connection matrix P, together with the exponents at 0 and ∞. We follow his method in the general case, but treat symetrically 0 and ∞ and use no "wildly" growing solutions. When q tends to 1, P tends to a locally constant matrix $\tilde{P}$ such that the (finitely many) values $\tilde{P}(a)^{-1}\tilde{P}(b)$ are the monodromy matrices of the limiting differential system (assumed to be non resonant at 0 and ∞) at the singularities on $\mathbf{C}^*$.

Keywords : q-difference equations - Connection matrix - Monodromy - Basic hypergeometric functions.

AMS Classification : 05A30 - 33D - 39A10 - 58 F.

Chapitre 0

Introduction

"Je suis convaincu que, tout comme pour les fonctions spéciales solutions d'équations différentielles, les formules intéressantes dérivent de considérations "géométriques" simples" (Jean-Pierre Ramis,[24]).

0.1 Histoire

0.1.1 Les racines et les branches

La théorie des équations aux q-différences est un sujet romantique, puisqu'il a connu l'intervention d'Euler, Jacobi, Ramanujan ... et, à un moindre degré, de Gauss et de Cauchy. Les identités d'Euler sur les partitions, la théorie des fonctions thêta de Jacobi, avec sa magnifique formule du triple produit, de nombreuses formules mystérieuses de Ramanujan y sont liées. On peut trouver une dérivation dans cet esprit de nombreuses identités d'Euler dans [14], et un lien direct entre la formule de Rogers-Ramanujan et une équation aux q-différences dans [3]. Ces deux livres contiennent aussi de nombreuses indications historiques.

C'est aussi un sujet en cours de renaissance. Ramis, dans [23] reprend les problèmes de comportement asymptotique des solutions étudiés par Poincaré, Picard, Valiron et les replace dans le cadre de la théorie des classes Gevrey ; ces recherches ont été poursuivies par Zhang dans la direction d'une théorie de la q-sommabilité (*voir* [30]). Etingof, van der Put, Singer ont étendu la théorie de Picard-Vessiot avec pour but une théorie de Galois (*voir* [12], [21] ; ce dernier ouvrage traite, plus généralement, des équations aux différences). En tant que variante multiplicative de la méthode d'Euler pour approcher les solutions d'équations différentielles, elles ont été utilisées dans l'étude des intégrales itérées (*voir* [20],[8]). Il y a une théorie géométrique ("holonome") des identités combinatoires, y compris q-combinatoires et une nouvelle approche de leur calcul formel (Zeilberger, Aomoto, Sabbah, Chyzak : *voir* [9], [11]). La théorie des groupes quantiques commence aussi à essaimer dans cette direction (*voir* [27]). Enfin, la tradition qui, depuis Birkhoff et Ore veut traiter équations différentielles, aux différences et aux q-différences dans un cadre unifié a été récemment reprise par Yves André qui a créé pour cela le cadre des connexions non commutatives (*voir* [2]).

0.1.2 q-analogies, classification et confluence

La série hypergéométrique *classique* a été généralisée par Heine, puis Ramanujan (*voir* [14], [22]) en la série hypergéométrique *basique*[1]

$$\Phi(a,b,c;q,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a;p)_n (b;p)_n}{(c;p)_n (p;p)_n} z^n \quad |q| > 1 \ , \ p = q^{-1} \ , \ (x;p)_n = \prod_{0\leq k\leq n-1} (1 - xp^k)$$

[1]On prendra garde que nous faisons, dans tout ce travail, l'hypothèse $|q| > 1$. Il est, bien sûr, essentiel de supposer que $|q| \neq 1$, mais certains des ouvrages cités supposent $|q| < 1$.

Si $a, b, c \in \mathbf{C}^*$, celle-ci est solution de l'équation aux q-différences à coefficients rationnels :

$$\Phi(q^2 z) - \frac{(a+b)z - (1+c/q)}{abz - c/q}\Phi(qz) + \frac{z-1}{abz - c/q}\Phi(z) = 0$$

Nous écrirons plutôt

$$\sigma_q^2\Phi - \frac{(a+b)z - (1+c/q)}{abz - c/q}\sigma_q\Phi + \frac{z-1}{abz - c/q}\Phi = 0$$

où l'on note $\sigma_q f(z) = f(qz)$ pour toute fonction sur la sphère de Riemann $\mathbf{S} = \mathbf{P}^1\mathbf{C}$. Ceci a motivé la résolution et la classification de telles équations fonctionnelles, sous le nom d'équations aux q-différences. (*voir* [1],[5], [6], [14], [23], [24]).

Réciproquement, on sait que, lorsque l'on fait tendre q vers 1, sous des conditions appropriées portant sur les paramètres, $\Phi(a, b, c; q, z)$ converge vers la série hypergéométrique : c'est au moins évident terme à terme, et cela reste vrai dans un sens moins formel (voir le traitement complet de cet exemple en 4.4.2). De telles q-analogies sont présentes à un degré plus ou moins important dans la plupart des exemples que nous avons cités au début de cette section. On peut légitimement considérer pas mal de ces phénomènes comme des cas de *confluence*.

Par analogie avec le cas classique des équations différentielles, G.D. Birkhoff a posé le problème de Riemann-Hilbert pour les systèmes linéaires aux q-différences à coefficients rationnels (*voir* [5]) :

(1) $$\sigma_q X = AX, \qquad A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$$

Le groupe de jauge $GL_n(\mathbf{C}(z))$ opère à gauche sur les solutions vectorielles ou matricielles de telles équations et donc sur les équations elles-mêmes, ce qui conduit à introduire la notion d'*équivalence méromorphe* : $A \sim (\sigma_q F)^{-1}AF$ lorsque $F \in GL_n(\mathbf{C}(z))$. Il s'agit alors de classifier ces systèmes modulo cette relation d'équivalence.

Notre but, dans ce travail, est de tenter de clarifier la géométrie sous-jacente. Dans ce premier rapport, nous étudions la *résolution*, la *classification* et la *confluence* d'une classe d'équations aux q-différences, les équations *fuchsiennes* (ainsi que la classe, qui n'est plus large qu'en apparence, des équations *singulières régulières*). Dans un rapport ultérieur ([25]), nous commencerons l'édification d'une *théorie de Galois* de ces équations sur ces bases, théorie qui devrait donc différer sensiblement de celle,plus algébrique et plus générale, de [21] (voir ci-dessous 0.2.3 et 0.5).

0.2 Résolution

0.2.1 Cas général

Le cas où $A(0)$ est singulière est illustré par l'équation $\sigma_q f = zf$ dont une solution typique est la fonction Θ : ce cas se caractérise par l'apparition de solutions à croissance sauvage (*voir* [23]). A l'opposé, si $A(0) = I_n$, le produit $\prod_{i \geq 1} A(q^{-i}z)$ définit une solution holomorphe en 0 et méromorphe sur $\mathbf{C}$. Le premier cas est considéré comme *irrégulier*, le second cas comme *régulier*.

Le cas intermédiaire est le cas singulier régulier, que nous étudierons plus particulièrement : c'est celui où l'on peut se ramener, via une transformation de jauge rationnelle, à supposer l'équation fuchsienne, c'est à dire telle que $A(0)$ et $A(\infty)$ sont inversibles. Les exemples les plus élémentaires sont : $\sigma_q f = cf, c \in \mathbf{C}^*$ et $\sigma_q f = f + 1$. Cette dernière se ramène en effet à une équation linéaire d'ordre 2, à matrice unipotente. Les solutions de telles équations sont les briques de base pour la résolution de toutes les équations fuchsiennes.

0.2.2 Cas fuchsien

On l'appelle fuchsien parce que la méthode de Frobenius marche et permet d'exhiber des solutions de forme très simple et à croissance modérée. Comme dans le cas fuchsien classique (des équations différentielles), nous pourrons même démontrer la réciproque. On peut cependant se rendre compte en étudiant la confluence qu'il y a déjà dans ce cas des aspects qui le rapprochent du cas irrégulier des équations différentielles.

Pour commencer par l'étude locale, supposons $A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$: un tel système est dit *fuchsien en* 0. En parfaite analogie avec la méthode de Frobenius pour les équations différentielles linéaires, on construit alors une solution matrice fondamentale $X \in GL_n(\mathbf{K}'_0)$ à coefficients dans une extension $\mathbf{K}'_0$ de $\mathbf{C}(\{z\})$ qui est un sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ et qui contient :

- Pour chaque $c \in Sp(A(0))$, un élément $e_{q,c}$ tel que $\sigma_q e_{q,c} = ce_{q,c}$. Il joue un rôle analogue à celui de z^γ et nous le nommerons *caractère d'exposant c*.
- Dans le cas où $A(0)$ n'est pas semi-simple, un élément l_q tel que $\sigma_q l_q = l_q + 1$. Il joue un rôle analogue à celui du logarithme.

L'équation fonctionnelle (1), réécrite[2] sous la forme $X(z) = A(z/q)X(z/q)$, entraine alors que les solutions sont en fait *à coefficients dans le sous-corps* $\mathbf{K_0} = \mathcal{M}(\mathbf{C})(l_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbf{C}^*})$ *de* $\mathbf{K}'_0$. En opposition à ce qui se passe avec les équations différentielles, l'opérateur aux q-différences σ_q propage dans $\mathbf{C}$ la propriété des solutions d'être méromorphes en 0. Ce n'est évidemment pas le cas des automorphismes infinitésimaux de la théorie des équations différentielles et c'est là une différence fondamentale.

Ceci se voit d'ailleurs déjà dans le cas régulier, qui, pour nous, est caractérisé par le fait que la structure de Jordan en 0 est triviale, autrement dit, $A(0) = I_n$. L'équation peut alors être résolue sans sortir de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$: notant Σ' le lieu polaire de A, il est aisé de voir que

[2] Le Petit Larousse Illustré donne comme également correctes les formes *réécrire* et *récrire*. On trouvera, dans la Gazette des Mathématiciens de janvier 1999, une argumentation en faveur de ce dernier. Mais au fond, c'est en fonction du plaisir de l'oeil que l'on tranche ...

le produit infini $A(z/q)A(z/q^2)$... converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}-q^{\mathbf{N}^*}\Sigma'$ et a des pôles sur $q^{\mathbf{N}^*}\Sigma'$. C'est évidemment une solution fondamentale (déterminant non nul) de l'équation si on la restreint à $\mathbf{C}-q^{\mathbf{N}^*}\Sigma$, Σ étant Σ' augmenté des zéros de $\det A$: c'est ce dernier ensemble qu'il faudra considérer comme le véritable lieu singulier de l'équation.

0.2.3 Le choix des briques de base

Classiquement (*voir* [1],[6]), on utilise respectivement les fonctions multivaluées $z^{\frac{\log(c)}{\log(q)}}$ et $\frac{\log(z)}{\log(q)}$ dans les rôles de $e_{q,c}$ et de l_q. Il faut alors prendre en compte conjointement les effets de l'automorphisme σ_q et ceux de la monodromie. Singer et Van der Put proposent dans [21] d'instancier les $e_{q,c}$ et l_q par des *symboles* algébriquement indépendants (sauf en ce qui concerne des relations obligées). Mais il est alors difficile d'interpréter les solutions comme des fonctions. Nous montrons au chapitre 1 comment résoudre (1) à l'aide de fonctions *uniformes.*

La question peut être formulée ainsi : quelle q-analogies suivre ? Il y en a tant ! L'analogie suivie ici (motivée, entre autres, par l'exemple des séries hypergéométriques basiques) est $(\sigma_q-1)/(q-1) \leftrightarrow \delta = z(d/dz)$ (*voir* [23]).

Désignons par Θ_q la fonction theta de Jacobi : $\sum_{n\in Z}(-1)^n q^{-n(n-1)/2}z^n$ (*voir* [23]). Elle satisfait la formule du triple produit de Jacobi :

$$\Theta_q(z) = (p;p)_\infty(z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty \quad (z;p)_\infty = \prod_{i\geq 0}(1-p^i z)$$

On en déduit l'équation fonctionnelle $\Theta_q(qz) = -qz\Theta_q(z)$. Nous prendrons alors

$$l_q(z) = z\Theta_q'(z)/\Theta_q(z) \quad \text{et} \quad e_{q,c}(z) = \Theta_q(z)/\Theta_q(c^{-1}z)$$

qui sont *méromorphes sur* $\mathbf{C}^*$. Les pôles (simples) de l_q sont les éléments de la spirale discrète $q^{\mathbf{Z}}$; les zéros (simples) et pôles (simples) de $e_{q,c}$ sont les éléments de $q^{\mathbf{Z}}$ et de $cq^{\mathbf{Z}}$ respectivement. Nous avons donc remplacé la *ramification* des choix classiques par des *spirales discrètes de pôles.* Ces pôles et leur géométrie vont en fait contrôler toute la situation, apportant un début d'illustration de l'importance de "considérations géométriques simples".

Nous obtenons ainsi des solutions fondamentales canoniques méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ et en donnons des formes normales. Dans le cas où le système est *non résonnant en* 0, c'est à dire où deux valeurs propres distinctes de $A(0)$ ne sont pas congrues modulo $q^{\mathbf{Z}}$, il y a même une forme canonique. Nous étendons de plus la résolution au cas d'un système *singulier régulier en* 0, c'est à dire, par définition, méromorphiquement équivalent à un système fuchsien en 0. Dans tous les cas, on peut écrire $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$ où :

(i) $M^{(0)}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$; les pôles de $M^{(0)}$ sur $\mathbf{C}^*$ forment une union finie de demi-spirales logarithmiques discrètes : $q^{\mathbf{N}^*}\mathcal{S}(A)$, où $\mathcal{S}(A)$ est l'ensemble formé des pôles de A et des pôles de A^{-1}.

(ii) $N^{(0)}$ est construite à partir des $e_{q,c}$ et de l_q ; les pôles de $N^{(0)}$ sur $\mathbf{C}^*$ forment une union finie de spirales logarithmiques discrètes déterminées par la structure de Jordan de $A(0)$: $q^{\mathbf{Z}}Sp(A(0))$ si $A(0)$ est semi-simple, $q^{\mathbf{Z}}Sp(A(0)) \cup q^{\mathbf{Z}}$ dans le cas général.

0.2.4 Le corps des constantes

Toutes les solutions dans $GL_n(\mathbf{K}'_0)$ s'obtiennent alors sous la forme $X^{(0)}V^{(0)}$ où $V^{(0)}$ est à coefficients dans le "corps des constantes" $(\mathbf{K}'_0)^{\sigma_q}$.

On voit facilement que (pour notre choix standard de caractères) celui ci est égal à $\mathcal{M}(\mathbf{C})^{\sigma_q}$, c'est à dire au corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Le changement de variable $z = e^{2\imath\pi x}$ permet d'identifier le groupe $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ au tore complexe $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$, avec la notation $q = e^{-2\imath\pi\tau}$, $Im(\tau) > 0$. Le corps $\mathcal{M}(\mathbf{C})^{\sigma_q}$ s'identifie alors au corps des fonctions elliptiques $\mathcal{M}(E)$.

Notons que la réalisation des caractères comme fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ entraine *nécessairement* la présence d'un "cocycle" non trivial de fonctions elliptiques, les $\frac{e_{q,cd}}{e_{q,c}e_{q,d}}$: c'est cette circonstance qui fait du corps des constantes le corps des fonctions elliptiques $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ tout entier pour notre choix standard de carctères et, dans tous les cas, une extension transcendante de $\mathbf{C}$. Ceci est la différence principale avec [21], où les caractères sont des symboles et peuvent être astreints à vérifier : $e_{q,cd} = e_{q,c}e_{q,d}$, ce qui entraine que leur corps des constantes est $\mathbf{C}$. Cela a, entre autres, des conséquences pour la théorie de Galois, puisqu'une approche classique de celle-ci est la théorie de Picard-Vessiot, qui exige que le corps des constantes ne bouge pas.

0.3 Classification

0.3.1 Relations d'équivalence

Si l'on admet qu'une transformation de jauge rationnelle $X = FY$, $F \in GL_n(\mathbf{C}(z))$, n'affecte pas essentiellement la nature analytique des solutions, on est naturellement conduit à considérer l'équation de matrice A satisfaite par X comme équivalente à l'équation de matrice B satisfaite par Y : $A \sim B = (\sigma_q F)^{-1}AF$. C'est la notion d'équivalence méromorphe sur $\mathbf{S}$, ou d'équivalence rationnelle.

Si l'on veut l'implication et non l'équivalence, apparait la version moins symétrique : $(\sigma_q F)B = AF$, $F \in M_n(\mathbf{C}(z))$, qui donnera lieu dans [25] à une notion plus générale de morphismes et à une version plus fonctorielle de la classification. En termes de logique, on peut comprendre cette égalité comme une "weakest precondition" : quelle condition sur F

garantit que FY est solution de (1) ? On en trouve une description plus intrinsèque dans [21] grace à la notion de "difference modules".

Une autre extension de cette relation d'équivalence apparaitra lors des études locales : si l'on impose seulement à F dêtre méromorphe sur $\mathbf{C}$ (ou, dualement, sur $\mathbf{S} - \{0\}$), on obtient encore d'utiles théorèmes de réduction qui permettront de normaliser les solutions.

0.3.2 Riemann-Hilbert-Birkhoff

A un système fuchsien en 0 et en ∞, et à des solutions fondamentales $X^{(0)}$ et $X^{(\infty)}$ en 0 et en ∞, G.D. Birkhoff associe la matrice de connexion $P = (X^{(\infty)})^{-1}X^{(0)}$, dont les coefficients sont σ_q-invariants, multivalués et peuvent être vus comme des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, automorphes pour le réseau $(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ (où $\mathbf{Z}\tau$ agit trivialement et $\mathbf{Z}$ par monodromie). Il code le système (1) à l'aide de P et des exposants en 0 et en ∞ et montre que l'on peut résoudre le problème inverse dans le cas où $A(0)$ et $A(\infty)$ sont semi-simples.

Malgré les hypothèses fuchsiennes symétriques en 0 et ∞, Birkhoff commence par dissymétriser le problème, puis fait intervenir des fonctions à croissance sauvage, du type $q^t \mapsto q^{t(t-1)/2}$ (*voir* [23]). Selon [21], la construction de la matrice de connexion présente des ambiguités dans certains cas. Il est en tout cas probable que la matrice de connexion de Birkhoff n'a pas de très bonnes propriétés multiplicatives. Ces difficultés sont surmontées par van der Put et Singer, qui donnent une classification dans [21]. Mais leurs briques de base sont des symboles formels, ils introduisent les fonctions a posteriori et l'espace sur lequel celles-ci vivent est assez compliqué.

0.3.3 Comment classifier avec des fonctions uniformes

Nous montrons au chapitre 2 que nos solutions méromorphes conduisent à une matrice de connexion *elliptique*, c'est à dire à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbf{E})$. Notre méthode fait jouer un rôle symétrique à 0 et ∞ et évite le recours à des fonctions à croissance sauvage. Nous obtenons alors le théorème de classification des systèmes singuliers réguliers (par la matrice de connexion, assortie des structures de Jordan en 0 et ∞), ainsi que des précisions sur la possibilité de prescrire les pôles.

0.4 Confluence

Pour donner un sens géométrique à ces constructions, nous étudions la classique confluence d'équations aux q-différences vers des équations différentielles lorsque q tend vers 1.

0.4.1 Confluence des solutions

Nous nous restreignons pour cela au cas fuchsien non résonnant. Le système admet alors une unique solution $X^{(0)} = M^{(0)} e_{A(0)}$, où $M^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$, $M^{(0)}(0) = I_n$. Sous les mêmes hypothèses en ∞, on introduit la solution $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} e_{A(\infty)}$ et la matrice de connexion $P = (X^{(\infty)})^{-1} X^{(0)}$.

Nous supposerons que $q \to 1$ *le long d'une spirale logarithmique* : $q = q_0^{\epsilon}$, c'est à dire $\tau = \tau_0 \epsilon$, $q_0 = e^{-2i\pi\tau_0}$, où l'on a fixé τ_0 tel que $Im(\tau_0) > 0$ et où $\epsilon \to 0^+$. Les spirales et demi-spirales logarithmiques discrètes $q^{\mathbf{Z}}$, $q^{\mathbf{N}}$ se condensent alors en des coupures spirales $q_0^{\mathbf{R}}$, $q_0^{\mathbf{R}^+}$ de $\mathbf{S}$. Nous supposons de plus que $A = A_\epsilon = I_n + (q-1)B_\epsilon$, où $B_\epsilon \to \tilde{B}$. Sous des hypothèses appropriées, les solutions fondamentales canoniques de (1) tendent alors vers celles de

$$\delta \tilde{X} = \tilde{B} \tilde{X} \tag{2}$$

obtenues par la méthode de Frobenius (chapitre 3). Bien que nos solutions canoniques à (1) soient sans monodromie, ce n'est évidemment pas possible en général pour les solutions de (2). En fait, les spirales et demi-spirales discrètes de pôles des solutions de (1) se transforment, quand $\epsilon \to 0^+$, en des *coupures spirales* qui rendent les solutions de (2) *uniformes.*

0.4.2 Confluence de la matrice de connexion et monodromie

Supposons maintenant les mêmes conditions satisfaites en ∞, et notons $X_\epsilon^{(0)}$, $X_\epsilon^{(\infty)}$ et P_ϵ les solutions canoniques et la matrice de connexion associées. On montre alors, au chapitre 4, que la matrice P_ϵ tend vers une matrice *localement constante* $\tilde{P}$; celle-ci est définie sur $\mathbf{S}$ privé de toutes les coupures des solutions en 0 et ∞, c'est à dire sur une union finie d'ouverts connexes : $\tilde{P}$ prend donc un nombre fini de valeurs $\tilde{P}_0,\ldots,\tilde{P}_r$. En prolongeant les déterminations des solutions en 0 et en ∞ le long de chemins qui évitent les diverses coupures, on conclut alors que les $\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1} (1 \leq j \leq r)$ sont les matrices de monodromie de (2) en les singularités autres que 0 et ∞ (la monodromie en 0 et ∞ est fournie par les structures de Jordan de $\tilde{B}(0)$ et $\tilde{B}(\infty)$).

Le résultat obtenu évoque d'ailleurs de façon frappante la description du groupe de Galois dans [12] (pour le cas régulier) et dans [21] (pour le cas singulier régulier général). Ces auteurs décrivent en effet le groupe de Galois comme engendré par les $P(a)^{-1}P(b)$, P étant la matrice de connexion. Nous retrouverons dans [25] un énoncé similaire, équivalent à celui de [12] dans le cas régulier mais malheureusement beaucoup plus compliqué que celui de [21] dans le cas général.

0.4.3 Exemples

Le jeu du franchissement des coupures, qui proviennent elles-mêmes des barrières de pôles, illustre à merveille le rôle prépondérant de la géométrie des pôles ! Ceux-ci se constituent en barrières en forme de spirales logarithmiques discrètes, qui se condensent, lorsque $q \to 1$, en des coupures qui donnent lieu à des automorphismes de monodromie.

Nous espérons de même comprendre les automorphismes galoisiens *avant confluence* (donc au niveau des équations aux q-différences) comme des automorphismes de monodromie ; si nous pouvons observer de telles transformations, nous supposerons que l'on a tourné autour d'un point, et donc qu'il y avait un point !

Le phénomène décrit ci-dessus a d'abord été observé sur les trois exemples décrits en 4.4. Il peut être agréable de les étudier en parallèle avec la lecture de tout ce rapport. Ils sont plutôt une illustration de la théorie qu'une application, et sont traités "à la main". D'ailleurs, comme pour les équations différentielles, on utilise dans la pratique des équations plutôt que des systèmes, on en recherche les exposants à l'aide de l'équation caractéristique, etc...

0.5 Perspectives galoisiennes

L'étude présentée ici est plutôt algorithmique et calculatoire ; elle fait pourtant déjà apparaitre un important soubassement géométrique. Les spirales de pôles ; les diviseurs des caractères et des fonctions thêta ; le cocycle des caractères : tout montre que la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ joue un rôle crucial.

La confluence peut être vue comme une situation de dégénérescence de courbes elliptiques ; on l'observe déjà ici explicitement en ce qui concerne la dégénérescence des réseaux dans $\mathbf{C}$.

Nous n'avons aucun espoir d'une théorie de Picard-Vessiot : notre corps des constantes est bien trop gros. Pourtant, l'apparition de défauts d'unicité dans la classification qui sont des matrices de $GL_n(\mathbf{C})$ nous laisse espérer que nous pourrons (comme l'ont fait van der Put et Singer dans [21]) construire un groupe de Galois sur $\mathbf{C}$: nous verrons dans [25] que c'est bien le cas.

Enfin, le rôle central (pour la classification) de l'uniformisation de la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ à l'aide de fonctions thêta, indique la possibilité d'étendre ces résultats au cas p-adique. Sur une suggestion de Yves André, ceci sera fait autant que possible dans le cadre plus fonctoriel (en fait, tannakien) de [25]. On verra alors qu'il n'est pas indifférent d'avoir travaillé sur le modèle "multiplicatif" $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ de la courbe elliptique plutôt que sur son modèle "additif" $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$.

Remerciements

Ce travail fait partie d'une thèse sous la direction de Jean-Pierre Ramis. La partie présentée dans ce rapport a donné lieu à la publication de deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (janvier 1999) et à la soumission d'un article.

Je remercie chaleureusement Jean-Pierre pour son soutien et pour ses conseils, et surtout pour m'avoir fait partager sa vision géométrique de ce monde fascinant, ainsi que d'autres de ses rêves. J'espère avoir traduit un peu de la beauté de cette vision.

C'est également avec plaisir que je remercie Michèle Loday-Richaud pour une discussion sur la classification des équations différentielles singulières régulières qui n'a pas peu contribué à me désembrumer ; et Jean-Claude Sikorav pour des lumières sur le théorème de Birkhoff et sur d'autres phénomènes complexes, et aussi pour être *toujours* prêt à parler de maths, *quelles qu'elles soient.*

0.6 Notations générales

On prendra garde à la convention $|q| > 1$ adoptée ici et qui varie d'une source à l'autre.

On fixe[3] un nombre complexe τ de partie imaginaire > 0, et l'on pose $q = e^{-2i\pi\tau}$.

Formules de q-combinatoire

On notera $p = 1/q$ et

$$(x;p)_n = \prod_{0 \leq k \leq n-1} (1 - xp^k)$$

$$(x;p)_\infty = \prod_{0 \leq k} (1 - xp^k)$$

Opération de $q^{\mathbf{Z}}$

On notera $\mathbf{S}$ la sphère de Riemann, c'est à dire la droite projective complexe $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré $\{z \in \mathbf{C} \ / \ Im(z) > 0\}$.

Le groupe cyclique $q^{\mathbf{Z}}$ agit sur $\mathbf{S}$ par homographies $z \mapsto qz$, avec deux points fixes 0 et ∞ (les seuls "vrais points" de la théorie !) ; il y a donc des actions sur leurs voisinages ouverts invariants $\mathbf{C}$, $\mathbf{S} - \{0\}$ et l'intersection de ceux-ci $\mathbf{C}^*$.

Diverses parties (en générales finies) $\Sigma \subset \mathbf{C}^*$ engendreront des spirales logarithmiques discrètes également invariantes $q^{\mathbf{Z}}\Sigma$, voire des demi-spirales positivement ou négativement invariantes $q^{\mathbf{N}}\Sigma$, $q^{\mathbf{N}^*}\Sigma$, $q^{-\mathbf{N}}\Sigma$ etc...

Si f est une fonction à valeurs scalaires, vectorielles ou matricielles sur une partie convenable (c'est à dire, en fait, q-invariante) de $\mathbf{S}$, on note $\sigma_q f(z) = f(qz)$.

Corps des "constantes"

Le changement de variables $z = e^{2i\pi x}$ permet d'identifier le groupe $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ à la courbe elliptique $\mathbf{E} = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ et $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ (corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ et σ_q-invariantes) à $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ (corps des fonctions elliptiques).

Soyons plus explicite sur ce point très important. L'application $x \mapsto z = e^{2i\pi x}$ identifie $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ au sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ formé des fonctions 1-périodiques. L'action de σ_q sur $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ s'étend à $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ par l'action sur la variable : $x \mapsto x - \tau$ (qui est un relèvement de $z \mapsto qz$). L'invariance sous σ_q d'un élément de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ se traduit donc, dans $\mathcal{M}(\mathbf{C})$, par la τ-périodicité ; $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ est ainsi identifié au sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ formé des fonctions

[3] Les notations liées à la variation de q sont spécifiques de la deuxième partie et seront données alors.

admettant $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ pour réseau des périodes, c'est à dire au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ des fonctions méromorphes sur le tore complexe $\mathbf{E} = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ (fonctions elliptiques).

Fonctions de base

Elles sont issues de la théorie des fonctions thêta de jacobi. La plus importante :

$$\Theta_q(z) = \sum_{n \in Z} (-1)^n q^{-\frac{n^2-n}{2}} z^n = \Theta_q(z) = (p;p)_\infty (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty$$

D'un usage plus épisodique :

$$\Theta_q^+(z) = (z;p)_\infty = \prod_{r \geq 0} (1 - q^{-r} z)$$

La famille des caractères est *en général* (mais pas toujours !) définie par

$$e_{q,c} = \Theta_q / \Theta_{q,c} \text{ avec : } \Theta_{q,c}(z) = \Theta_q(c^{-1} z)$$

Enfin, le succédané du logarithme :

$$l_q(z) = z\Theta'_q(z)/\Theta_q(z)$$

Pour diverses manipulations algébriques, on aura recours aux polynômes de Newton en l_q, que nous noterons :

$$l_q^{(k)} = \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (l_q - i) = \binom{l_q}{k} \quad k \in \mathbf{N}$$

Corps de fonctions

De façon générale, nous noterons $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann X.

Il y a tout d'abord les trois corps de coefficients :

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}(z) \subset \mathbf{k}_0 = \mathcal{M}(\mathbf{C}) \subset \mathbf{k}'_0 = \mathbf{C}(\{z\})$$

ainsi que $\mathbf{k}_\infty$ et $\mathbf{k}'_\infty$ définis de manière évidente en posant $w = 1/z$. Ces sorps admettent les extensions :

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{k}_0(\Theta'_q, (\Theta_{q,c})_{c \in \mathbf{C}^*}) \subset \mathbf{L}'_0 = \mathbf{k}'_0(\Theta'_q, (\Theta_{q,c})_{c \in \mathbf{C}^*})$$

et les sous-extensions (plus utiles)

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0(l_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbf{C}^*}) \subset \mathbf{K}'_0 = \mathbf{k}'_0(l_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbf{C}^*})$$

Notons les inclusions $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{L}_0 \subset \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$.

Matrices

Matrices servant à la réduction de Jordan :

$$\xi_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .. & ... \\ ... & ... & ... & ... & .. & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\textit{taille } m)$$

$$L_m = \xi_{1,m}^l = \begin{pmatrix} l^{(0)} & l^{(1)} & ... & l^{(m-1)} \\ 0 & l^{(0)} & ... & l^{(m-2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & l^{(0)} \end{pmatrix} \qquad l^{(k)} = \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (l-i) = \binom{l}{k} \qquad k \in \mathbf{N}$$

Dans cette dernière, l sera en général instancié par l_q.

Matrices servant à des algorithmes de réduction du type pivot de Gauss :

$$T_{i,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_i & ... & \alpha_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \qquad D_{i,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & v & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, matrices servant à la réduction de Jordan “renormalisée” au chapitre 4 :

$$L'_{c,m} = \begin{pmatrix} l_q^{(0)} & (\eta/c)^1 l_q^{(1)} & ... & (\eta/c)^{m-1} l_q^{(m-1)} \\ 0 & l_q^{(0)} & ... & (\eta/c)^{m-2} l_q^{(m-2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & l_q^{(0)} \end{pmatrix} = (\xi'_{1,\eta/c,m})^{l_q}$$

$$\xi'_{\lambda,\mu,m} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .. & ... \\ ... & ... & ... & ... & .. & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \mu \xi_{\lambda/\mu,m}$$

Ici, $\eta = q - 1$.

Solutions canoniques et classification

Chapitre 1

Théorie de Frobenius : construction de solutions locales

1.1 Théorie des fonctions

On définit dans ce chapitre un catalogue de fonctions[1] de base, dont on établit les propriétés nécessaires (analyticité, pôles, équations fonctionnelles...). Le but est essentiellement d'avoir des fonctions jouant un rôle analogue à celui de de $\log(z)$ et de z^γ dans le cas des équations différentielles linéaires. Mais nos fonctions de base n'ont pas de ramification : elles sont toutes dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$.

Avec les germes de fonctions holomorphes, elles serviront à construire les solutions au voisinage de 0 des équations aux q-différences fuchsiennes, et, plus généralement, singulières régulières (cf. Introduction). Nous parlons de germes, car c'est la forme que nous presctivons a priori pour plagier la méthode de Frobenius ; en réalité, il apparaitra a posteriori que l'on obtient des coefficients *méromorphes sur* $\mathbf{C}^*$.

1.1.1 Θ_q^+ et Θ_q

On introduit, classiquement la fonction thêta (*voir* [14], [23], [24]) :

$$\Theta_q(z) = \sum_{n\in Z} (-1)^n q^{-\frac{n^2-n}{2}} z^n \tag{1.1}$$

Elle est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et vérifie les équations fonctionnelles :

$$\Theta_q(qz) = -qz\Theta_q(z)$$
$$\Theta_q(1/z) = -(1/z)\Theta_q(z)$$

Outre les deux équations ci-dessus, elle possède de nombreuses propriétés multiplicatives, dont la plus notable est la formule du triple produit de Jacobi (pour les notations, cf. Introduction) :

$$\Theta_q(z) = (p;p)_\infty (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty \tag{1.2}$$

En vue de l'étude des exemples, aux chapitres 3 et 4 (déformation de $(1-z/z_0)^\alpha$), on notera alors

$$\Theta_q^+(z) = (z;p)_\infty = \prod_{r\geq 0} (1-q^{-r}z)$$

Celle-ci est caractérisée par l'équation fonctionnelle :

$$\Theta_q^+(qz) = (1-qz)\Theta_q^+(z)$$

Les zéros de Θ_q (resp. de Θ_q^+) sont simples ; ce sont les éléments de $q^{\mathbf{Z}}$ (resp. de $q^{\mathbf{N}}$).

Les changements de variable $q = e^{-2i\pi\tau}$, $z = e^{2i\pi x}$ ramènent Θ_q aux fonctions thêta classiques de Jacobi. Cela sera exploité aux chapitres 3 et 4 pour étudier la dépendance en q des solutions d'équations aux q-différences.

[1] Ici, fonctions de z seul : le comportement en fonction de q sera étudié aux chapitres 3 et 4

1.1.2 Caractères

Nous nommerons *caractères* les analogues, dans notre théorie, des fonctions z^γ de la théorie classique des équations différentielles. Un caractère d'exposant c est une solution méromorphe dans $\mathbf{C}^*$ de l'équation fonctionnelle :

$$\sigma_q f = cf, \qquad\qquad (c \in \mathbf{C}^*)$$

Notons qu'il suffit d'exiger que f soit méromorphe dans un voisinage épointé de 0 dans $\mathbf{C}^*$; la relation $f(z) = cf(z/q)$ permet alors de prolonger f récursivement en un unique caractère.

Il découlera de 1.1.5 que l'on ne peut choisir les $e_{q,c}$ dans $\mathbf{C}(\{z\})$, mais cela se voit aussi directement par l'unicité de la série de Laurent.

L'équation fonctionnelle de Θ_q fournit une famille de caractères au comportement "raisonnable" en 0 : on pose $e_{q,c} = \Theta_q/\Theta_{q,c}$, où l'on a noté $\Theta_{q,c}(z) = \Theta_q(c^{-1}z)$. De l'égalité $\Theta_{q,c}(qz) = -qc^{-1}z\Theta_{q,c}(z)$ s'ensuit alors que $e_{q,c}$ est un caractère. Il vérifie en outre l'équation fonctionnelle :

$$e_{q,c}(1/z) = c/e_{q,c}(cz)$$

Son diviseur des zéros et des pôles (sur $\mathbf{C}^*$)[2] est

$$\mathrm{div}_{\mathbf{C}^*}(e_{q,c}) = \sum_{n\in Z}[q^n] - \sum_{n\in Z}[q^n c]$$

En tant que fonction automorphe pour $q^{\mathbf{Z}}$, $e_{q,c}$ a également un diviseur des zéros et des pôles sur le tore $\mathbf{E} = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$:

$$\mathrm{div}_{\mathbf{E}}(e_{q,c}) = [0] - [\overline{c}]$$

où $\overline{c}$ désigne la classe de c dans $\mathbf{E}$.

Les *relations en famille* entre les $e_{q,c}$ nous seront également utiles :

$$e_{q,1}(z) = z$$
$$e_{q,qc}(z) = -c^{-1}ze_{q,c}(z) \in \mathbf{C}^* z e_{q,c}(z)$$
$$e_{q,c^{-1}}(z) = 1/e_{q,c}(cz) = c^{-1}e_{q,c}(1/z)$$

Le choix d'une famille de caractères est une étape pas du tout innocente et qui appelle quelques commentaires.

[2]Exceptionnellement, nous mélangeons la notation additive des diviseurs avec la notation multiplicative de $\mathbf{C}^*$, ce qui peut prêter à confusion. Par la suite, nous ne considèrerons que des diviseurs sur $\mathbf{E}$ et nous nous en tiendrons à la notation additive.

1. L'algorithme de résolution locale d'une équation aux q-différences fuchsienne en 0 (cf. section 1.2) est indépendant du choix d'une famille particulière de caractères indexée par $\mathbf{C}^*$. Cette liberté de choix sera exploitée au chapitre 3 pour controler la polarité des solutions.
2. Une famille un peu plus compliquée aurait donné la relation un peu plus agréable : $e_{q,qc}(z) = z e_{q,c}(z)$. C'est le cas, par exemple, si l'on prend
$$e_{q,c}(z) = \frac{\Theta_q(z)\Theta_q(cz^2)}{\Theta_q(cz)\Theta_q(z^2)} = \frac{e_{q,c^{-1}}(z)}{e_{q,c^{-1}}(z^2)}$$
(variante : $\frac{e_{q,c}(z^2)}{e_{q,c}(z)}$). On ne peut malheureusement pas faire beaucoup plus simple !

   En revanche, il ne nous est pas possible d'exiger la relation encore plus agréable : $e_{q,c}e_{q,d} = e_{q,cd}$ pour $c, d \in \mathbf{C}^*$; ceci, contrairement aux axiomes imposés à la famille des *symboles* $e(c)$ dans [21],p. 150.

   Soit en effet une famille de caractères e'_c satisfaisant cet axiome. Alors la fonction $f_c = e'_c / e_{q,c}$ est invariante sous σ_q et peut donc être considérée comme une fonction elliptique. De plus, $f_c f_d / f_{cd} = e_{q,cd}/e_{q,c}e_{q,d}$ par hypothèse. Le diviseur de cette fonction sur $\mathbf{E}$ est $[\overline{c}] + [\overline{d}] - [0] - [\overline{cd}]$. A un élément $c \in \mathbf{C}^*$, on associe le diviseur de degré 0 sur $\mathbf{E}$: $[\overline{c}] - [0] - \mathrm{div}_{\mathbf{E}}(f_c) \in Div^0(\mathbf{E})$. L'application $\mathbf{C}^* \to Div^0(\mathbf{E})$ ainsi définie est alors un morphisme de groupes (à cause de l'égalité ci-dessus). Il est donc trivial, puisque la source est un groupe divisible et le but un groupe abélien libre. Mais, en le composant avec l'épimorphisme d'évaluation $Div^0(\mathbf{E}) \to \mathbf{E}$, $\sum m_i[\alpha_i] \mapsto \sum m_i \alpha_i$, (dont le noyau est formé des diviseurs des fonctions elliptiques et contient donc en particulier $\mathrm{div}_{\mathbf{E}}(f_c)$), on obtient la projection canonique de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, contradiction.

   Un peu plus directement, on peut dire que $c \mapsto \mathrm{div}_{\mathbf{E}}(e'_c)$ serait un morphisme de groupes $\mathbf{C}^* \to Div^0(\mathbf{E})$ donc trivial ; mais en même temps, chaque $\mathrm{div}_{\mathbf{E}}(e'_c)$ doit être équivalent à $\mathrm{div}_{\mathbf{E}}(e_{q,c})$, contradiction.

   En fait, il est facile de voir que l'application $(\overline{c}, \overline{d}) \mapsto e_{q,c}e_{q,d}/e_{q,cd} \pmod{\mathbf{C}^*}$ est bien définie et que c'est le cocycle associé à la suite exacte (non scindée !) :
$$\{1\} \to \mathcal{M}(\mathbf{E})/\mathbf{C}^* \to Div^0(\mathbf{E}) \to \mathbf{E} \to \{0\}$$
(*voir* [7]). De plus, toute famille de caractères définit un cocycle équivalent.
3. Du point précédent, il découle que l'extension de $\mathbf{C}$ engendrée par les $e_{q,c}e_{q,d}/e_{q,cd}$ est transcendante. Elle n'est pas nécessairement égale à $\mathcal{M}(\mathbf{E})$: par exemple en prenant les $e'_c(z) = e_{q,c'}(z^2)$ (c' étant une racine carrée arbitraire de c), on obtient la période $\tau/2$ et il est facile de réaliser ainsi toutes sortes d'isogénies. Le théorème de Riemann-Hurwitz (*voir par exemple* [10]) nous garantit que le corps obtenu est de genre 0 ou 1. J'ignore s'il est possible d'obtenir le genre 0.

1.1.3 "Logarithme"

Pour prendre en compte la partie unipotente des équations aux q-différences, nous aurons besoin, en parfaite analogie avec le rôle du logarithme dans la théorie classique des équations différentielles, de résoudre l'équation (non homogène !) :

$$\sigma_q f = f + 1 \tag{1.3}$$

Comme pour les caractères, on obtient une solution à croissance "raisonnable" en 0 à l'aide de la fonction Θ_q. Dérivant logarithmiquement l'équation fonctionnelle satisfaite par Θ_q, on trouve

$$q\Theta'_q(qz)/\Theta_q(qz) = 1/z + \Theta'_q(z)/\Theta_q(z)$$

Ceci conduit à introduire la solution :

$$l_q(z) = z\Theta'_q(z)/\Theta_q(z)$$

De la formule du triple produit, on déduit un développement de l_q en une série convergeant normalement sur tout compact de $\mathbf{C}^* - q^{\mathbf{Z}}$:

$$l_q(z) = \sum_{r \geq 0} -q^{-r}z/(1 - q^{-r}z) + \sum_{r \geq 1} q^{-r}z^{-1}/(1 - q^{-r}z^{-1})$$

Outre l'équation requise, le "logarithme" l_q vérifie

$$l_q(1/z) = 1 - l_q(z)$$

Il est holomorphe sur $\mathbf{C}^* - q^{\mathbf{Z}}$ et admet des pôles simples sur $q^{\mathbf{Z}}$.

En vue de l'étude des exemples, aux chapitres 3 et 4 (déformation de $\log(1 - z/z_0)$), on considère également la partie holomorphe en 0 de l_q :

$$l_q^+(z) = z(\Theta_q^+)'(z)/\Theta_q^+(z)$$

Elle est holomorphe sur $\mathbf{C}^* - q^{\mathbf{N}}$, et s'y développe en une série normalement convergente sur tout compact :

$$l_q(z) = \sum_{r \geq 0} -q^{-r}z/(1 - q^{-r}z)$$

Ses pôles sont simples, ce sont les éléments de $q^{\mathbf{N}}$. Elle satisfait aux relations

$$l_q(z) = l_q^+(z) - l_q^+(1/z) + 1/(1 - z)$$

$$l_q^+(qz) = -qz/(1 - qz) + l_q^+(z)$$

Cette dernière relation, avec l'égalité $l_q^+(0) = 0$ et l'holomorphie (ou même simplement la continuité en 0 !), caractérise l_q^+. Donnons enfin son développement en série entière au voisinage de 0 (de rayon de convergence 1) :

$$l_q(z) = \sum_{n \geq 1} -q^n z^n/(q^n - 1)$$

1.1.4 Les constantes

Dans cette section et la suivante, on note $\mathbf{k}'_0$ le corps $\mathbf{C}(\{z\})$ des séries de Laurent en 0, et $\mathbf{L}'_0$ l'extension de $\mathbf{k}'_0$ engendrée par les $\Theta_{q,c}$ ($c \in \mathbf{C}^*$) et Θ'_q. Les éléments de $\mathbf{L}'_0$ sont donc des germes de fonctions méromorphes sur des voisinages épointés de 0 dans $\mathbf{C}^*$. On va étudier le sous-corps $(\mathbf{L}'_0)^{\sigma_q}$ des "constantes" de $\mathbf{L}'_0$, c'est à dire des invariants sous l'action canonique de σ_q. Un germe $f \in (\mathbf{L}'_0)^{\sigma_q}$ est tel que $f(z) = f(z/q)$, ce qui permet récursivement de le prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^*$, d'où un morphisme injectif : $(\mathbf{L}'_0)^{\sigma_q} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$: on va voir que c'est en fait une *égalité*.

On a vu dans l'introduction comment l'application $x \mapsto z = e^{2i\pi x}$ permet d'identifier $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ au sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ formé des fonctions admettant $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ pour réseau des périodes, c'est à dire au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ des fonctions méromorphes sur le tore complexe $\mathbf{E} = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ (fonctions elliptiques).

Réciproquement, la théorie des fonctions elliptiques ([18], [19] p. 24, [29] p. 474) nous dit que tout élément f de $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ est, à un facteur constant près, de la forme

$$\frac{\prod_{1 \leq i \leq r} \theta_1(x - \alpha_i)}{\prod_{1 \leq i \leq r} \theta_1(x - \beta_i)}$$

Dans cette écriture, $\sum_{1 \leq i \leq r} [\alpha_i] - \sum_{1 \leq i \leq r} [\beta_i]$ est un relèvement dans $\mathbf{C}$ de $\mathrm{div}_{\mathbf{E}}(f)$ choisi de sorte que $\sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i = \sum_{1 \leq i \leq r} \beta_i$. Modulo l'identification ci-dessus, cela signifie que tout élément de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ est, à un facteur constant près, de la forme

$$\frac{\prod_{1 \leq i \leq r} \Theta_{q,a_i}(z)}{\prod_{1 \leq i \leq r} \Theta_{q,b_i}(z)}$$

où $\prod_{1 \leq i \leq r} a_i = \prod_{1 \leq i \leq r} b_i$. Ceci montre que $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = (\mathbf{L}'_0)^{\sigma_q}$ et que ce corps des constantes est engendré par les produits de cette forme.

On voit même, par récurrence sur r, que l'on peut se restreindre aux $\Theta_{q,a}\Theta_{q,b}/\Theta_q\Theta_{q,ab}$. Si l'on a fait les choix standards $e_{q,c} = \Theta_q/\Theta_{q,c}$, on en déduit que les $e_{q,ab}/e_{q,a}e_{q,b}$ ($a, b \in \mathbf{C}^*$) sont une famille de générateurs.

Introduisons à présent

- L'extension $\mathbf{K}'_0$ de $\mathbf{k}'_0$ engendrée par les $e_{q,c}$ ($c \in \mathbf{C}^*$) et l_q ;
- l'extension $\mathbf{K}_0$ de $\mathbf{k}_0 = \mathcal{M}(\mathbf{C})$ engendrée par ces mêmes éléments : $\mathbf{K}_0$ est donc un sous-corps de $\mathbf{K}'_0$.

On peut d'ailleurs se restreindre aux $c \neq 1$ et tels que $1 \leq |c| < |q|$, car $e_{q,1}$ et les $e_{q,qc}/e_{q,c}$ sont dans $\mathbf{k}_0$. Nous donnerons au 1.1.5 une vue d'ensemble des propriétés algébriques de ces deux corps, à l'exception de l'étude de leurs automorphismes qui sera abordée dans [25].

On montrera au 1.2.4 que les coefficients des solutions locales en 0 des équations aux q-différences fuchsiennes en 0 peuvent être recherchées dans $\mathbf{K}'_0$, et que l'équation fonctionnelle assure alors a posteriori qu'elles sont en fait à coefficients dans $\mathbf{k}'_0$.

Les corps $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{K}'_0$ sont des sous-corps de $\mathbf{L}$. Sous l'hypothèse d'un choix standard des caractères, il résulte de ce qui précède qu'ils contiennent $\mathcal{M}(\mathbf{E})$ et sont donc des extensions de $\mathbf{L}^{\sigma_q}$. On en déduit la

Proposition

Tous ces corps de constantes sont égaux au corps des fonctions elliptiques :

$$(\mathbf{K}_0)^{\sigma_q} = (\mathbf{K}'_0)^{\sigma_q} = (\mathbf{L}'_0)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbf{E})$$

□

1.1.5 Relations algébriques

Les relations $\Theta_{q,c} = e_{q,c}\Theta_q$ et $(\Theta_q)'(z) = l_q(z)\Theta_q(z)/z$ montrent que $\mathbf{L}'_0 = \mathbf{K}'_0(\Theta_q)$. Cette extension est transcendante pure :

Proposition 1

Θ_q est transcendant sur $\mathbf{K}'_0$ (et donc sur $\mathbf{K}_0$).

Preuve

Elle repose sur les propriétés de croissance de Θ_q au voisinage de 0 (*voir* [23]). Mais ici, comme dans les démonstrations qui suivront, on a donné aux arguments une allure plus algébrique qui devrait en faciliter la réutilisation.

En itérant l'équation fonctionnelle, on voit que $\Theta_q(q^{-n}z) = (-1/z)^n q^{n(n-1)/2}\Theta_q(z)$. Par ailleurs, pour un élément $f \in \mathbf{K}'_0$ et un $z_0 \in \mathbf{C}^*$ convenable fixé, la suite des $f(q^{-n}z_0)$ a une croissance au pire simplement exponentielle, comme on le voit en considérant séparément les séries de Laurent des éléments de $\mathbf{k}'_0$, des caractères $e_{q,c}$ et de l_q.

Si Θ_q était algébrique sur $\mathbf{K}'_0$, on aurait $\Theta_q \in \mathbf{K}'_0[\Theta_q^{-1}]$, et, fixant $z_0 \in \mathbf{C}^* - q^{\mathbf{Z}}$, la relation écrite plus haut entrainerait $q^{n^2} = O(q^{Cn})$ pour une certaine constante C, ce qui ne se peut. □

Nous aurons besoin, pour le cas unipotent, d'introduire la notation

$$l_q^{(k)} = \frac{1}{k!}\prod_{0\leq i\leq k-1}(l_q - i) = \binom{l_q}{k} \quad k \in \mathbf{N}$$

Par convention, $l_q^{(k)} = 0$ pour $k < 0$. La formule de Pascal pour les coefficients binomiaux montre que, quelque soit $k \in \mathbf{Z}$, $\sigma_q l_q^{(k)} = l_q^{(k)} + l_q^{(k-1)}$. Outre son application ci-dessous, le théorème qui suit est fondamental pour la résolution des systèmes aux q-différences.

Théorème

Les $l_q^{(k)}$ $(k \geq 0)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}'_0$; autrement dit, l_q est transcendant sur $\mathbf{k}'_0$.

Preuve

Supposons donnée une relation

$$l_q^{(k+1)} = f_0 l_q^{(0)} + \dots + f_k l_q^{(k)}$$

où $f_0, \dots, f_k \in$ et où k est minimum. On applique $\sigma_q - Id$ aux deux membres de cette égalité, et l'on trouve :

$$l_q^{(k)} = \sum_{0 \leq i \leq k} ((\sigma_q f_i - f_i) l_q^{(i)} + \sigma_q f_i l_q^{(i-1)})$$

Par minimalité de k, $\sigma_q f_k - f_k = 1$ (sinon, on en tirerait une écriture de $l_q^{(k)}$ comme $\mathbf{k}'_0$-combinaison linéaire des $l_q^{(i)}$, $i < k$). Mais cette équation est impossible avec $f_k \in \mathbf{k}'_0$. $\square$

Corollaire

Les seuls caractères de $\mathbf{k}'_0(l_q)$ sont les cz^n $(c \in \mathbf{C}^*,\ n \in \mathbf{Z})$

Preuve

Un élément $f \in \mathbf{k}'_0(l_q)^*$ s'écrit, de façon unique, $f = uA(l_q)/B(l_q)$, où $u \in (\mathbf{k}'_0)^*$, et où $A, B \in \mathbf{k}'_0[X]$ sont des polynomes unitaires et premiers entre eux.

Si maintenant $\sigma_q f = cf$ $(c \in \mathbf{C}^*)$, la transcendance de l_q sur $\mathbf{k}'_0$ entraine la relation formelle :

$$(\sigma_q u) A^{\sigma_q}(X+1)/B^{\sigma_q}(X+1) = cuA^{\sigma_q}(X)/B^{\sigma_q}(X)$$

dans laquelle P^{σ_q} désigne le résultat de l'application de σ_q aux coefficients de $P \in \mathbf{k}'_0[X]$. Vues les hypothèses sur A et B, on a alors

$$\begin{cases} \sigma_q u = cu \\ A^{\sigma_q}(X+1) = A(X) \\ B^{\sigma_q}(X+1) = B(X) \end{cases}$$

La première égalité montre que $u \in \mathbf{C}^* z^n$ et $c = q^n$ pour un $n \in \mathbf{Z}$ (car u est une série de Laurent $\sum u_k z^k$ et il s'agit d'identifier terme à terme $\sum u_k q^k z^k = \sum c u_k z^k$). On n'a donc plus qu'à prouver que la deuxième égalité entraine que $A = 1$, le cas de B étant le même.

Mais, si $A = X^d + aX^{d-1} + ...$, où $d \geq 1$, on voit que $\sigma_q a = a + d$, ce qui est tout à fait impossible pour un élément a de $\mathbf{k}'_0$ (l'identification des séries de Laurent donnerait, pour les termes de degré 0, $a_0 = a_0 + d$). $\square$

Revenant à la structure algébrique de $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{K}'_0$, on va à présent démontrer que toutes les relations algébriques entre les $e_{q,c}$ sur $\mathbf{k}'_0(l_q)$ découlent de leurs relations multiplicatives. C'est une conséquence immédiate du

Lemme

Soient $f_1, ..., f_r$ des fonctions méromorphes non nulles sur un voisinage épointé de 0 dans $\mathbf{C}^*$. Soient $c_1, ..., c_r$ des éléments de $\mathbf{C}^*$ deux à deux non congrus modulo le sous-groupe $q^{\mathbf{Z}}$. On suppose que $\sigma_q f_i = c_i f_i$ (et donc $f_i \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$, pour $1 \leq i \leq r$. Alors les f_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}'_0(l_q)$

Preuve

Dans le cas contraire, on aurait une relation

$$P_1(l_q)f_1 + ... + P_r(l_r)f_r = 0$$

les P_i étant des éléments non tous nuls de $\mathbf{k}'_0[X]$. Si $r = 1$, la conclusion est triviale, si $r = 2$, elle découle du lemme précédent.

Dans le cas général, on peut supposer la relation de taille minimale et les P_i tous non nuls. Appliquant σ_q, on en tire une nouvelle relation

$$P_1(l_q + 1)c_1 f_1 + ... + P_r(l_r + 1)c_r f_r = 0$$

nécessairement proportionnelle à la première (sinon on en obtiendrait une plus courte par élimination).

Mais ceci signifie exactement que, pour $1 \leq i < j \leq r$,

$$((P_i/P_j)(l_q))^{\sigma_q} = (c_j/c_i)(P_i/P_j)(l_q)$$

et entraine, d'après le lemme 1, que $c_i \equiv c_j \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$, contredisant l'hypothèse. $\square$

La preuve de ce “lemme d'indépendance des caractères” à la Artin permet en fait de donner des générateurs de toutes les relations entre les f_i.

Proposition 2

Supposons : $\lambda e_{q,c_1} ... e_{q,c_r} = e_{q,d_1} ... e_{q,d_s}$*, où, pour* $1 \leq i \leq r$ *et* $1 \leq j \leq s$*, on a* $c_i \neq 1$*,* $d_j \neq 1$ *et* $c_i \neq d_j$*. Alors,* $r = s$*, et, à réindexation près,* $d_i = q^{m_i} c_i$ $(1 \leq i \leq r)$*, avec* $m_1 + ... + m_r = 0$

Preuve

La considération des diviseurs de zéros et de pôles montre que

$$\sum_{1 \leq i \leq r} ([0] - [\overline{c_i}]) = \sum_{1 \leq j \leq s} ([0] - [\overline{d_j}])$$

d'où $r = s$ et, à réindexation près, $d_i = q^{m_i} c_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

On prouve alors par récurrence, à partir des relations données au 1.1.2, que

$$e_{q,q^m c} = (-c_i z)^m q^{m(m-1)/2} e_{q,c}$$

d'où l'on tire :

$$e_{q,d_i} / e_{q,c_i} = (-c_i z)^{m_i} q^{m_i(m_i-1)/2}$$

L'égalité $m_1 + ... + m_r = 0$ vient alors immédiatement. $\square$

Réciproquement, on voit que ces relations entrainent l'égalité de départ avec

$$\lambda = q^{\sum_{1 \leq i \leq r} m_i^2/2} \prod_{1 \leq i \leq r} c_i^{-mi}$$

1.2 Forme générale des solutions au voisinage de 0

1.2.1 Préliminaires

Afin de mettre en valeur le caractère essentiellement algébrique et algorithmique de la résolution locale, nous présenterons celle-ci de façon quelque peu axiomatique *dans section 1.2 seulement.*

On se donne donc une extension $\mathbf{K}$ de $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{C}(\{z\})$ munie d'un automorphisme étendant σ_q, que l'on notera simplement σ ; celui-ci agit donc également sur $\mathbf{K}^n$ et sur $GL_n(\mathbf{K})$. On exigera que $\mathbf{K}$ contienne :
– pour chaque $c \in \mathbf{C}^*$, un élément $e_c \in \mathbf{K}^*$ tel que $\sigma e_c = c e_c$
– un élément l tel que $\sigma l = l + 1$ (et donc $l \in \mathbf{K}^*$)
Le corps $\mathbf{K}$, l'automorphisme σ et les symboles e_c et l peuvent être respectivement instanciés par $\mathbf{K}'_0$, σ_q, les $e_{q,c}$ et l_q étudiés au 1.1, mais ce n'est pas fondamental, le contenu de cette section étant plutôt de nature algébrique. Cependant, les raisonnements du 1.1.5 s'appliquent sous les seules conditions ci-dessus. Par exemple, ni l ni les e_c ne sont éléments de $\mathbf{k}'_0$ et l est même transcendant sur $\mathbf{k}'_0$. On introduit encore

$$l^{(k)} = \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (l - i) = \binom{l}{k} \quad k \in \mathbf{N}$$

Les $l^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ sont donc linéairement indépendants sur $\mathbf{k}_0$.

On étudie le système aux q-différences linéaire homogène

$$\sigma X = AX \tag{1.4}$$

dans lequel $A \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$ (en particulier, $A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$).On recherche des solutions vectorielles $X \in \mathbf{K}^n$. S'il y en a suffisamment, on peut former un “système fondamental de solutions” et donc aussi une “solution fondamentale”, c'est à dire une solution matricielle $X \in GL_n(\mathbf{K})$. Toute autre solution X' de la même équation s'écrit donc XV avec $V \in GL_n(\mathbf{K})$. Mezalor, les égalités $A = (\sigma X)X^{-1} = (\sigma XV)(XV)^{-1}$ montrent que $\sigma V = V$, autrement dit, V est à coefficients dans le corps $\mathbf{K}^\sigma$ des invariants de $\mathbf{K}$ sous l'action de σ : ce corps tient lieu de corps des constantes de la théorie.

La méthode de résolution s'apparente à la méthode de Frobenius pour les équations différentielles ([16], [28]) : notion d'exposant ; méthode des coefficients indéterminés pour la résolution formelle dans le cas non-résonnant ; méthode des majorants pour établir la convergence ; généricité du cas semi-simple, où l ne joue aucun rôle.

La résolution est entièrement algorithmique et fournit, dans tous les cas, un système fondamental de solutions sous une forme analytique précise. On donnera au 1.3 une version matricielle de la résolution, permettant, dans le cas non-résonnant, le choix d'une solution fondamentale canonique.

1.2.2 Résolution dans le cas non-résonnant

On notera dans cette section $A(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$. Ainsi, les A_k sont éléments de $M_n(\mathbf{C})$ et $A_0 = A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$.

On fixe une norme quelconque sur $\mathbf{C}^n$, que l'on note $\| \ \|$, et l'on note de la même façon la norme subordonnée sur $M_n(\mathbf{C})$, définie par $\|B\| = \sup\{\|BX\| \ / \ X \in \mathbf{C}^n \ , \ \|X\| = 1\}$.

On fera, *dans cette section*, l'hypothèse de non-résonnance suivante :

Soient $\lambda \neq \mu \in Sp(A_0)$ *deux valeurs propres distinctes de* A_0 *; alors* $\lambda \not\equiv \mu \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ *(rappelons que* $\lambda \ , \ \mu \in \mathbf{C}^*$*).*

Cette hypothèse sera levée à la section 1.2.3. Elle est analogue à la condition classique de non-résonnance pour les équations différentielles linéaires (valeurs propres distinctes ne différant pas d'un entier). On admet cependant la possibilité de valeurs propres multiples : outre les caractères, elles feront apparaitre des “logarithmes” l dans les solutions.

<u>Théorème</u>

Soit $c \in Sp(A_0)$ *une valeur propre de* A_0 *(de sorte que* $c \in \mathbf{C}^*$*). On décompose le sous-espace caractéristique associé de* $\mathbf{C}^n$ *en sous-espaces cycliques :*

$$E_c = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$$

de dimensions $f_i = dim_{\mathbf{C}} F_i$*. A tout choix de vecteurs cycliques des* F_i *est alors canoniquement associé une famille* $(e_c Y_{c,i,j})_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j < f_i}$ *de solutions* $\mathbf{C}(\{z\})$*-linéairement indépendantes, où*

$$Y_{c,i,j} \in \sum_{k=0}^{j} (\mathbf{C}(\{z\}) l^{(k)}) \mathbf{C}^n$$

Pour prouver ce théorème, on opère le changement d'inconnue $X = e_c Y$, qui ramène à l'équation $\sigma Y = c^{-1} A Y$. Si l'on prend pour c l'un des exposants en 0, c'est à dire un élément de $Sp(A_0)$, cela revient donc à supposer que l'exposant considéré est $c = 1$, ce que nous ferons jusqu'à la fin de la preuve. L'hypothèse de non-résonnance nous dit alors qu'aucun q^n $(n \in \mathbf{Z} - \{0\})$ n'est valeur propre de A_0.

<u>Lemme 1</u>

On se donne

$$Y = Y_0 + z Y_1 + \ldots \in (\mathbf{C}\{z\})^n$$

Soit $X_0 \in \mathbf{C}^n$ *tel que* $X_0 = A_0 X_0 - Y_0$*. L'équation* $\sigma X = AX - Y$ *admet alors une unique solution formelle*

$$X = X_0 + z X_1 + \ldots \in (\mathbf{C}[[z]])^n$$

De plus, cette solution converge.

Preuve du lemme 1

Elle comporte les deux étapes habituelles !

– Première étape : existence et unicité formelles.

L'équation se réecrit :

$$\forall m \geq 0 \ , \ q^m X_m = \sum_{i+j=m} A_i X_j - Y_m$$

Pour $m = 0$, c'est la condition posée en hypothèse. Pour $m \geq 1$, cela équivaut à

$$(q^m Id_n - A_0) X_m = \sum_{i=1}^{m} A_i X_{m-i} - Y_m$$

L'hypothèse de non-résonnance nous garantit alors précisément l'existence et l'unicité d'un tel $X_m \in \mathbf{C}^n$. On conclut, par récurrence, à l'existence et à l'unicité d'une solution formelle

$$X = X_0 + z X_1 + ... \in (\mathbf{C}[[z]])^n$$

– Deuxième étape : convergence de la solution formelle ; bien sûr, par la méthode des séries majorantes !

On notera ici $x_m = \|X_m\|$, $y_m = \|Y_m\|$, $a_m = \|A_m\|$ et, pour $m \geq 1$, $b_m = \|(q^m Id_n - A_0)^{-1}\|$. Comme $\lim\limits_{m \to \infty} b_m = 0$, on peut de plus introduire $b = \sup\limits_{m \geq 1} b_m < \infty$. On a alors, pour $m \geq 1$:

$$x_m \leq b(\sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j} x_j + y_m)$$

On introduit la suite des majorants $\overline{x}_m$ en posant $\overline{x}_0 = x_0$ et, pour $m \geq 1$, la relation de récurrence :

$$\overline{x}_m = b(\sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j} \overline{x}_j + y_m)$$

On a ainsi $\forall m \in \mathbf{N}$, $0 \leq x_m \leq \overline{x}_m$. La série génératrice $\overline{\mathcal{X}}(z) = \sum_{m \geq 0} \overline{x}_m z^m$ majore $\mathcal{X}(z) = \sum_{m \geq 0} x_m z^m$. Elle est, de plus, solution de l'équation

$$\overline{\mathcal{X}}(z) = x_0 + b \sum_{m \geq 1} y_m z^m + (\sum_{i \geq 1} a_i z^i) \overline{\mathcal{X}}(z)$$

C'est donc le développement en série entière à l'origine de la fonction holomorphe

$$\overline{\mathcal{X}}(z) = \frac{x_0 + b\sum_{m\geq 1} y_m z^m}{1 - z\sum_{i\geq 0} a_{i+1} z^i}$$

Le rayon de convergence de celle-ci est non nul, il en va donc de même de la série majorée $\mathcal{X}(z)$; ceci entraine bien la convergence de $\sum_{m\geq 0} z^m X_m$. □

Remarquons que le lemme, appliqué au cas $Y = 0$, permet de prolonger tout vecteur propre X_0 de A_0 en une solution convergente $X = X_0 + zX_1 + ...$ de $\sigma X = AX$: il règle donc complètement le cas où A_0 est semi-simple.

Lemme 2

On se donne $X_0^{(0)}$, ... , $X_0^{(j)} \in \mathbf{C}^n$ tels que

$$\begin{cases} X_0^{(0)} = A_0 X_0^{(0)} \\ X_0^{(k)} = A_0 X_0^{(k)} - X_0^{(k-1)} \quad (1 \leq k \leq j) \end{cases}$$

Il existe alors une unique solution $X = l^0 X^{(0)} + ... + l^j X^{(j)}$ de l'équation $\sigma X = AX$ où chaque $X^{(k)} \in (\mathbf{C}\{z\})^n$ $(0 \leq k \leq j)$ est convergent et de la forme $X^{(k)} = X_0^{(k)} + zX_1^{(k)} + ...$

Preuve du lemme 2

Remplaçant X par l'expression prescrite, et utilisant la $\mathbf{C}(\{z\})$-linéaire indépendance des l^k, on est ramené au système d'équations :

$$\sigma X(0) = AX^{(0)}$$

$$\sigma X^{(k)} = AX^{(k)} - \sigma X^{(k-1)} \quad (1 \leq k \leq j)$$

On détermine $X^{(0)}$ en appliquant le lemme 1 avec $X_0 = X_0^{(0)}$ et $Y = 0$. On détermine de même $X^{(k}$ $(1 \leq k \leq j)$ en prenant $X_0 = X_0^{(k)}$ et $Y = -\sigma X^{(k-1)}$. □

On peut maintenant reprendre la preuve du théorème. On choisit dans chaque F_i $(1 \leq i \leq r)$ un vecteur cyclique $X_0^{(i)}$. Autrement dit, $(A_0 - Id_n)^{f_i} X_0^{(i)} = 0$ et les $X_0^{(i,k)} := (A_0 - Id_n)^{f_i - 1 - k} X_0^{(i)}$ $(0 \leq k \leq f_i - 1)$ forment une base de F_i. On applique alors le lemme 2 successivement pour chaque $i \in \{1, ..., r\}$ avec $j = f_i - 1$ et $X_0^{(k)} = X_0^{(i,k)}$ $(0 \leq k \leq f_i - 1)$.

L'indépendance linéaire sur $\mathbf{C}(\{z\})$ des solutions ainsi obtenues découle facilement de celle des l^k et de la $\mathbf{C}$-indépendance linéaire des termes constants. Ceci achève la preuve du théorème. □

Corollaire

On obtient ainsi un système fondamental de solutions.

En effet, lorsque c varie dans $Sp(A_0)$, leur nombre total obtenu est $\sum dim(E_c) = n$ et leur indépendance linéaire se déduit du lemme 2 de 1.1.5.

Remarque

On a utilisé en fait la propriété suivante, un peu moins forte que la non-résonnance : aucun q^n $(n \in \mathbf{N} - \{0\})$ n'est valeur propre de A_0. Il s'ensuit que les arguments de cette section s'appliquent en fait à tout exposant c tel que cq , cq^2 , ... ne sont pas exposants sans qu'il soit besoin d'appliquer l'algorithme de préparation de la section suivante.

1.2.3 L'algorithme de préparation

On lève ici l'hypothèse de non-résonnance : les valeurs propres de A_0 sont quelconques (non nulles!). On utilisera des transformations de jauge $X = MY$ qui remplacent l'équation $\sigma X = AX$ par l'équation $\sigma Y = BY$ où $B = (\sigma M)^{-1} AM$.

Théorème

En alternant des transformations de jauge à matrices constantes Q_1 , ... , $Q_r \in GL_n(\mathbf{C})$ et à matrices de "shearing" (voir ci-dessous) S_1 , ... , S_r, on ramène l'équation en X à une équation non résonnante à l'origine en Y, oỳ $X = Q_1 S_1 \ldots Q_r S_r Y$.

Preuve

Supposons que $Sp(A_0)$ contienne une classe non triviale modulo $q^{\mathbf{Z}}$: $\{c\ ,\ \ldots\ ,\ cq^m\}$ $(m \in \mathbf{N}^*)$.

Il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que l'on peut écrire

$$Q^{-1} A_0 Q = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

où le bloc a_0 est triangulaire supérieur, de taille μ et n'a que des cq^m sur la diagonale et le bloc d_0 est triangulaire supérieur, de taille ν et n'a aucun cq^m sur la diagonale. On introduit la matrice dite *de shearing* (c'est à dire, de cisaillement) (*voir* [28], p.94)

$$S = \begin{pmatrix} zId_\mu & 0 \\ 0 & Id_\nu \end{pmatrix}$$

Ecrivons maintenant, avec des blocs de tailles correspondantes,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = (\sigma(QS))^{-1}A(QS) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1}a & q^{-1}z^{-1}b \\ zc & d \end{pmatrix}$$

L'hypothèse faite sur $Q^{-1}A_0Q$ montre que les coefficients de b' (et, de façon évidente, ceux de a' , c' , d') appartiennent à $\mathbf{C}\{z\}$. Le terme constant de B_0 est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} q^{-1}a_0 & * \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le spectre de B_0 est le même que celuui de A_0, sauf en ce qui concerne les cq^m qui ont été remplacés par cq^{m-1}. $\square$

On voit même que le nombre r d'étapes QS nécessaires est majoré par la somme des $(card(C_i) - 1)$ où les C_i sont les classes d'exposants modulo $q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque 1

A cause de la nécessité de cette préparation, il semble difficile de prévoir sur la forme d'une matrice quelconque la présence de contributions "logarithmiques" dans les solutions.

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} q & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend $Q = Id_2$ et

$$S = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = (\sigma(QS))^{-1}A(QS) = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0$$

La solution d'exposant 1 comportera donc une partie logarithmique. On obtient comme matrice fondamentale (cf prochaine section) :

$$\begin{pmatrix} 1 & zl/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$A' = \begin{pmatrix} q & z^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La même transformation donne

$$B' = (\sigma(QS))^{-1}A'(QS) = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $B'_0 = Id_2$: la solution d'exposant 1 ne comporte pas de partie logarithmique. On obtient comme matrice fondamentale :

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2/(q^2-q) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2

En revanche, l'algorithme de préparation ne modifie pas les pôles de $A(z)$ dans $\mathbf{C}^*$, dont on verra qu'ils sont déterminants pour comprendre la signification géométrique des solutions.

De même, le spectre de A_0 ne changeant pas modulo $q^{\mathbf{Z}}$, la partie "caractères" des solutions n'est pas essentiellement affectée (à équivalence méromorphe près).

1.2.4 Solutions canoniques, matrices fondamentales

Dans le cas non-résonnant, on a construit une base de $\mathbf{K}^n$ formée de solutions de l'équation $\sigma X = AX$. Cette base est uniquement déterminée par la donnée d'une décomposition de chacun des sous-espaces caractéristiques $E_c \subset \mathbf{C}^n$ ($c \in Sp(A_0)$) en sous-espaces cycliques et du choix d'un vecteur cyclique pour chacun de ces derniers (ceci, pour l'action de A_0 sur $\mathbf{C}^n$).

Mais ces données équivalent en fait à la mise de A_0 sous forme de Jordan :

$$Q_0^{-1}A_0Q_0 = \begin{pmatrix} c_1\xi_{1,m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2\xi_{1,m_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_k\xi_{1,m_k} \end{pmatrix}$$

$$\xi_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \textit{(taille m)}$$

Le choix de blocs de la forme $c\xi_{1,m}$ au lieu des habituels $\xi_{c,m}$ est rendu possible par cette circonstance que les exposants c_i ne sont pas nuls.

Les colonnes de Q_0 sont les vecteurs $X_0^{(i,k)}$ attachés aux divers blocs. Leurs prolongements holomorphes $X^{(i,k)} = X_0^{(i,k)} + ...$ construits à la section 1.2.2 sont les colonnes d'une matrice $Q = Q_0 + zQ_1 + ... \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$. Les résultats de 1.2.2 prennent la forme matricielle suivante. Notant X la matrice solution fondamentale dont les colonnes sont les solutions X_1 , ; ... , X_n construites en 1.2.2, on a :

$$X = Q \begin{pmatrix} L_{m_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & L_{m_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & L_{m_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{c_1} I_{m_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e_{c_2} I_{m_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e_{c_k} I_{m_k} \end{pmatrix}$$

On a ici introduit les "blocs logarithmiques"

$$L_m = \xi_{1,m}^l = \begin{pmatrix} l^{(0)} & l^{(1)} & ... & l^{(m-1)} \\ 0 & l^{(0)} & ... & l^{(m-2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & l^{(0)} \end{pmatrix}$$

Il sera parfois commode d'écrire $Q = Q_0 H$, où $H \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$ et $H(0) = Id_n$. On peut alors synthétiser les résultats obtenus en un

<u>Théorème</u>

A toute décomposition de Jordan de A_0 de matrice de passage Q_0 est associée une matrice solution fondamentale $X = Q_0 HLC \in GL_n(\mathbf{K})$ de l'équation $\sigma X = AX$, où :

1. *$H \in GL_n(\mathbf{k}_0)$ et $H(0) = Id_n$*
2. *L est une diagonale de blocs logarithmiques L_m dont les tailles sont celles des blocs de Jordan*
3. *C est une diagonale de caractères e_c, correspondant aux exposants $c \in Sp(A_0)$ de l'équation à l'origine. Les matrices L et C commutent.*

L'écriture qui précède est valide dans le cas non-résonnant. Dans le cas général, cette écriture doit être précédée de $Q_1 S_1 ... Q_r S_r$, où les $Q_i \in GL_n(\mathbf{C})$ et où les S_i sont des matrices de shearing

$$S_i = \begin{pmatrix} zId_{\mu_i} & 0 \\ 0 & Id_{\nu_i} \end{pmatrix}$$

Il sera important de différencier la partie méromorphe en 0 de la solution, c'est à dire $Q_0 H$, de la partie "log-car", dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des caractères e_c sur $\mathbf{C}[l]$. Outre la commutation de L et C, cette partie est solution d'une équation aux $q-$différences dont la matrice est *une matrice de Jordan arbitraire* : en effet, avec les notations ci-dessus, $(\sigma L)L^{-1}$ est la diagonale de blocs ξ_{1,m_1},..., ξ_{k,m_k} et $(\sigma C)C^{-1}$ est la diagonale de blocs (diagonaux !) $c_1 I_{m_1}$,...,$c_k I_{m_k}$. Réciproquement, il est clair que la donnée de cette matrice de Jordan spécifie complètement LC.

Nous appellerons solutions canoniques les solutions ainsi construites. Elles sont au moins aussi canoniques que les bases utilisées pour obtenir une décomposition de Jordan ; dans le cas semi-simple, on pourra les rigidifier un peu plus en introduisant une relation d'ordre arbitraire entre les valeurs propres, c'est à dire sur $\mathbf{C}^*$, voire sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque

Le "Pochhammerien" $\det(X)$ prend la forme $\lambda \times z^{\mu_1+\dots+\mu_r} \times \prod_{1\leq i\leq r} e_{c_i}$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Ceci est compatible avec l'équation $\sigma(\det X) = (\det A)(\det X)$; mais ce n'est en général pas une solution canonique ! Par exemple, si A est la matrice constante $\mathrm{diag}(c, d)$, on trouve $e_c e_d$ au lieu de e_{cd}. Cette différence est essentielle dans le cas où les e_c sont réalisés par de "vraies fonctions" (voir les remarques à la fin de 1.1.2).

1.3 Solutions canoniques dans le cas non-résonnant

Modification de la notion de solution canonique

Nous reprenons ici les notations concrètes de notre situation, où les symboles l, e_c, etc... sont instanciés par les fonctions l_q, $e_{q,c}$, etc...

On a vu ci-dessus que la construction d'une "solution canonique" $X = Q_0 HLC$ méromorphe dans un voisinage épointé de 0 dans $\mathbf{C}^*$ dépendait tout de même du choix de la matrice de passage Q_0 à la forme de Jordan, J_0. Nous allons expliciter cette dépendance.

On peut toujours imposer une forme normale de la réduite de Jordan en supposant les exposants tels que $1 \leq c \leq |q|$ (en vertu de la relation $e_{q,qc} \in \mathbf{C}^* z e_{q,c}$) et rangés selon un ordre total arbitraire défini sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$; et que les blocs de Jordan correspondant à un même exposant sont rangés par ordre croissant de tailles.

Si l'on prend une *autre* matrice de passage Q'_0 à la *même* forme de Jordan J_0, les égalités $(Q_0)^{-1} A_0 Q_0 = (Q'_0)^{-1} A_0 Q'_0 = J_0$ montrent que la matrice $S = (Q_0)^{-1} Q'_0$ commute avec J_0, donc avec L et C. La solution canonique construite à l'aide de Q'_0 est $X' = Q'_0 H' LC$. Notant $(Q_0)^{-1} A Q_0 = J$ et $(Q'_0)^{-1} A Q'_0 = J'$, de sorte que $J(0) = J'(0) = J_0$, on voit que H et H' sont respectivement caractérisés par les équations avec conditions initiales :

$$\begin{cases} \sigma_q H = JH(J_0)^{-1} \\ H(0) = Id_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_q H' = J'H'(J'_0)^{-1} \\ H'(0) = Id_n \end{cases}$$

Le fait que ces systèmes avec conditions initiales *caractérisent* leurs solutions respectives, c'est à dire que chacun admet une unique solution formelle et que celle-ci converge, est conséquence de 1.2.2 : en lieu et place de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathbf{C}^n$, on l'applique à l'endomorphisme $H \mapsto JH(J_0)^{-1}$ (par exemple) de l'espace des matrices ; celui-ci admet bien 1 comme exposant en 0, et Id_n comme vecteur propre associé à cet exposant. On peut également le déduire de ce qui suit.

On voit alors que $H' = S^{-1} HS$ car cette dernière matrice est solution du système qui caractérise H'. On trouve donc que $X' = XS$.

Posons alors $\overline{X} = X(Q_0)^{-1} = Q_0 HLC(Q_0)^{-1}$ et $\overline{X}' = X'(Q'_0)^{-1} = Q'_0 H' LC(Q'_0)^{-1}$: ce sont des solutions de l'équation $\sigma_q X = AX$, construites par un procédé canonique à partir de deux jordanisations de A_0 ; et l'équation $X' = XS$ dit précisément que $\overline{X} = \overline{X}'$. On a donc ici une solution réellement canonique, qui ne dépend que du choix d'une forme de Jordan ; et on a vu que celui-ci admettait une forme normale.

Le but de ce paragraphe et du suivant est de définir proprement et d'étudier cette solution canonique :

- Définir proprement : on va voir que l'on peut en effet reporter le choix de la jordanisation (et la preuve que la solution construite n'en dépend pas) au cas des solutions d'équations $\sigma_q X = AX$ à matrice constante $A \in GL_n(\mathbf{C})$. L'argument ci-dessus, qui suppose que l'on a "rigidifié" la réduite de Jordan est commode, mais pas très élégant et l'on pourra s'en passer.
- Etudier : en vue de la seconde partie (où l'on fait tendre q vers 1) il faudra établir quelques propriétés d'algèbre linéaire, avec ou sans paramètre, pour lesquelles, pour bien connues qu'elles soient, je n'ai pas de référence.L'étude des propriétés tensorielles est reportée à la suite de ce travail (sur la théorie de Galois).

1.3.1 Comment se ramener aux équations à coefficients constants

La méthode de résolution choisie ici s'inspire de [21], p. 154, où le résultat est toutefois formulé en termes plus intrinsèques.

Supposons (ce sera fait à partir du 1.3.2) que l'on sache résoudre les équations $\sigma_q X = AX$ à matrice constante $A \in GL_n(\mathbf{C})$. Alors le cas général se traite comme suit : on part de l'équation $\sigma_q X = AX$, où l'on suppose seulement que $A_0 = A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$. On impose $X = FY$ et $\sigma_q Y = A_0 Y$. L'équation déduite $\sigma_q(FY) = A(FY)$ équivaut à $\sigma_q F A_0 = AF$. On montre plus loin que cette dernière équation admet une unique solution convergente astreinte à la condition initiale $F(0) = Id_n$, à la seule condition que A soit non-résonnante. On en déduit la solution canonique désirée.

Cela revient donc à prouver l'existence d'une transformation de jauge $X = FY$ qui établisse l'équivalence méromorphe $A \sim A_0$; on peut de plus exiger que cette transformation soit tangente à l'identité. Il faut prendre garde qu'il ne s'agit pas là d'un cas particulier de la relation d'équivalence méromorphe entre équations aux q-différences, car F n'est ici pas méromorphe sur la sphère de Riemann.

Transformation de jauge qui fait passer de A à A_0

On montre ici que l'équation $\sigma_q X = AX$ est méromorphiquement (et même holomorphiquement) équivalente à $\sigma_q Y = A_0 Y$ dans le cas non-résonnant. On reprend les notations et hypothèses de 1.2.2. Nous aurons besoin du

Lemme

Soit M_0 un élément de $M_n(\mathbf{C})$. L'endomorphisme $\Phi_{M_0,\lambda} : M \mapsto \lambda M M_0 - M_0 M$ de $M_n(\mathbf{C})$ a pour spectre le multi-ensemble $\lambda Sp(M_0) - Sp(M_0)$.

Autrement dit, si l'on note $Sp(M_0) = \{\lambda_1 , \ldots , \lambda_n\}$, le spectre de $\Phi_{M_0,\lambda}$ est $\{\lambda\lambda_i - \lambda_j \ / \ 1 \leq i , j \leq n\}$ en comptant les multiplicités.

Preuve

L'assertion du lemme revient à dire que le polynome caractéristique de $\Phi_{M_0,\lambda}$ est $\prod_{1\leq i,j\leq n}(T-\lambda\lambda_i+\lambda_j)$. Cela équivaut à un système d'identités polynomiales en les coefficients de M_0 et il suffit donc de le vérifier pour les éléments d'une partie Zariski-dense de $M_n(\mathbf{C})$, par exemple pour les matrices semi-simples.

Par ailleurs, si l'on note, pour $N_0 \in GL_n(\mathbf{C})$, i_{N_0} l'automorphisme intérieur $M \mapsto N_0M(N_0)^{-1}$ de $M_n(\mathbf{C})$, on a l'égalité : $\Phi_{N_0M_0(N_0)^{-1},\lambda} = i_{N_0}\circ\Phi_{M_0,\lambda}\circ(i_{N_0})^{-1}$: si M_0 est semblable à M_1, alors $\Phi_{M_0,\lambda}$ est semblable à $\Phi_{M_1,\lambda}$. On peut donc supposer M_0 diagonale : $M_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1\ ,\ \dots\ ,\ \lambda_n)$. Mais, dans ce cas, l'effet de $\Phi_{M_0,\lambda}$ sur les matrices élémentaires est $E_{i,j}\mapsto(\lambda\lambda_j-\lambda_i)E_{i,j}$ et la conclusion est alors immédiate. □

Ce lemme est d'ailleurs valable sur tout corps commutatif.

Théorème

Il existe une unique transformation de jauge formelle , tangente à l'identité $F = Id_n + zF_1 + \dots \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$ *telle que* $(\sigma_qF)^{-1}AF = A_0$. *Cette transformation est convergente.*

Preuve

Encore une fois, il y a une étape formelle puis le recours aux séries majorantes.

- Etape 1 : existence et unicité de la solution formelle. L'équation prescrite équivaut au système avec conditions initiales :

$$\begin{cases} AF = (\sigma_qF)A_0 \\ F_0 = Id_n \end{cases} \iff \begin{cases} F_0 = Id_n \\ \forall m\geq 1\ ,\ q^mF_mA_0 = A_0F_m + \dots + A_mF_0 \end{cases}$$

  Le lemme ci-dessus, joint à l'hypothèse de non-résonnance, garantit que, pour $m\geq 1$, l'endomorphisme Φ_{A_0,q^m} est inversible. Les coefficients F_m sont donc uniquement définis par les relations

$$\begin{cases} F_0 = Id_n \\ \forall m\geq 1\ ,\ F_m = (\Phi_{A_0,q^m})^{-1}(A_1F_{m-1} + \dots + A_mF_0) \end{cases}$$

  Cette partie de la preuve garde un sens et reste valable sur un corps commutatif quelconque.
- Etape 2 : convergence des solutions formelles. Puisque $|q| > 1$, l'endomorphisme Φ_{A_0,q^m} est équivalent, lorsque $m\to\infty$, à la multiplication à droite qui à M associe $M\times(q^mA_0)$. Choisissant, dans $End_{\mathbf{C}}(M_n(\mathbf{C}))$ la norme associée à une norme d'algèbre quelconque sur $M_n(\mathbf{C})$, on conclut que $\lim_{m\to\infty}\|(\Phi_{A_0,q^m})^{-1}\| = 0.$.

Il s'ensuit en particulier que $b = \sup_{m\geq 1} \|(\Phi_{A_0,q^m})^{-1}\| < \infty$. Notant $a_m = \|A_m\|$ et $f_m = \|F_m|$, on obtient les inégalités : $\forall m \geq 1 \ , \ 0 \leq f_m \leq b(a_1 f_{m-1} + ... + a_m f_0)$. Comme la série $\sum a_m z^m$ converge, la preuve se termine comme dans le lemme 1 de 1.2.2. □

Il est à noter que, si A est méromorphe sur $\mathbf{C}$ (dans la suite, elle le sera même sur $\mathbf{S}$), F l'est aussi : son équation fonctionnelle se réécrit en effet $\sigma_q F = AFA_0^{-1}$ d'où la "propagation des pôles" déjà notée.

1.3.2 Solution canonique d'une équation à coefficients constants

Pour la construire, nous nous appuierons sur la décomposition de Dunford multiplicative d'une matrice inversible.

1. **Cas d'une matrice unipotente**

   Soit $U = Id_n + N$ où $N \in M_n(\mathbf{C})$ est nilpotente.

   Proposition

   L'équation $\sigma_q M = UM$ admet une unique solution à coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[l_q] = \sum_{k\geq 0} \mathbf{C} l_q^{(k)}$, soit $M = l_q^{(0)} M_0 + l_q^{(1)} M_1 + ...$ telle que $M_0 = Id_n$. Cette solution est définie par $M_k = N^k$, $\forall k \geq 0$. Elle commute avec N et U.

   Preuve

   Compte tenu de ce que $\sigma_q l_q^{(k)} = l_q^{(k)} + l_q^{(k-1)}$, on résoud formellement :

$$\sum_{k=0}^{d} (l_q^{(k)} + l_q^{(k-1)}) M_k = \sigma_q M = UM = \sum_{k=0}^{d} l_q^{(k)} (UM_k)$$

   Cela donne, vue la $\mathbf{C}$-indépendance linéaire des $l_q^{(k)}$, $M_k + M_{k+1} = UM_k$, soit $M_{k+1} = NM_k$. Le reste s'ensuit. □

   L'exponentielle d'une matrice nilpotente et le logarithme d'une matrice unipotente étant définies sur un corps commutatif de caractéristique 0 quelconque, cette solution vaut donc

$$U^{l_q} = \exp(l_q \log(Id_n + N)) = \sum_{k\geq 0} \binom{l_q}{k} N^k$$

   On la notera $e_{q,U}$. Par construction, elle est unipotente. A titre d'exemple, si l'on prend $U = \xi_{1,m}$, on retrouve la matrice L_m de 1.2.4.

Corollaire 1

Soit $R \in GL_n(\mathbf{C})$ et soit $V = RUR^{-1}$. Alors $e_{q,V} = Re_{q,U}R^{-1}$.

Preuve

$Re_{q,U}R^{-1}$ satisfait les conditions qui spécifient $e_{q,V}$! $\square$

Corollaire 2

Une matrice commute avec $e_{q,U}$ si et seulement si elle commute avec U.

Preuve

Les égalités $e_{q,U} = \exp(l_q \log(U))$ et $U = \exp(\log(e_{q,U})/l_q)$ montrent que les matrices U et $e_{q,U}$ sont chacune un polynome en l'autre, à coefficients dans $\mathbf{C}(l_q)$. $\square$

2. Cas d'une matrice semi-simple

Soit $D = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n) \in GL_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonale inversible ; on note alors $e_{q,D} = \mathrm{diag}(e_{q,c_1}, ..., e_{q,c_n})$. On a donc $\sigma_q e_{q,D} = De_{q,D} = e_{q,D}D$. De plus, le fait que la correspondance $c \leftrightarrow e_{q,c}$ est biunivoque montre que D est un polynome en $e_{q,D}$ et réciproquement (par exemple, polynomes à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$) et donc qu'ils ont même commutant.

Disgression sur les conjugaisons entre matrices diagonales

Si $\Delta = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n) \in M_n(\mathbf{C})$ et $\Delta' = \mathrm{diag}(c'_1, ..., c'_{n'}) \in M_{n'}(\mathbf{C})$, la relation matricielle $R\Delta = \Delta' R$ ($R \in M_{n',n}(\mathbf{C})$) est “de nature combinatoire”. En effet, elle s'écrit :

$$\forall i \in \{1, ..., n'\}\ ,\ \forall j \in \{1, ..., n\}\ ,\ r_{i,j}c_j = c'_i r_{i,j}$$

autrement dit :

$$c_j \neq c'_i \Rightarrow r_{i,j} = 0$$

Seules les positions de R “connectant des positions de valeurs égales” de Δ et Δ' ont le droit de porter une valeur non nulle, et c'est leur seule contrainte (la valeur non nulle portée n'importe pas).

Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application quelconque. Notons (abusivement) f son extension de aux matrices diagonales (application de f aux coefficients). Alors, on a la relation évidente mais très utile :

$$R\Delta = \Delta' R \Rightarrow Rf(\Delta) = f(\Delta')R$$

Cela se prouve par les implications suivantes : $r_{i,j} \neq 0 \Rightarrow c_j = c'_i \Rightarrow f(c_j) = f(c'_i)$ Si f est injective, on a même une équivalence logique.

Ainsi, si une matrice D admet les deux diagonalisations $D = R\Delta R^{-1} = R'\Delta'(R')^{-1}$, on a l'égalité $Rf(\Delta)R^{-1} = R'f(\Delta')(R')^{-1}$ de sorte que l'on peut poser $f(D) = Rf(\Delta)R^{-1}$ et que cela ne dépend pas de la diagonalisation particulière choisie. Cela permet d'étendre canoniquement aux matrices semi-simples toute application $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. On peut d'ailleurs définir de la même façon $g(D_1, D_2)$ pour $g : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, etc...

Proposition et définition

Soit D une matrice diagonalisable. Ecrivons

$$D = R\Delta R^{-1} = R'\Delta'(R')^{-1}$$

où R , $R' \in GL_n(\mathbf{C})$ et où Δ et Δ' sont diagonales. Alors

$$Re_{q,\Delta}R^{-1} = R'e_{q,\Delta}(R')^{-1}$$

On note cette matrice $e_{q,D}$.

Preuve

Cela découle immédiatement de ce qui précède. □

On tire facilement des mêmes remarques les

Propriétés

Soit $D \in GL_n(\mathbf{C})$ diagonalisable :
(i) $\sigma_q e_{q,D} = De_{q,D} = e_{q,D}D$
(ii) Si $D' = RDR^{-1}$, $e_{q,D'} = Re_{q,D}R^{-1}$
(iii) Chacune des matrices D et $e_{q,D}$ est un polynome en l'autre à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ et elles ont donc même commutant.

3. **Cas général**

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$: D est semi-simple, N est nilpotente et $[D, N] = 0$ (les matrices D et N commutent). Ces conditions spécifient uniquement D et N. Si A est inversible, on en déduit la *décomposition de Dunford multiplicative* $A = DU$, où D est semi-simple, U est unipotente et $[D, U] = 0$ (les matrices D et U commutent) : il suffit de prendre $U = Id_n + D^{-1}N$. Il y a encore unicité sous ces conditions. Si $R \in GL_n(\mathbf{C})$, la décomposition de Dunford multiplicative de RAR^{-1} est alors $(RDR^{-1})(RUR^{-1})$.

Définition

On appellera *solution canonique dans le cas non-résonnant* la matrice $e_{q,A} = e_{q,D}e_{q,U}$

Ce qui suit est alors immédiat :

Propriétés

(i) $\sigma_q e_{q,A} = Ae_{q,A} = e_{q,A}A$
(ii) La décomposition de Dunford multiplicative de $e_{q,A}$ *est* $e_{q,D}e_{q,U}$
(iii) $[M, A] = 0 \Leftrightarrow [M, D] = [M, U] = 0 \Leftrightarrow [M, e_{q,D}] = [M, e_{q,U}] = 0 \Leftrightarrow [M, e_{q,A}] = 0$
(iv) $e_{q,A}$ *est méromorphe sur* $\mathbf{C}^*$

Pour la première et la troisième équivalence de (iii), voir Bourbaki, Algèbre Linéaire ou 1.4. $\square$

Chapitre 2

Théorie de Fuchs-Riemann-Birkhoff : connexion des solutions locales sur $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$

2.1 Equations fuchsiennes sur la sphère de Riemann

On se place désormais sur la sphère de Riemann $\mathbf{S} = \mathbf{P}^1\mathbf{C}$. Le corps de base est donc $\mathcal{M}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}(z)$: on le notera $\mathbf{k}$. On se restreint de plus à l'étude des équations aux q-différences linéaires à coefficients méromorphes sur $\mathbf{S}$. Ce sont donc les équations $\sigma_q X = AX$, $A \in GL_n(\mathbf{k})$.

Nous considérerons plus précisément les équations *singulières régulières* en 0 et en ∞. Cela signifie que A est équivalente à une équation fuchsienne en 0 via une transformation de jauge méromorphe sur $\mathbf{C}$, et, simultanément, à une équation fuchsienne en ∞ via une transformation de jauge méromorphe sur $\mathbf{S} - \{\infty\}$. Nous prouverons plus loin que A est alors en fait équivalente à une équation fuchsienne en 0 et en ∞ via une transformation de jauge méromorphe sur $\mathbf{S}$, c'est à dire rationnelle.

2.1.1 Equations singulières régulières en 0 : formes normales des solutions

Le développement des fractions rationnelles en séries de Laurent définit le plongement $\mathbf{k} := \mathbf{C}(z) \hookrightarrow \mathbf{k}_0' := \mathbf{C}(\{z\}) = \mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$ et permet de considérer toute équation aux q-différences linéaires à coefficients rationnels $\sigma_q X = AX$ $(A \in GL_n(\mathbf{C}(z)))$ comme une équation au voisinage de 0, c'est à dire à coefficients méromorphes au voisinage de 0. Dans le cas fuchsien, on peut donc appliquer les résultats du chapitre 1. On réalisera les solutions comme des fonctions en interprétant comme suit les symboles e_c et l :

- $l = l_q$ est la fonction $z\Theta_q'/\Theta_q$ introduite au 1.1.3 ; c'est donc un élément du sous-corps $\mathbf{C}(z, \Theta_q, \Theta_q')$ de $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$.
- Les e_c sont une famille de caractères comme on en a construit au 1.1.2 ; on aura notamment besoin des propriétés suivantes :

  (i) Tous les "caractères" e_c sont éléments de $\mathbf{C}(z)((\Theta_{q,a})_{a \in \mathbf{C}^*}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$.
  (ii) e_1 et tous les e_{qc}/ze_c (qui sont *a priori* elliptiques) sont des vraies constantes, c'est à dire éléments de $\mathbf{C}^*$.
  (iii) Pour $c \notin q^{\mathbf{Z}}$, le diviseur des zéros et des pôles de e_c dans $\mathbf{C}^*$ est une spirale logarithmique discrète de la forme $q^{\mathbf{Z}}\alpha$.

  La propriété (ii) va servir à normaliser les solutions d'équations aux q-différences sous une forme suffisamment rigide. La propriété (iii), que l'on pourrait d'ailleurs élargir, permettra aux chapitres 3 et 4 de donner une allure agréable à l'étude des pôles des solutions.

Toutes ces conditions sont en particulier réunies dans le cas de la famille "standard" des $e_{q,c} = \Theta_q/\Theta_{q,c}$, que l'on utilisera donc, sauf mention expresse du contraire.

Nous allons d'abord récapituler les résultats de 1.3.2. sous les hypothèses de ce chapitre.

– Cas fuchsien non-résonnant :

  On a montré l'existence d'une solution fondamentale de la forme $X^{(0)} = Q^{(0)}H^{(0)}L^{(0)}C^{(0)}$ (voir 1.2.2), où $Q^{(0)} \in GL_n(\mathbf{C})$ est une matrice de passage de $A(0)$ à sa réduite de Jordan (sous la forme que nous avons adoptée, formée de blocs $c\xi_{1,m}$) et où le choix de $Q^{(0)}$ détermine totalement la forme obtenue.

  D'autre part, A étant maintenant rationnelle, donc méromorphe sur $\mathbf{C}$, l'équation fonctionnelle qui caractérise $H^{(0)}$ montre que celle-ci est également méromorphe sur $\mathbf{C}$: ce point sera précisé au 2.1.2.

– Cas fuchsien général :

  L'algorithme de préparation de 1.2.3 montre qu'il y a alors équivalence rationnelle avec le cas non-résonnant. On obtient donc dans ce cas une solution de la forme $X^{(0)} = U^{(0)}Q^{(0)}H^{(0)}L^{(0)}C^{(0)}$ avec $U^{(0)} \in GL_n(\mathbf{k})$, les autres facteurs étant les mêmes que ci-dessus.

– Cas singulier régulier :

  Par définition, il y a à nouveau équivalence (méromorphe sur $\mathbf{C}$) avec le cas précédent. On obtient donc une solution de la forme $X^{(0)} = V^{(0)}U^{(0)}Q^{(0)}H^{(0)}L^{(0)}C^{(0)}$ avec $V^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$, les autres facteurs étant les mêmes que ci-dessus.

Dans tous les cas, on peut donc écrire $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$, où $M^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ (voir 2.1.2) et où $N^{(0)}$ est une matrice log-car.

Rappelons également que, dans le cas fuchsien non-résonnant, nous avons obtenu une autre construction de solution, complètement canonique, sous la forme $M^{(0)}e_{q,A^{(0)}}$; la partie $M^{(0)}$ est encore méromorphe sur $\mathbf{C}$ (cf 2.1.2).

Normalisation

Du fait que $e_{qc} \equiv ze_c \pmod{\mathbf{C}^*}$, on peut imposer à la matrice $C^{(0)}$ (diagonale de caractères) de ne contenir que des caractères d'exposants c tels que $1 \leq |c| < |q|$ et de commuter tout de même avec L (voir les remarques de 1.3.2, point 2). De même, on peut introduire un ordre arbitraire sur $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et ranger les caractères en ordre croissant d'exposants ; et, pour chaque caractère, les blocs unipotents associés par ordre croissant de tailles : ces deux conditions s'obtiennent en effet à l'aide de matrices de permutations. On dira, si toutes ces conditions sont réunies, que la solution est sous forme normalisée. Il n'y a pas unicité de solutions de cette forme : on verra au 2.1.3 ce qu'il en est exactement. En revanche, à solution donnée, on prouvera que l'écriture normalisée est unique.

2.1.2 Polarité des solutions fondamentales en 0

A strictement parler, l'étude locale du chapitre 1 définit $M^{(0)}$ comme un germe de fonction méromorphe sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, à valeurs dans $GL_n(\mathbf{C})$ (alors que $N^{(0)}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}^*$).

On étudiera la polarité des solutions en comptant comme singularité d'une fonction F à valeurs dans $GL_n(\mathbf{C})$ tout point où elle n'est pas définie (donc, pour une fonction F méromorphe, tout pôle de F) ; et aussi tout point où elle prend pour valeur une matrice non inversible, i.e. de déterminant nul (donc tout zéro de $\det F$). Cela revient en réalité à considérer les pôles de la fonction $z \mapsto (F(z), (F(z))^{-1})$ à valeurs dans l'espace affine $M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C})$. Ce point de vue est justifié par notre but, qui est d'étudier le lien entre solutions en 0 et solutions en ∞, ce qui fait naturellement apparaitre les inverses des fonctions matricielles apparaissant dans les équations et dans les solutions (voir 2.2). Nous introduisons donc la

Notation

On définit le lieu singulier de la fonction matricielle F comme :

$$\mathcal{S}(F) := \{\text{pôles de } F\} \cup \{\text{zéros de } \det F\} = \{\text{pôles de } F\} \cup \{\text{pôles de } F^{-1}\}$$

Théorème

(i) $M^{(0)}$ admet un unique prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tel que le prolongement correspondant de $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$ reste solution fondamentale.
(ii) $X^{(0)}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}^*$.
(ii) Les singularités de $M^{(0)}$ sur $\mathbf{C}^*$ forment une union finie de demi-spirales logarithmiques discrètes : $q^{\mathbf{N}^*}\mathcal{S}(A)$.

Preuve

Soit $K^{(0)} = (\sigma_q N^{(0)})(N^{(0)})^{-1} \in GL_n(\mathbf{C})$. Alors, $M^{(0)}$ satisfait l'équation fonctionnelle $\sigma_q M^{(0)} = AM^{(0)}(K^{(0)})^{-1}$. On réécrit celle-ce sous la forme équivalente

$$M^{(0)} = (\tau_q A)(\tau_q M^{(0)})(K^{(0)})^{-1}$$

que l'on va plutôt considérer comme une définition récursive ; le cas de terminaison étant celui ou la variable est dans le voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ où le *germe* $M^{(0)}$ est *a priori* défini. Notons donc V un disque ouvert de centre 0 sur lequel le germe $M^{(0)}$ est holomorphe, sauf peut-être en 0.

En itérant r fois l'équation ci-dessus, on trouve

$$M^{(0)} = (\tau_q A)...(\tau_q^r A)(\tau_q^r M^{(0)})(K^{(0)})^{-r}$$

ce qui conduit à *définir* la fonction $(\tau_q A)...(\tau_q^r A)(\tau_q^r M^{(0)})(K^{(0)})^{-r}$ sur $\sigma^r V$: elle y est méromorphe avec pour seules singularités possibles dans V^* celles de $(\tau_q A), ..., (\tau_q^r A)$, c'est à dire les éléments de $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq r} \mathcal{S}(A)$.

Les définitions de ces fonctions sur la suite croissante des $\sigma^r V$ sont compatibles en vertu de l'équation fonctionnelle et la réunion de ces ouverts est $\mathbf{C}$ puisque $|q| > 1$; ceci achève la démonstration. $\square$

Dans le cas fuchsien non résonnant, on sait de plus que $M^{(0)}$ est holomorphe en 0.

Corollaire

Outre les demi-spirales logarithmiques discrètes engendrées par les singularités de A, les singularités de la solution fondamentale $X^{(0)} = M^{(0)} N^{(0)}$ sur $\mathbf{C}^*$ forment des spirales logarithmiques discrètes déterminées par la structure de Jordan :
- *Les spirales $q^{\mathbf{Z}}\alpha$ de zéros et de pôles des caractères non triviaux, c'est à dire d'exposants $c \in Sp(A(0)) - q^{\mathbf{Z}}$.*
- *La spirale $q^{\mathbf{Z}}$ des pôles de l_q si, après préparation, $A(0)$ a au moins un bloc unipotent de taille ≥ 2.*

Notons que les blocs log ont tous un déterminant égal à 1 et ne peuvent donc faire sortir les valeurs $X^{(0)}$ de $GL_n(\mathbf{C})$.

2.1.3 Non-unicité des solutions canoniques

On se donne encore une équation $\sigma_q X = AX$ à coefficients rationnels, singulière régulière en 0.

Théorème

Soit $X = MN$ une solution canonique fondamentale en 0 en forme normale. Alors $X' = M'N'$ est une solution canonique fondamentale en 0 en forme normale si et seulement si $N' = N$ et $M' = MR$ où $R \in GL_n(\mathbf{C})$ et R commute avec N.

Preuve

Seule la nécessité de la condition n'est pas évidente ! !

Les matrices $K = (\sigma_q N)N^{-1}$ et $K' = (\sigma_q N')(N')^{-1}$ sont des éléments de $GL_n(\mathbf{C})$ ayant respectivement même structure de Jordan (tailles de blocs et positions de valeurs propres égales ou distinctes : voir la disgression sur les matrices diagonales de 1.3) et donc aussi même commutant que N et N'. Par ailleurs, l'équation fonctionnelle entraine les égalités $\sigma_q M = AMK^{-1}$ et $\sigma_q M' = AM'(K')^{-1}$.

Notons, $R = M^{-1}M' \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$. On a alors $N^{-1}RN' = X^{-1}X'$. Cette dernière est elliptique puisque X et X' sont solutions d'une même équation linéaire aux q-différences.

Soient $e_{c_1}L_1, ..., e_{c_r}L_r$ (resp. $e_{c'_1}L'_1, ..., e_{c'_s}L'_s$) les blocs diagonaux (carrés) de N (resp. de N'), et soient $R_{i,j}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ les blocs correspondants (rectangulaires) de R. Les blocs de $N^{-1}RN'$ sont les $(e_{c'_j}/e_{c_i})L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$, et ils sont elliptiques : les coefficients de $L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$ sont donc des caractères d'exposant c_i/c'_j. Mais ils sont éléments de $\mathbf{k}_0(l_q)$, donc de la forme az^p , $p \in \mathbf{Z}$ (voir 1.1.5). Les conditions de normalisation entrainent alors soit que $R_{i,j} = 0$, soit que $c'_j = c_i$ et $L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$ est à coefficients dans $\mathbf{C}$).

Dans ce dernier cas, notant $S_{i,j} = L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$, on développe l'égalité $L_i S_{i,j} = R_{i,j}L'_j$ dans la base des $l_q^{(k)}$. Des écritures $L_i = \sum_{k \geq 0} l_q^{(k)} \xi_{0,m_i}^k$ et $L'_i = \sum_{k' \geq 0} l_q^{(k')} \xi_{0,m'_i}^{k'}$, on déduit que $R_{i,j} = S_{i,j}$ puis que $\xi_{0,m_i} R_{i,j} = R_{i,j} \xi_{0,m'_i}^{k'}$. Mais ceci signifie que $R \in GL_n(\mathbf{C})$ et que $R^{-1}KR = K'$. Les conditions imposées par la normalisation entrainent alors que $K = K'$. □

Corollaire

L'écriture sous forme normale d'une solution canonique donnée est unique.

Preuve

C'est en effet le cas $MN = M'N'$, c'est à dire $R = I_n$, du théorème. □

2.1.4 Solutions à l'infini et équations singulières régulières sur S

Posons $w = \frac{1}{z}$. Si la fonction (vectorielle ou matricielle) X vérifie l'équation fonctionnelle $X(qz) = A(z)X(z)$, alors la fonction $\overline{X}(w) := X(z)$ vérifie l'équation aux q-différences $\overline{X}(qw) = (A(1/qw))^{-1}\overline{X}(w)$. La légère dissymétrie vient du fait que, sous l'effet de σ_q, $z \leftarrow qz$ et donc $w \leftarrow q^{-1}w$.

Notons donc $\overline{A}(w) = (A(1/qw))^{-1}$. Ainsi, $\overline{A}$ est fuchsienne en $w = 0$ si et seulement si A l'est en ∞. De même, $\overline{A}$ est singulière régulière en $w = 0$ si et seulement si A l'est en ∞ : car l'égalité $(\sigma_q U)^{-1} AU = B$ équivaut à l'égalité $(\sigma_q \overline{U})^{-1} \overline{AU} = \overline{B}$, où $\overline{U}(w) = U(1/w)$ et $\overline{B}(w) = (B(1/qw))^{-1}$.

On peut donc reprendre les résultats précédents :

Théorème

Si A est singulière régulière sur $\mathbf{S}$, elle admet des solutions canoniques $X^{(0)} = M^{(0)} N^{(0)}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} N^{(\infty)}$ telles que :
(i) $M^{(0)}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et $M^{(\infty)}$ est méromorphe sur $\mathbf{S} - \{0\}$. Le lieu singulier de $M^{(0)}$ est $q^{\mathbf{N}^*} \mathcal{S}(A)$ et celui de $M^{(\infty)}$, en tant que fonction de z, est $q^{-\mathbf{N}} \mathcal{S}(A)$.
(ii) $N^{(0)}$ et $N^{(\infty)}$ sont des matrices log-car, respectivement en z et en $1/z$. Leurs lieux singuliers sont les spirales logarithmiques discrètes de forme $q^{\mathbf{Z}} \alpha$ engendrées par les valeurs propres de matrices fuchsiennes non-résonnantes méromorphiquement équivalentes à A (respectivement sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{S} - \{0\}$).

Cet énoncé peut être précisé de manière évidente pour une équation fuchsienne non-résonnante en 0 et en ∞.

2.1.5 Double caractérisation des équations singulières régulières

On va montrer que la forme des solutions caractérise les équations singulières régulières en 0 (resp. en ∞), puis donner une propriété de réduction simultanée en 0 et en ∞ des équations singulières régulières sur $\mathbf{S}$.

Appelons *uniformisante* un élément $u \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ dont 0 est zéro simple, autrement dit dont la valuation $v_0(u)$ en 0 vaut 1. Nous établirons d'abord un lemme très utile. Il s'agit en fait d'un algorithme de réduction analogue à l'algorithme du pivot de Gauss, valable dans tout anneau de valuation discrète.

Lemme

Toute matrice $M \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ peut s'écrire sous la forme $M = CR$, avec des matrices $C, R \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ telles que :
(i) R est régulière en 0 (i.e. $R(0) \in GL_n(\mathbf{C})$).
(ii) C est produit :

1. *d'une puissance u^k , $-k \in \mathbf{N}$ d'une uniformisante u arbitraire*
2. *de matrices $T_{i,\underline{\alpha}}$ d'opérations élémentaires sur les lignes*
3. *de matrices de dilatation $D_{i,v}$, où les uniformisantes v sont arbitraires (et choisies indépendamment les unes des autres).*

Pour être précis, les matrices mentionnées sont définies comme suit. La matrice $T_{i,\underline{\alpha}}$ ($\underline{\alpha} \in \mathbf{C}^n$, $\alpha_i \neq 0$) est égale à l'identité, sauf en ce qui concerne la ligne de rang i :

$$T_{i,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_i & ... & \alpha_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une telle matrice est une matrice de même forme. La matrice de dilatation $D_{i,v}$ est diagonale et est égale à l'identité, sauf en ce qui concerne le coefficient de rang i :

$$D_{i,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & v & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Preuve

On commence par multiplier M par une puissance u^k d'uniformisante, de manière à la rendre holomorphe en 0 : cela revient à se ramener à ce cas, et l'on doit alors prouver le lemme avec $k = 0$ dans la conclusion. Puis l'on fait une récurrence sur $v_0(\det M)$. Si cette valuation vaut 0, M est régulière en 0 et l'on prend $R = M$ et $C = I_n$ (produit vide).

Si $v_0(\det M) > 0$, la matrice $M(0)$ est singulière et il existe donc $\underline{\alpha} \in \mathbf{C}^n - \{0\}$ tel que $\underline{\alpha} M(0) = 0 \in \mathbf{C}^n$. Soit i un indice tel que $\alpha_i \neq 0$ et soit v une uniformisante quelconque. Alors $M_1 = D_{i,v}^{-1} T_{i,\underline{\alpha}} M$ est holomorphe en 0 et $\det M_1 = \frac{\alpha_i}{v} \det M$; M_1 est meilleure que M : $v_0(\det M_1) = v_0(\det M) - 1$, ce qui achève la récurrence. □

Si par exemple, dans ce lemme, on prend systématiquement l'uniformisante z, on obtient C à coefficients dans $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$; si l'on prend plutôt $\frac{z}{1+z}$, on obtient $C \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ et de plus régulière en ∞.

Théorème

Si l'équation aux q-différences à coefficients rationnels $\sigma_q X = AX$ admet une solution fondamentale de la forme MN, où M est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et où N est une matrice log-car, alors c'est une équation singulière régulière en 0.

Preuve

Appliquons ce qui précède à M, que l'on écrit donc $M = CR$. Alors $Y = RN$ est solution de l'équation $\sigma_q Y = BY$, avec $B = (\sigma_q C)^{-1}AC$. La matrice B est rationnellement équivalente à A, puisque $C \in GL_n(\mathbf{C}(z))$. Mais $B = (\sigma_q(RN))(RN)^{-1} = \sigma_q R(\sigma_q N N^{-1})R^{-1}$ est le produit de trois matrices régulières en 0, donc l'est elle-même ; l'équation correspondante est donc fuchsienne en 0. □

En appliquant la même décomposition à des solutions canoniques en forme normale en 0 et en ∞ à la fois, on prouve alors le

Théorème

Une équation singulière régulière est équivalente, via une transformation de jauge rationnelle, à une équation fuchsienne en 0 *et* ∞ *à la fois.*

Preuve

Soient $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)}N^{(\infty)}$ des solutions canoniques en formes normales en 0 et en ∞ respectivement. Appliquant le lemme, on écrit $M^{(0)} = C^{(0)}R^{(0)}$ et $M^{(\infty)} = C^{(\infty)}R^{(\infty)}$. Il suffit maintenant de trouver $U \in GL_n(\mathbf{C}(z))$ telle que $UC^{(0)}$ et $UC^{(\infty)}$ soient régulières en 0 et en ∞ respectivement : on pourra alors conclure comme dans le théorème précédent.

On applique pour cela le lemme à $M = (C^{(\infty)})^{-1}C^{(0)} \in GL_n(\mathbf{C}(z))$, que l'on écrit CR, avec pour choix systématique des uniformisantes $\frac{z}{1+z}$, de sorte que C est régulière en ∞. On peut alors prendre $U = C^{-1}(C^{(\infty)})^{-1}$: $UC^{(0)} = C^{-1}M = R$ est régulière en 0, $UC^{(\infty)} = C^{-1}$ est régulière en ∞ et, bien sur, $U \in GL_n(\mathbf{C}(z))$. □

2.2 Matrice de connexion et classification

2.2.1 La matrice de connexion

On a associé canoniquement à l'équation $\sigma_q X = AX$ deux matrices fondamentales de solutions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$, $X^{(0)}$ et $X^{(\infty)}$. Suivant Birkhoff (*voir* [5]), on notera P la *matrice de connexion* $(X^{(\infty)})^{-1}X^{(0)}$. C'est un élément de $GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$. De plus :

$$\sigma_q P = (\sigma_q X^{(\infty)})^{-1}\sigma_q X^{(0)} = (AX^{(\infty)})^{-1}AX^{(0)} = (X^{(\infty)})^{-1}X^{(0)} = P$$

Autrement dit, les coefficients de P sont elliptiques selon les identifications du chapitre 1, et $P \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}))$. Nous dirons, pour simplifier, que P est elliptique. En particulier, le lieu singulier de P est σ_q-invariant, donc une réunion de spirales logarithmiques discrètes de la forme $q^{\mathbf{Z}}\alpha$. Nous verrons qu'elles sont en nombre fini et les décrirons plus précisément.

Naturellement, le choix de P n'est pas univoque puisque celui des solutions canoniques locales ne l'est pas. Nous allons également préciser cela.

Cas non-résonnant

Dans le cas non-résonnant, $A(0), A(\infty) \in GL_n(\mathbf{C})$ et les valeurs propres distinctes de chacune de ces deux matrices sont deux à deux non congrues modulo $q^{\mathbf{Z}}$. Alors, les matrices fondamentales ont été obtenues sous les formes :

$$\begin{cases} X^{(0)} = Q^{(0)}H^{(0)}L^{(0)}C^{(0)} \\ X^{(\infty)} = Q^{(\infty)}H^{(\infty)}L^{(\infty)}C^{(\infty)} \end{cases}$$

On peut normaliser en imposant la forme plus rigide aux réduites de Jordan. Cependant, $Q^{(0)}$ et $Q^{(\infty)}$ peuvent respectivement être remplacées par $Q^{(0)}R^{(0)}$ et $Q^{(\infty)}R^{(\infty)}$, où $R^{(0)}$ (resp. $R^{(\infty)}$) appartient à $GL_n(\mathbf{C})$ et commute avec la réduite de Jordan de $A(0)$ (resp. de $A(\infty)$). Cela revient à choisir, au lieu de $X^{(0)}$ et $X^{(\infty)}$ les solutions $X^{(0)}R^{(0)}$ et $X^{(\infty)}R^{(\infty)}$ et donc à remplacer P par $(R^{(\infty)})^{-1}PR^{(0)}$.

Dans tous les cas, on pourra écrire :

$$P = ((L^{(\infty)}C^{(\infty)})^{-1}) \times ((H^{(\infty)})^{-1}(Q^{(\infty)})^{-1}Q^{(0)}H^{(0)}) \times (L^{(0)}C^{(0)})$$

Les singularités des facteurs exterieurs sont exactement celles des facteurs log-car des solutions, c'est à dire les spirales logarithmiques discrètes liées aux structures de Jordan de $A(0)$ et de $A(\infty)$. Les singularités du facteur central sont contenues dans les spirales discrètes engendrées par les singularités de A.

La forme canonique ci-dessus sera préférentiellement utilisée pour faire de l'analyse, par exemple pour étudier le comportement de P lorsque $q \to 1$ aux chapitres 3 et 4.

Cas général

Dans le cas général, on a les formes canoniques (moins précises en ce qui concerne la partie méromorphe) :

$$\begin{cases} X^{(0)} = M^{(0)} N^{(0)} \\ X^{(\infty)} = M^{(\infty)} N^{(\infty)} \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$P = (N^{(\infty)})^{-1} \times ((M^{(\infty)})^{-1} M^{(0)}) \times N^{(0)}$$

Si l'on normalise en imposant la forme plus rigide aux parties log-car, les solutions canoniques $X^{(0)}$ et $X^{(\infty)}$ sont soumises exactement à la même indétermination que ci-dessus, et il en est donc de même de P. C'est sous cette forme que nous étudierons les propriétés classifiantes de la matrice de connexion.

Dans tous les cas, on codera la matrice de connexion sans perdre trace des parties log-car (en vue du théorème de classification au 2.2), sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$(N^{(\infty)}, P, N^{(0)}) \text{ ou bien } (N^{(\infty)}, M, N^{(0)}) \text{ où } M = (M^{(\infty)})^{-1} M^{(0)}$$

Les composantes de ces triplets codants ne sont d'ailleurs pas libres. Outre la structure log-car imposée à $N^{(0)}$ et à $N^{(\infty)}$, il y a l'équation $\sigma_q P = P$ et l'équation qui s'en déduit pour M : $\sigma_q M = K^{(\infty)} M (K^{(0)})^{-1}$. Ici, l'on note $K^{(0)} = (\sigma_q N^{(0)})(N^{(0)})^{-1}$ et $K^{(\infty)} = (\sigma_q N^{(\infty)})(N^{(\infty)})^{-1}$; ce sont des éléments de $GL_n(\mathbf{C})$.

L'avantage principal du second codage est de faire clairement ressortir les différents groupes de singularités, qui auront tant d'importance aux chapitres 3 et 4.

Codage à la Birkhoff

On peut rapprocher les codages ci-dessus de l'esprit de Birkhoff en leur donnant une allure un peu plus algébrico-combinatoire. Birkhoff pose en effet le problème "inverse" à partir de la donnée de P et de celle des exposants en 0 et en ∞ : n'étudiant que le cas générique semi-simple, cela lui tient en effet lieu de structure de Jordan.

La donnée de $N^{(0)}$ (resp. de $N^{(\infty)}$) équivaut à celle de $K^{(0)}$ (resp. de $K^{(\infty)}$), qui est à son tour déterminée par la donnée des exposants et des tailles des blocs correspondants. On peut de plus considérer les exposants modulo $q^{\mathbf{Z}}$, c'est à dire, comme des éléments de $\mathbf{E}$.

La donnée d'un coefficient de P, qui est une fonction elliptique, équivaut à celle de son diviseur des zéros et des pôles, que l'on peut considérer comme un diviseur sur E de degré $0 \in \mathbf{Z}$ et d'évaluation $0 \in \mathbf{E}$; plus celle d'un facteur constant non nul. Ceci, en vertu de la suite exacte :

$$\{1\} \to \mathbf{C}^* \to \mathbf{E}^* \to Div^{(0)}(\mathbf{E}) \to E \to \{0\}$$

Ces codages se comportent particulièrement bien du point de vue du produit tensoriel, mais les autres opérations s'y traduisent moins facilement : par exemple, il n'est pas simple d'y lire le lieu des zéros de P ; ni, d'ailleurs, d'expliciter un choix systématique des facteurs constants ci-dessus mentionnés.

2.2.2 Effet de l'équivalence rationnelle

On a associé à une équation singulière régulière $\sigma_q X = AX$, le triplet $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$. Celui-ci n'est cependant pas défini de manière univoque : P peut être remplacé par $(R^{(\infty)})^{-1} P R^{(0)}$ si $R^{(0)}$, $R^{(\infty)} \in GL_n(\mathbf{C})$ commutent respectivement avec $N^{(\infty)}$ et $N^{(0)}$. Ceci justifie l'introduction des notations suivantes.

Sur l'ensemble des triplets (N_1, P, N_2), où $P \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{E}))$ et où N_1, N_2 sont des matrices log-car en forme normale, on définit une relation :

$$(N_1, P, N_2) \sim (N_1', P', N_2') \text{ si et seulement si } \begin{cases} N_1 = N_1' \ , \ N_2 = N_2' \\ R_1 P' = P R_2 \end{cases}$$

où $R_1, R_2 \in GL_n(\mathbf{C})$ et $[R_1, N_1] = [R_2, N_2] = 0$. C'est alors une relation d'équivalence, et on notera $\mathcal{F}_n$ le quotient.

L'image dans $\mathcal{F}_n$ du triplet $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$ est alors bien définie d'après le 2.1. On va maintenant prouver le

Théorème

On obtient ainsi une bijection de l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des classes d'équivalence rationnelle de systèmes singuliers réguliers de rang n dans l'ensemble $\mathcal{F}_n$.

L'application est bien définie

Si $B = (\sigma_q U)^{-1} A U$ et si les solutions fondamentales choisies pour A sont $M^{(0)} N^{(0)}$ et $M^{(\infty)} N^{(\infty)}$, on peut choisir pour B les solutions $(U M^{(0)}) N^{(0)}$ et $(U M^{(\infty)}) N^{(\infty)}$, ce qui associe à B les mêmes parties log-car et la même matrice de connexion, donc le même triplet codant qu'à A. Ainsi, on a une application bien définie de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{F}_n$.

Injectivité

Réciproquement, supposons que A et B ont fourni des triplets équivalents. Quitte à modifier le choix des solutions pour l'une de ces deux équations, on peut alors supposer que l'on a associé à A et B le *même* triplet $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$. Ainsi, on a des solutions fondamentales $M_1^{(0)} N^{(0)}$ et $M_1^{(\infty)} N^{(\infty)}$ pour A, et $M_2^{(0)} N^{(0)}$ et $M_2^{(\infty)} N^{(\infty)}$ pour B. De plus, $(M_1^{(\infty)})^{-1} M_1^{(0)} = (M_2^{(\infty)})^{-2} M_1^{(0)}$ car ces deux matrices sont égales à $N^{(\infty)} P (N^{(0)})^{-1}$.

On a donc $M_1^{(0)}(M^{(0)})^{-1} = M_1^{(\infty)}(M^{(\infty)})^{-1}$. Notant U cette matrice, on voit qu'elle est inversible et méromorphe à la fois sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{S} - \{0\}$, donc rationnelle : et il est clair que $B = (\sigma_q U)^{-1} A U$, autrement dit, on a équivalence rationnelle. Ceci prouve l'injectivité.

Remarque

En omettant les parties log-car dans le codage, on n'aurait plus l'injectivité. Par exemple, en dimension 1, $A = 1$ et $B = c \in \mathbf{C}^* - q^{\mathbf{Z}}$ ne sont pas équivalentes, mais on peut à toutes deux associer la matrice de connexion $P = 1$.

Surjectivité

Reste à établir le seul point non trivial, la surjectivité. On part d'un triplet $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$ (P elliptique, $N^{(\infty)}$ et $N^{(0)}$ des matrices log-car) et l'on écrit $P = (N^{(\infty)})^{-1} M N^{(0)}$ où $M \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$. On invoque alors la "trivialité des fibrés méromorphes sur $\mathbf{S}$" (*voir* [21] p.158) : cela entraine que M s'écrit $(M^{(\infty)})^{-1} M^{(0)}$, où $M^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}))$ et $M^{(\infty)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbf{S} - \{0\}))$.

Les matrices $X^{(0)} = M^{(0)} N^{(0)}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} N^{(\infty)}$ sont connectées par la matrice elliptique P : $X^{(\infty)} = P X^{(0)}$, et sont donc solutions de la même équation $\sigma_q X = AX$, en prenant pour A la matrice $\sigma_q X^{(0)} (X^{(0)})^{-1} = \sigma_q X^{(\infty)} (X^{(\infty)})^{-1}$.

La première écriture implique que $A = \sigma_q M^{(0)} K^{(0)} (M^{(0)})^{-1}$, où l'on a encore posé $K^{(0)} = (\sigma_q N^{(0)})(N^{(0)})^{-1} \in GL_n(\mathbf{C})$, ce qui montre que A est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Le raisonnement analogue à l'infini montre que A est méromorphe sur $\mathbf{S} - \{0\}$ et l'on conclut que $A \in GL_n(\mathbf{C}(z))$.

L'équation aux q-différences linéaire à coefficients rationnels $\sigma_q X = AX$ admettant les deux solutions en formes normales $X^{(0)} = M^{(0)} N^{(0)}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} N^{(\infty)}$, il résulte de 2.1 qu'elle est singulière régulière et ceci achève la preuve du théorème. $\square$

2.2.3 Précisions et améliorations diverses

1. Le deuxième théorème de 2.1.5 affirme que notre équation est équivalente à une équation fuchsienne en 0 et ∞ ; cela revient à dire que l'on peut obtenir $M^{(0)}$ et $M^{(\infty)}$ respectivement régulières en 0 et en ∞.
2. En vue des applications à la théorie de Galois (*voir* [25]), il est utile de pouvoir préciser la position des singularités. Celles de $N^{(0)}$ et de $N^{(\infty)}$ sont totalement déterminées par la structure de Jordan de $A(0)$ et de $A(\infty)$.

   En ce qui concerne M, on déduit facilement ce qui suit de la preuve du théorème 3. Soit une partie finie $\Sigma \subset \mathbf{C}^*$; pour simplifier la formulation, nous supposerons que deux éléments distincts de Σ ne sont pas congrus modulo $q^{\mathbf{Z}}$.

– Sens direct : partant d'un système (1) tel que $\mathcal{S}(A) \subset \Sigma$, on voit que les singularités de M appartiennent à $q^{\mathbf{Z}}\Sigma$.
– Sens inverse : supposons que les singularités de M appartiennent à $q^{\mathbf{Z}}\Sigma$. L'invocation du “Preliminary Theorem” de [5] (lemme de Birkhoff) à la place de l'argument de trivialité des fibrés méromorphes permet de choisir les singularités de $M^{(0)}$ et $M^{(\infty)}$ respectivement dans $q^{\mathbf{N}^*}\Sigma$ et dans $q^{-\mathbf{N}}\Sigma$; le système (1) correspondant est alors tel que $\mathcal{S}(A) \subset \Sigma$.

3. La normalisation un peu artificielle des de la forme des matrices log-car a pour but d'obtenir un énoncé pas trop compliqué. Si on relaxe cette condition, la relation d'équivalence qui sert à définir $\mathcal{F}_n$ se traduit, pour les parties log-car, par les conditions : $R_1 N_1 = N_1' R_1$ et $R_2 N_2 = N_2' R_2$.

   La forme normale des matrices log-car n'étant pas préservée par le produit tensoriel, nous serons nécessairement amenés à cette définition élargie dans la partie de ce travail concernant la théorie de Galois (*voir* [25]).

Confluence vers un système différentiel, matrice de connexion et monodromie

Chapitre 3

Comportement des solutions canoniques lorsque $q \to 1$

3.1 Comportements asymptotiques lorsque $q \to 1$

Conventions et notations générales

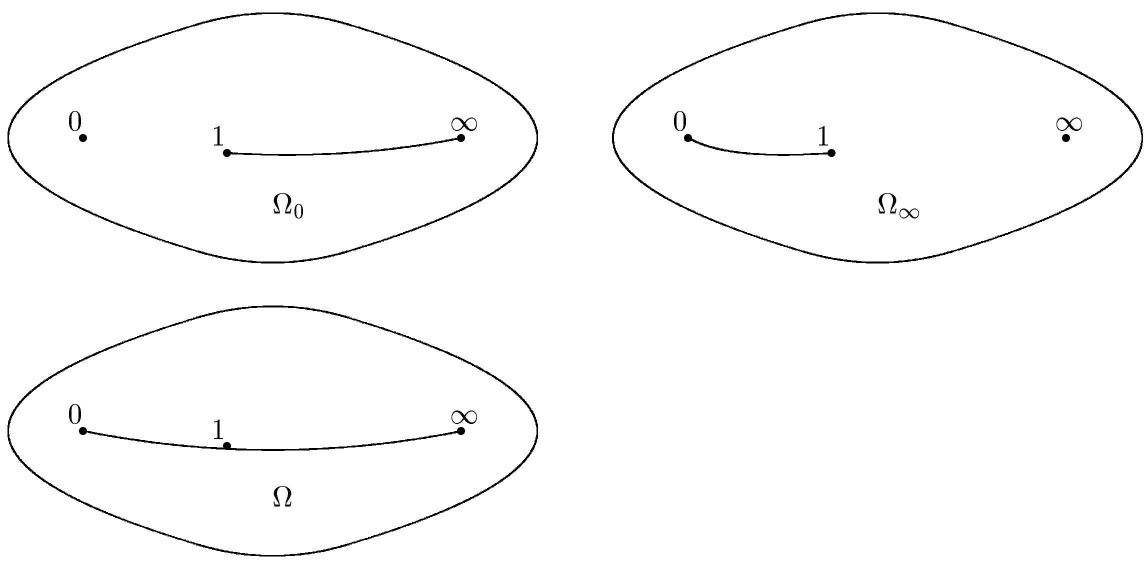
Dorénavant $A(z)$ sera aussi considérée comme fonction de q, et l'on cherchera à comprendre le comportement des solutions canoniques lorsque $q \to 1$. Dans tout ce qui suit, on supposera que $q \to 1$ le long d'une spirale logarithmique fixée $q_0^{\mathbf{R}_+}$. Précisément :

$$q_0 = e^{-2\imath\pi\tau_0} \qquad q = e^{-2\imath\pi\tau} \qquad \tau = \tau_0\epsilon$$

où τ_0 est fixé, à partie imaginaire strictement positive et où ϵ est un réel strictement positif que l'on fera tendre vers 0. Nous emploierons la notation $q \to 1$ comme abréviation (abusive) pour $\epsilon \to 0^+$. Pour t réel, les notations q_0^t, q^t désigneront alors respectivement $e^{-2\imath\pi\tau_0 t}$ et $e^{-2\imath\pi\tau t}$. Ainsi $q = q_0^\epsilon$ et $q^t = q_0^{\epsilon t}$. Ces notations seront étendues à la droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$ en posant $q^{+\infty} = q_0^{+\infty} = \infty \in \mathbf{S}$ et $q^{-\infty} = q_0^{-\infty} = 0$.

On introduit les demi-spirales logarithmiques compactes : $q_0^{\overline{\mathbf{R}_+}}$, qui relie 1 à ∞ ; $q_0^{\overline{\mathbf{R}_-}}$, qui relie 1 à 0 : et leur réunion, la spirale logarithmique compacte $q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$, qui relie 0 à ∞. Celles-ci nous serviront de coupures, autrement dit, on rendra uniformes certaines fonctions analytiques sur leurs complémentaires, les ouverts simplement connexes $\Omega_0 = \mathbf{S} - q_0^{\overline{\mathbf{R}_+}}$, $\Omega_\infty = \mathbf{S} - q_0^{\overline{\mathbf{R}_-}}$, $\Omega = \Omega_0 \cap \Omega_\infty = \mathbf{S} - q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$.

Figure 1



Remarque

L'hypothèse sur la façon dont $q \to 1$ a pour but d'imposer que les demi-spirales discrètes de pôles de la forme $z_0 q^{\mathbf{N}}$, qui sont apparues naturellement aux chapitres 1 et 2, se condensent en des coupures de la forme $z_0 q_0^{\mathbf{R}_+}$. Par le changement de variables $z = e^{2\imath\pi x}$, cela revient à dire que le réseau $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau_0\epsilon$ se condense en le sous-groupe fermé $\mathbf{Z}+\mathbf{R}\tau_0$ de $\mathbf{R}$. Cette géométrie est encore respectée si $q \to 1$ *tangentiellement à une spirale logarithmique*, autrement dit si $\tau = \tau_0\epsilon + o(\epsilon)$: il est donc probable que tous les résultats qui suivent restent valables sous cette hypothèse plus faible.

Contenu de ce chapitre

Dans la section 3.1, nous reprenons la "théorie des fonctions" de 1.1, mais du point de vue de l'étude asymptotique lorsque $q \to 1$. Dans la section 3.2, nous étudions le comportement asymptotique de solutions d'une famille d'équations aux q-différences *à conditions initiales (valeur en* 0*) fixées.* Cette étude est essentiellement indépendante de celle de 3.1. Dans la section 3.3, nous déduisons de 3.1 le comportement de la partie log-car (sous la forme LC aussi bien que sous la forme $e_{q,A}$). La synthèse a lieu en 3.4, où nous explicitons le comportement des solutions canoniques.

Une partie des résultats de 3.1 ne sert pas à la théorie générale mais seulement à l'étude d'exemples à la fin du chapitre 4.

Décrivons maintenant la stratégie mise en oeuvre pour traiter le problème. Nous partons d'une équation différentielle linéaire fuchsienne donnée sous la forme d'un système d'ordre 1 :

$$\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X} \qquad (\delta := \frac{d}{dz})$$

on va montrer comment la matrice de connexion d'une famille (paramétrée par q) d'équations aux q-différences fuchsiennes donne, lorsque q tend vers 1 le long d'une spirale, la description complète de la monodromie dans une base explicite.

Pour que les solutions X d'une équation

$$\sigma_q X = AX$$

(comme au 3.1, les dépendances en q ne sont pas nécessairement explicites dans les notations) tendent vers $\tilde{X}$, on réécrit ce système sous la forme

$$\delta_q X = BX \qquad (\delta_q := \frac{\sigma_q - Id}{q-1})$$

où $B = \frac{A-I_n}{q-1}$ et où l'on suppose que $B \to \tilde{B}$ en un sens convenable. Cette heuristique est justifiée par les exemples étudiés par voie directe (cf 4.4), en particulier le cas de la série hypergéométrique basique. Nous privilégions donc, parmi les q-analogies classiques, la mise en relation $\delta \leftrightarrow \frac{\sigma_q - Id}{q-1}$. En fait, on a un peu l'idée que $\delta_q \to \delta$.

La méthode consiste alors à écrire un système fondamental sous la forme obtenue au 1.2.4 :

$$X = Q_0 HLC$$

puis à controler séparément les différentes composantes :

1. Q_0 est la matrice de passage à la réduite de Jordan pour $A(0)$, donc également pour $B(0)$; elle devra tendre vers son analogue $\tilde{Q}_0$ pour $\tilde{B}(0)$. On voudra donc une *déformation à structure de Jordan fixée*. Ceci sera précisé plus loin.
2. H a été caractérisée comme solution d'une équation aux q-différences matricielle, avec condition initiale $H(0) = I_n$. Elle sera considérée comme solution d'une équation aux q-différences vectorielle d'ordre n^2 avec condition initiale fixe (indépendante de q). La conclusion dans ce cas, qui est à la fois un cas particulier et une étape vers le cas général, est l'objet de la section 3.2
3. La convergence de la partie log-car LC sera traitée au 3.3 à l'aide des résultats de 3.1.3 et 3.1.4. Cependant, ces derniers, ainsi que l'exemple, traité au chapitre 4, de la déformation de $\log(1-z)$, ont montré la nécessité de renormaliser l_q et nous devrons modifier en conséquence la définition de nos solutions canoniques.

On pourra alors montrer, au 3.4, que le dévissage de la résolution de l'équation aux q-différences et celui de l'équation différentielle se correspondent, de sorte que notre solution canonique tend vers la solution canonique de l'équation différentielle obtenue par la méthode de Frobenius[1].

On traitera également le cas des solutions bâties à l'aide des matrices $e_{q,A}$, qui s'avèrera un peu plus simple. Par exemple, il ne sera pas nécessaire de renormaliser ces solutions.

Tout ceci concerne les solutions locales en 0. L'analogue à l'infini et l'étude globale, c'est à dire celle de la matrice de connexion, feront l'objet du chapitre 4.

3.1.1 Lemmes préliminaires utiles

Lemme 1

Soit $z_0 \in \Omega_0$. Il existe alors $\rho, \delta > 0$ tels que :

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0, \rho) \subset \Omega_0 \ : \ \inf_{\alpha > 0} |1 - q_0^{-\alpha} z| \geq \delta$$

[1]A ceci près qu'on y remplacera les $\log z$ et z^μ usuels par $\log(-z)$ et $(-z)^\mu$

Preuve

Nions la conclusion du lemme : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posant $\rho_n = \delta_n = \frac{1}{n}$, il existe $z_n \in \overset{\circ}{D}(z_0, \rho_n)$ et $\alpha_n > 0$ tels que $|1 - q_0^{-\alpha_n} z_n| < \delta_n$. Alors $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ et $z_n q_0^{-\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, de sorte que $q_0^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$. Celui-ci appartient donc à la spirale $\overline{q_0^{\mathbf{R}_+}}$, puisque celle-ci est fermée : contradiction. $\square$

Lemme 2

(i) Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $Re(a) > 0$. Alors

$$1 \leq \frac{|e^a - 1|}{|e^a| - 1} \leq \frac{|a|}{Re(a)}$$

(ii) Si $\lambda > 0$:

$$1 \leq \frac{|q_0^\lambda - 1|}{|q_0^\lambda| - 1} \leq \frac{|\tau_0|}{Im(\tau_0)}$$

Preuve

La minoration dans (i) découle de l'inégalité du triangle et du fait que $|e^a| = e^{Re(a)} > 1$. La majoration vient du calcul suivant :

$$|e^a - 1| \leq \int_0^1 |\frac{d}{ds}(e^{sa})| ds = \int_0^1 |a| e^{sRe(a)} ds$$

L'appliquant maintenant avec $a = -2\imath\pi\tau_0\lambda$, on tire (ii). $\square$

Notons que (ii) s'appliquera à $q = q_0^\epsilon$ et aux q^m , $m \in \mathbf{N}$:

Corollaire

Si $m \in \mathbf{N}$:

$$\frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|} \leq \left| \frac{q^m - 1}{q - 1} \right| \div \frac{|q|^m - 1}{|q| - 1} \leq 1$$

$$\left| \frac{q^m - 1}{q - 1} \right| \geq m \frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|}$$

Preuve

La minoration dans (i) découle du lemme 1 appliqué à q et à q^m :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq \frac{|q-1|}{|q|-1} \leq \frac{|\tau_0|}{Im(\tau_0)} \\ 1 \leq \frac{|q^m-1|}{|q^m|-1} \leq \frac{|\tau_0|}{Im(\tau_0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|} \leq \left|\frac{q^m-1}{q-1}\right| \div \frac{|q|^m-1}{|q|-1}$$

La majoration vient de l'inégalité du triangle appliquée à $\sum_{j=0}^{m-1} q^j$. L'inégalité (ii) découle de la première minoration et du fait que $\sum_{j=0}^{m-1} |q^j| \geq m$. □

3.1.2 Comportement de $\Theta_q(q^\alpha z)$

Posons $z = e^{2\imath\pi x}$ et, comme d'habitude, $q = e^{-2\imath\pi\tau}$ $(Im(\tau) > 0)$. Alors

$$\Theta_q(z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} (-1)^m q^{-\frac{m^2-m}{2}} z^m = \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{\imath\pi\tau m^2 + 2\imath\pi m(x+\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2})}$$

C'est donc $\theta(x + \frac{1-\tau}{2}, \tau)$, où θ est la fonction introduite par Mumford dans [19]. Nous noterons ici plutôt $\tilde{\Theta}(\tau, x) = \Theta_q(e^{2i\pi x})$.

<u>Proposition</u>

$\tilde{\Theta}$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\tilde{\Theta}(\tau, x) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(x-\frac{\tau+1}{2})^2}} \tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau)$$

Comme $Re(\imath/\tau) > 0$, on a ici affaire à la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$ (telle que $1 \mapsto 1$).

<u>Preuve</u>

C'est un cas très particulier de l'équation fonctionnelle d'automorphie donnée dans [19] (p. 32), mais nous en donnerons une preuve plus directe. Nous nous ramènerons au cas réel, qui se traite avec la formule sommatoire de Poisson (*voir* [18], p. 269 et [29], p. 475).

La convergence normale sur tout compact montre que $\tilde{\Theta}$ est analytique en chacune des variables $x \in \mathbf{C}$ et $\tau \in \mathcal{H}$ (demi-plan de Poincaré, défini par $Im(\tau) > 0$). Il suffit donc d'établir la formule ci-dessus pour $\tau = \imath/\lambda$ avec $\lambda > 0$ et elle s'étendra alors par le principe du prolongement analytique. En y remplaçant x par $x + \frac{\imath/\lambda+1}{2}$, on est ramené à prouver :

$$\forall \lambda > 0 \text{ , } \tilde{\Theta}(\frac{\imath}{\lambda}, x + \frac{\imath/\lambda + 1}{2}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{\pi\lambda x^2}} \tilde{\Theta}(\imath\lambda, \imath\lambda x + \frac{\imath\lambda - 1}{2})$$

soit encore, après substitution dans les séries concernées :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{\lambda}+2\imath\pi m(x+1)} = \sqrt{\lambda}\sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{-\pi\lambda(x+m)^2}$$

Pour cela, on emploiera la formule sommatoire de Poisson. On introduit la fonction

$$\phi_\lambda(x) = e^{-\pi\lambda x^2}$$

dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\phi}_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\pi x^2/\lambda}$$

Toutes deux sont dans la classe de Schwarz, c'est à dire des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbf{R}$ ainsi que toutes leurs dérivées, et, quelque soit x :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \hat{\phi}_\lambda(m)e^{2\imath\pi mx} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \phi_\lambda(x+m)$$

soit encore :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\pi\frac{m^2}{\lambda}+2\imath\pi mx} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{-\pi\lambda(x+m)^2}$$

Le membre de droite de cette égalité est 1-périodique. C'est, aux notations près, la formule souhaitée : celle-ci est donc établie pour x réel, donc pour x quelconque par une nouvelle application du principe du prolongement analytique. $\square$

Il y a également des preuves "élémentaires" de cette équation fonctionnelle, du type comparaison série-intégrale (*voir par exemple* [31], [15]).

On cherchera, avec cette équation fonctionnelle, à étudier le comportement de $\tilde{\Theta}$ lorsque $\tau \to 0$ à travers son comportement lorsque $\tau \to \infty$ (précisément : $\infty \times \frac{-1}{\tau_0}$). Nous voulons un équivalent de $\Theta_q(q^\alpha z) = \tilde{\Theta}(\tau, x - \tau\alpha)$ lorsque $\epsilon = \tau/\tau_0 \to 0^+$, x et α étant fixés dans $\mathbf{C}$. L'équation fonctionnelle se réécrit

$$\tilde{\Theta}(\tau, x-\tau\alpha) = \frac{\sqrt{\imath/\tau}}{e^{(\imath\pi/\tau)(x-\tau\alpha-\frac{\tau+1}{2})^2}}\tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau+\alpha)$$

Le "facteur d'automorphie" vaut

$$\sqrt{\imath/\tau}\; e^{-(\imath\pi/\tau)(x-1/2)^2} e^{2\imath\pi(\alpha+1/2)(x-1/2)}(1+O(\tau))$$

avec un $O(\tau)$ uniforme en $x \in \mathbf{C}$. Le facteur thêta du membre de droite est une somme indexée par $m \in \mathbf{Z}$ de termes de la forme

$$e^{2\imath\pi m(\alpha+\frac{1}{2})} \times e^{-\frac{\imath\pi}{\tau}(m^2+2m(x-\frac{1}{2}))}$$

Ecrivons $\tau_0 = \tau_1 + \imath\tau_2$ (donc $\tau_2 > 0$), et $x = u + \imath v$: x et u ne sont déterminés qu'à un entier près, puisque c'est la condition $e^{2\imath\pi x} = z$ qui les spécifie. Il est donc loisible de supposer que $u - v\frac{\tau_1}{\tau_2}$ appartient à $[0;1[$, ce que nous ferons. On a :

$$Re(-\frac{\imath\pi}{\tau}(m^2 + 2m(x - \frac{1}{2}))) = -\frac{\pi Im(\tau_0)}{\epsilon|\tau_0|^2}(m^2 + 2m(u - \frac{1}{2} - v\frac{\tau_1}{\tau_2}))$$

1. Cas général : $u - v\frac{\tau_1}{\tau_2} \in]0;1[$.
   Alors, quelque soit $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $(m^2 + 2m(u - \frac{1}{2} - v\frac{\tau_1}{\tau_2})) > 0$, et tous les termes correspondants de la série thêta tendent vers 0, le terme restant ($m = 0$) étant constant égal à 1. Par vertu de convergence normale, le facteur thêta lui-même tend vers 1 dans ce cas : $\lim_{\epsilon \to 0^+} \tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau + \alpha) = 1$.
2. Cas dégénéré : $u - v\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0$.
   Dans ce cas, outre le terme constant 1 correspondant à $m = 0$, le terme d'indice $m = 1$: $e^{2\imath\pi(\alpha + \frac{1}{2})} \times e^{-\frac{2\imath\pi v}{\epsilon Im(\tau_0)}}$ oscille (sauf dans le cas particulier où $x = 0$, $z = 1$: sa limite est alors $1 - e^{2\imath\pi\alpha}$).

On voit que la convergence de $\tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau + \alpha)$ vers 1 est exponentiellement rapide sur tout compact de Ω, autrement dit, le terme d'erreur est dominé par $e^{-C/\epsilon}$ pour une certaine constante positive C.

Pour comprendre la formule, et les deux cas considérés, on introduit la détermination principale de $\log(-z)$ sur l'ouvert simplement connexe $\Omega = \mathbf{S} - q_0^{\overline{\mathbf{R}}} = \mathbf{C}^* - q_0^{\mathbf{R}}$ qui satisfait $-1 \mapsto 0$. Le "cas général" ci-dessus est celui où $x \notin \tau_0\mathbf{R} \pmod{\mathbf{Z}}$, c'est à dire $z \in \Omega$ et le choix de x est alors tel que $2\imath\pi(x - 1/2) = \log(-z)$. Du point de vue numérique, Θ_q a un comportement "chaotique" le long de la barrière des pôles (dans le plan des x : le réseau $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$), lorsque celle-ci se condense en une coupure spirale (dans le plan des x : le sous-groupe fermé non discret $\mathbf{Z} + \mathbf{R}\tau_0$).

De la discussion ci-dessus, on déduit le

Théorème

(i) Pour $z \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on a, lorsque $\epsilon \to 0^+$:

$$\Theta_q(q^\alpha z) \sim \sqrt{\frac{\imath}{\tau}}\, e^{-(\imath\pi/\tau)(x-1/2)^2 + 2\imath\pi(\alpha+1/2)(x-1/2)}$$

(ii) Si de plus $\beta \in \mathbf{C}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\Theta_q(q^\alpha z)}{\Theta_q(q^\beta z)} = (-z)^{\alpha - \beta}$$

□

Cette dernière notation désigne bien sur $e^{(\alpha-\beta)\log(-z)}$.

3.1.3 Application aux caractères

On considèrera seulement la famille "standard" des $e_{q,c} = \frac{\Theta_q}{\Theta_{q,c}}$ (cf. 1.2), mais il y a des formules analogues pour des caractères de la forme $\prod \Theta_{q,c_i}^{r_i}$ (qui en sont bien, du moment que $\sum r_i = 0$).

Lemme

Soit $\gamma \in \mathbf{C}$. Si l'on note $c(q) = q^\gamma$, on a, sur Ω : $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} e_{q,c(q)}(z) = (-z)^\gamma$ (détermination principale, telle que $-1 \mapsto 1$).

Cela découle immédiatement du théorème. On peut toutefois y ajouter une interprétation géométrique.

Le lieu polaire de $e_{q,c(q)}$ est la spirale discrète $c(q)q^{\mathbf{Z}}$, c'est à dire l'image par $x \mapsto e^{2\imath\pi x}$ du réseau translaté $(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) + \gamma\epsilon$. Lorsque $\epsilon \to 0^+$, celui-ci se condense en le sous-groupe fermé $\mathbf{Z} + \mathbf{R}\tau_0$ de $\mathbf{C}$, dont l'image dans $\mathbf{C}^*$ est la spirale logarithmique continue $q_0^{\mathbf{R}}$: *la barrière de pôles (discrète) se condense en une coupure.*

En ajoutant à ce lemme la discussion du 3.1.7 sur le comportement au premier ordre, il vient alors :

Proposition

On suppose donnés des exposants $c(q)$ dépendant de q. Si $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} (c(q) - 1)/(q - 1) = \gamma$, on a, sur Ω, l'égalité : $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} e_{q,c(q)}(z) = (-z)^\gamma$ $\square$

L'interprétation géométrique est ici la même, le réseau translaté $(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) + \gamma\epsilon$ étant simplement remplacé par $(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) + \gamma(q)\epsilon$ qui se condense également en le sous-groupe fermé $\mathbf{Z} + \mathbf{R}\tau_0$ (ici, $c(q) = q^{\gamma(q)}$ et $\gamma(q) \to \gamma$).

3.1.4 Logarithmes

On a introduit au chapitre 1 la fonction $l_q(z) = z\frac{\Theta_q'(z)}{\Theta_q(z)}$, qui nous tient lieu d'analogue du logarithme. On vérifie ici qu'elle en est en effet (à une constante multiplicative près) une déformation.

Proposition

On a, sur Ω, l'égalité : $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} (q - 1)l_q(z) = \log(-z)$ (détermination principale, telle que $-1 \mapsto 0$).

Preuve

Avec toujours les mêmes notations concernant q, τ, z et x, on introduit $\tilde{L}_\tau(x) = l_q(z)$. La dérivation logarithmique de $\tilde{\Theta}(\tau, x)$ par rapport à x donne :

$$\tilde{L}_\tau(x) = \frac{1}{2\imath\pi} \frac{\tilde{\Theta}'_x(\tau, x)}{\tilde{\Theta}(\tau, x)}$$

On va encore avoir recours à une équation fonctionnelle. On dérive logarithmiquement celle obtenue au 3.1.2. On obtient alors :

$$-\tau \tilde{L}_\tau(x) = x - \frac{\tau + 1}{2} + \tilde{L}_{-1/\tau}(-x/\tau)$$

Lorsque $\epsilon \to 0^+$, $q - 1 \sim -2\imath\pi\tau$ et $(q-1)l_q(z)$ est équivalent à

$$-2\imath\pi\tau \tilde{L}_\tau(x) = 2\imath\pi(x - \frac{\tau + 1}{2}) + 2\imath\pi \tilde{L}_{-1/\tau}(-x/\tau)$$

On choisit $x \in]0;1[+\mathbf{R}\tau_0$, ce qui est loisible puisque $z \in \Omega$ et que x n'est déterminé qu'à un entier près. Le terme $2\imath\pi(x - \frac{\tau+1}{2})$ tend vers $2\imath\pi(x - \frac{1}{2})$, qui vaut $\log(-z)$ dans la détermination choisie. Reste à voir que, pour ce choix de x, $\tilde{L}_{-1/\tau}(-x/\tau) \underset{\epsilon \to 0^+}{\to} 0$.

L'expression de l_q comme somme infinie au 1.1.3 (déduite en dérivant logarithmiquement la formule du triple produit de Jacobi) montre que

$$\tilde{L}_{-1/\tau}(-x/\tau) = \sum_{r \geq 1} \frac{e^{2\imath\pi \frac{x-r}{\tau}}}{1 - e^{2\imath\pi \frac{x-r}{\tau}}} - \sum_{r \geq 0} \frac{e^{2\imath\pi \frac{-x-r}{\tau}}}{1 - e^{2\imath\pi \frac{-x-r}{\tau}}}$$

Les termes $\frac{x-r}{\tau}$ $(r \geq 1)$ et $\frac{-x-r}{\tau}$ $(r \geq 0)$ sont tous de la forme $\frac{a}{\tau}+$ un réel, où $a < 0$; les exponentielles correspondantes ont donc toutes pour limite 0. La convergence étant normale sur tout compact de Ω, on obtient bien la limite voulue. $\square$

Cette proposition (ainsi que les corollaires 4 et 5 des deux lemmes de 3.1.7) entraine en particulier qu'il faudra "renormaliser" les parties log-car des solutions canoniques, en les exprimant en fonction de $(q-1)l_q$ plutôt que de l_q lui-même, si l'on veut un comportement régulier lorsque $q \to 1$ (ceci ne sera d'ailleurs pas nécessaire avec les solutions du cas non résonnant bâties à l'aide des matrices $e_{q,A}$).

3.1.5 Comportement de $\Theta_q^+(q^\alpha z)/\Theta_q^+(z)$

On en aura besoin en 4.4 pour déformer $(1 - z/z_0)^\alpha$. Pour l'obtenir, on procèdera comme suit :

- Cas où $|z| < 1$: estimation individuelle des coefficients, puis invocation de la convergence normale.
- Cas où $|z| > 1$: exploitation du lien entre $\Theta_q^+(z)\Theta_q^+(1/z)$ et $\Theta_q(z)$.

– Cas où $|z| = 1$: majoration directe de l'écart à un w tel que $|w| \neq 1$.

On trouve dans [14] (page 9), sans preuve et sans référence, la réponse lorsque q est à valeurs réelles, mais cela ne nous suffit pas.

On notera (dans cette section seulement) : $f_{q,\alpha}(z) = \frac{\Theta_q^+(q^\alpha z)}{\Theta_q^+(z)}$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - q^{\mathbf{N}}$, admettant en général des pôles simples en les q^n , $n \in \mathbf{N}$. Le cas spécial est celui où $\alpha \in \mathbf{Z}$: les éliminations font alors de cette fonction une fraction rationnelle de degré fixe (indépendant de q) ; les résultats qui suivent sont triviaux dans ce cas.

Théorème

$\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} f_{q,\alpha}(z) = (1 - z)^\alpha$, *cette dernière fonction étant la détermination principale, telle que* $0 \mapsto 1$, *sur l'ouvert simplement connexe* Ω_0.

Preuve

La définition de $\Theta_q^+(z)$ donne le développement en produit infini :

$$f_{q,\alpha}(z) = \prod_{r \geq 0} \frac{1 - q^{\alpha - r} z}{1 - q^{-r} z}$$

On voit qu'il admet un développement en série entière de rayon de convergence 1 (module de la plus proche singularité), disons $\sum_{m \geq 0} a_m z^m$.

De l'équation fonctionnelle

$$\sigma_q f_{q,\alpha} = \frac{1 - q^{\alpha+1} z}{1 - qz} f_{q,\alpha}$$

on déduit les relations de récurrence :

$$a_0 = 1 \text{ et } a_m = a_{m-1} \frac{q^m - q^{\alpha+1}}{q^m - 1} \; (m \geq 1)$$

On en tire donc la valeur exacte de a_m et sa limite lorsque $q \to 1$:

$$a_m = \prod_{j=1}^{m} \frac{q^j - q^{\alpha+1}}{q^j - 1}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} a_m = \prod_{j=1}^{m} \frac{j - (\alpha + 1)}{j} = (-1)^m \begin{pmatrix} \alpha \\ m \end{pmatrix}$$

Ceci montre déjà que $f_{q,\alpha} \to (1-z)^\alpha$ coefficient par coefficient, donc terme à terme (pour un z donné). On va montrer que cette convergence est dominée sur tout compact de $\overset{\circ}{D}(0,1)$, mettons sur $\overline{D}(0,\rho)$ où $\rho < 1$. Pour cela, on majore les coefficients :

$$\left|\frac{a_m}{a_{m-1}}\right| = \left|1 - \frac{q^{\alpha+1}-1}{q^m-1}\right| \le 1 + \left|\frac{q^{\alpha+1}-1}{q^m-1}\right| = 1 + \left|\frac{q^{\alpha+1}-1}{q-1}\right| \div \left|\frac{q^m-1}{q-1}\right|$$

Pour q voisin de 1, $|\frac{q^{\alpha+1}-1}{q-1}|$ est uniformément majoré ; d'autre part, le corollaire du lemme 2 de 3.1.1 dit que $|\frac{q^m-1}{q-1}| \ge m\frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|}$ et donc que $|\frac{a_m}{a_{m-1}}| \le 1 + \frac{C}{m}$, où C ne dépend ni de q ni de m. Alors, $|a_m| \le b_m := \prod_{1\le j\le m}(1+\frac{C}{j})$ et $f_{q,\alpha}$ est dominée par $\sum b_m z^m$, dont le rayon de convergence est 1. Ceci achève le cas où $|z| < 1$.

Pour passer au cas où $|z| > 1$, on introduit

$$f_{q,\alpha}(z) f_{q,-\alpha}(z^{-1}) = \frac{\Theta_q^+(q^\alpha z)}{\Theta_q^+(z)} \frac{\Theta_q^+(q^{-\alpha} z^{-1})}{\Theta_q^+(z^{-1})} = \frac{1-q^\alpha z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{\Theta_q(q^\alpha z)}{\Theta_q(z)}$$

Rappelons en effet que, d'après la formule du triple produit de Jacobi (donnée au 1.1.1),

$$\Theta_q^+(z)\Theta_q^+(z^{-1}) = \frac{1-z^{-1}}{(p;p)_\infty}\Theta_q(z)$$

Utilisant 4.1.2 et le cas $|z| < 1$, on trouve que, pour $z \in \Omega_0$ et $|z| > 1$:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f_{q,\alpha}(z) = \frac{(-z)^\alpha}{(1-z^{-1})^{-\alpha}}$$

et il n'est pas très difficile de vérifier que ceci vaut bien $(1-z)^\alpha$, achevant la preuve dans le second cas.

Soit maintenant z de module 1 ; la condition $z \in \Omega$ signifie que $z \ne 1$. On fixe, selon le lemme 1 de 4.1.1, des réels $\rho, \delta > 0$ tels que

$$\forall w \in \overset{\circ}{D}(z,\rho) \ , \ \forall \lambda \ge 0 \ : \ \left|1 - \frac{w}{q_0^\lambda}\right| \ge \delta \text{ et } \left|1 - \frac{q^\alpha w}{q_0^\lambda}\right| \ge \delta$$

Il suffit pour cela de restreindre q à un voisinage de 1 défini par $\epsilon \le \epsilon_0$, puis de remplacer le ρ donné par le lemme par $\rho - \sup\limits_{\epsilon\le\epsilon_0}|q^\alpha - 1|$ ($\epsilon_0 > 0$ étant fixé tel que l'on obtienne $\rho > 0$).

Notons temporairement, pour $r \in \mathbf{N}$,

$$P_r(w) = \frac{1-q^{\alpha-r}w}{1-q^{-r}w} \text{ de sorte que } P_r'(w) = \frac{(1-q^\alpha)q^{-r}}{(1-q^{-r}w)^2}$$

Tous les P_r et P_r' sont donc définis et non nuls sur $\overset{\circ}{D}(z,\rho)$. De plus, on peut majorer la dérivée :

$$|P_r'(w)| \le |1-q^\alpha||q|^{-r}\frac{1}{\delta^2}$$

et appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$|P_r(w) - P_r(z)| \leq |1-q^\alpha||q|^{-r}\frac{\rho}{\delta^2}$$

Par ailleurs,

$$|P_r(z)| = \left|1 + \frac{q^{-r}z(1-q^\alpha)}{1-q^{-r}z}\right| \geq 1 - \frac{|q|^{-r}|z||1-q^\alpha|}{\delta}$$

On suppose maintenant q assez voisin de 1 pour que $\frac{|z||1-q^\alpha|}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$, d'où les majorations :

$$\left|\log\frac{f_{q,\alpha}(w)}{f_{q,\alpha}(z)}\right| \leq \sum_{r=0}^{\infty}\left|\log\frac{P_r(w)}{P_r(z)}\right| \leq \sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{P_r(w)}{P_r(z)} - 1\right| \leq \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2\rho}{\delta^2}|1-q^\alpha||q|^{-r}$$

Cette dernière somme est un $O(\rho)$ uniforme vis à vis de q puisque le facteur vaut $\frac{2}{\delta^2}\frac{|q||1-q^\alpha|}{|q|-1}$ qui est borné. On peut alors prendre ρ petit et $w \in \mathring{D}(z,\rho)$ de module $\neq 1$, donc tel que $f_{q,\alpha}(w) \to (1-w)^\alpha$: ceci permet aussi de conclure pour z et achève la preuve du théorème dans le dernier cas. □

3.1.6 La fonction $l_q^+(z) = z(\Theta_q^+)'(z)/\Theta_q^+(z)$

Elle a été introduite au 1.1.3. On s'en servira au 4.4 pour déformer $\log(1-z)$.

Théorème

Pour $z \in \Omega_0$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+}(q-1)l_q^+(z) = \log(1-z)$ (détermination principale sur Ω_0, telle que $0 \mapsto 0$).

Preuve

La stratégie est la même qu'à la section précédente. Supposons donc pour commencer que $|z| < 1$, plus précisément que $z \in \overline{D}(0,\rho)$, $\rho < 1$ fixé. Alors

$$l_q^+(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{-q^{-r}z}{1-q^{-r}z} = -\sum_{r\geq 0}\sum_{m\geq 1}(q^{-r}z)^m = -\sum_{m\geq 1}(\sum_{r\geq 0}q^{-mr})z^m = -\sum_{m\geq 1}\frac{q^m}{q^m-1}z^m$$

En effet, la famille double des $q^{-mr}z^m$ est dominée par celle des $|q|^{-mr}\rho^m$, laquelle est sommable, ce qui justifie les commutations.

Comme $\frac{q^m}{q^m-1}z^m = z^m + \frac{1}{q^m-1}z^m$, on a l'expression plus agréable :

$$l_q^+(z) = -\frac{z}{1-z} - \sum_{m\geq 1}\frac{1}{q^m-1}z^m$$

Ainsi, nous sommes conduits à étudier la série entière :

$$\sum_{m\geq 1}\frac{q-1}{q^m-1}z^m = -(q-1)l_q^+(z) - (q-1)\frac{z}{1-z}$$

Ses coefficients tendent bien vers les coefficients $\frac{1}{m}$ de $-\log(1-z)$. Reste à voir que la convergence est dominée sur $\overline{D}(0,\rho)$. Mais :

$$\left|\frac{q-1}{q^m-1}\right| \leq \frac{|\tau_0|}{Im(\tau_0)}\frac{1}{m}$$

d'après le corollaire du lemme 2 de 4.1.1. Comme la série $\sum_{m\geq 1}\frac{\rho^m}{m}$ converge, ce premier cas est réglé.

Le cas $|z| > 1$ vient alors facilement de la formule :

$$l_q^+(z) - l_q^+(z^{-1}) = l_q(z) - \frac{1}{1-z}$$

et du comportement de $(q-1)l_q$, étudié en 4.1.4 : il n'est en effet pas très difficile de vérifier que

$$\log(1-z) - \log(1-z^{-1}) = \log(-z)$$

Reste le cas de z de module 1 (mais différent de 1). Soient ρ , $\delta > 0$ tels que

$$\forall w \in \overset{\circ}{D}(z,\rho)\ ,\ \forall \lambda \geq 0\ :\ \left|1 - \frac{w}{q_0^\lambda}\right| \geq \delta$$

Leur existence est assurée par le lemme 1 de 4.1.1. La convergence uniforme d'une série de fonctions holomorphes autorisant la dérivation terme à terme, on peut majorer, pour $w \in \overset{\circ}{D}(z,\rho)$:

$$|(l_q^+)'(w)| \leq \sum_{r\geq 0}\left|\frac{q^{-r}}{(1-q^{-r}w)^2}\right| \leq \frac{1}{\delta^2}\frac{|q|}{|q|-1}$$

Par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$|(q-1)l_q^+(w) - (q-1)l_q^+(z)| \leq \frac{\rho|q|}{\delta^2}\frac{|q-1|}{|q|-1}$$

Ce dernier majorant est un $O(\rho)$ uniforme en q. On choisit donc w proche de z et de module $\neq 1$, et l'utilisation du même argument qu'à la section précédente permet d'achever la démonstration. $\square$

3.1.7 Le comportement ne dépend que du premier ordre

Les résultats de 3.1.2 et de 3.1.5 supposent que la variable est de la forme $q^\alpha z$, c'est à dire varie exactement le long d'une spirale logarithmique avec q. On va ici montrer que cette condition peut être assouplie, ce qui sera commode (et même indispensable) pour déformer des solutions d'équations différentielles (linéaires, à coefficients rationnels et fuchsiennes) arbitrairement prescrites. J'ai déjà conjecturé au début de ce chapitre que la variation de q elle-même devait pouvoir être assouplie de façon analogue.

Comme dans tout ce chapitre, on n'indique pas toujours explicitement dans les notations les dépendances en ϵ. En particulier, on va considérer des complexes c, z, z_1 et z_2 qui dépendent de q, donc de ϵ (alors que z_0 et α seront fixés).

Lemme 1

On suppose que z_1 et z_2 tendent vers $z_0 \in \Omega_0$. On suppose de plus que $z_2/z_1 = 1+o(\epsilon)$. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\Theta_q^+(z_2)}{\Theta_q^+(z_1)} = 1$$

Lemme 2

(i) Sous les mêmes hypothèses,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (l_q^+(z_2) - l_q^+(z_1)) = 0$$

(ii) Si l'on suppose seulement que $z_2/z_1 = 1 + O(\epsilon)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ((q-1)l_q^+(z_2) - (q-1)l_q^+(z_1)) = 0$$

Avant de prouver ces deux lemmes, notons tout de suite leurs conséquences qui nous seront utiles pour étendre la portée des estimations précédentes :

Corollaire 1

Soit $z_0 \in \Omega$. Si, pour $j = 1$, 2, $z_j = z_0(1 - 2\imath\pi\tau_0\alpha_j\epsilon + o(\epsilon))$, alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\Theta_q(z_2)}{\Theta_q(z_1)} = (-z_0)^{\alpha_2 - \alpha_1}$$

L'hypothèse dit que $\frac{z_j/z_0 - 1}{q-1} \to \alpha_j$.

Corollaire 2

Soit $z_0 \in \Omega$. *Si* $c = 1 - 2\imath\pi\tau_0\gamma\epsilon + o(\epsilon)$ *et si* $z = z_0 + o(\epsilon)$, *alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} e_{q,c}(z) = (-z_0)^\gamma$$

L'hypothèse dit que $\frac{c-1}{q-1} = \gamma$. Ce corollaire justifie (enfin !) la proposition de 3.1.3.

Corollaire 3

Soit $z_0 \in \Omega_0$. *Si, pour* $j = 1\ ,\ 2$, $z_j = z_0(1 - 2\imath\pi\tau_0\alpha_j\epsilon + o(\epsilon))$, *alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \Theta_q^+(z_2)/\Theta_q^+(z_1) = (1 - z_0)^{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Corollaire 4

Soit $z_0 \in \Omega$. *Si* $z = z_0 + o(\epsilon)$, *alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (q-1) l_q(z) = \log(-z_0)$$

L'hypothèse dit que $\frac{z/z_0 - 1}{q-1} \to 0$.

Corollaire 5

Soit $z_0 \in \Omega_0$. *Si* $z = z_0 + o(\epsilon)$, *alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (q-1) l_q^+(z) = \log(1 - z_0)$$

Preuve du lemme 1

Soit $u_q = z_1 - z_2$: c'est un $o(\epsilon)$. On part de l'égalité :

$$\frac{\Theta_q^+(z_2)}{\Theta_q^+(z_1)} = \prod_{r \geq 0} \left(1 + \frac{q^{-r} u_q}{1 - q^{-r} z_1}\right)$$

Il existe un disque $\overset{\circ}{D}(z_0, \rho)$ sur lequel, quel que soit $\lambda \geq 0$, $|1 - \frac{z}{q_0^\lambda}| \geq \delta > 0$. Pour q proche de 1, z_1 et z_2 sont dans le disque et

$$\left|\log \frac{\Theta_q^+(z_2)}{\Theta_q^+(z_1)}\right| \leq \sum_{r \geq 0} \left|\frac{q^{-r} u_q}{1 - q^{-r} z_1}\right| \leq \frac{|u_q|}{\delta} \frac{|q|}{|q| - 1}$$

et ce dernier majorant est un $O(\frac{u_q}{q-1})$ uniformément en q.

Comme $u_q = o(\epsilon)$ et $q-1 \sim -2\imath\pi\tau_0\epsilon$, cette estimation est suffisante. $\square$

<u>Preuve du lemme 2</u>

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on part de l'inégalité :

$$|l_q^+(z_2) - l_q^+(z_1)| \leq \sum_{r\geq 0} \left| \frac{q^{-r}u_q}{(1-q^{-r}z_1)(1-q^{-r}z_2)} \right| \leq \frac{|q|}{\delta^2} \frac{|q-1|}{|q|-1} \frac{|u_q|}{|q-1}$$

On trouve donc encore une fois que $|l_q^+(z_2) - l_q^+(z_1)| = O(\frac{u_q}{q-1})$ uniformément en q. Nous pouvons donc conclure pour les deux cas cités dans le lemme. $\square$

3.2 Comportement à valeur initiale fixe

Selon les conventions détaillées au 3.1,, $q = q_0^\epsilon$ tend vers 1 le long d'une spirale. Les dépendances en q ne seront pas nécessairement explicites dans les notations.

On considère l'équation aux q-différences à coefficients rationnels fuchsienne en 0, "avec conditions initiales" :

$$\begin{cases} \sigma_q X = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

L'équation est vue "en famille", c'est à dire que A dépend de q (et donc de ϵ). La condition initiale est, dans cette section, fixe, c'est à dire que X_0 ne dépend pas de q. De plus :

- A satisfait les hypothèses générales qui font que l'équation est fuchsienne ; en particulier, $A_0 = A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$. Ces hypothèses seront renforcées selon les besoins au fur et à mesure de l'étude. On veut faire confluer ce système vers le système différentiel à coefficients rationnels avec conditions initiales

  $$\begin{cases} \delta\tilde{X} = A\tilde{X} \\ \tilde{X}(0) = X_0 \end{cases}$$

  L'analogie choisie étant $(\sigma_q - Id)/(q-1) \leftrightarrow \delta = zd/dz$, nous supposerons que la matrice $B = (A - I_n)/(q-1)$ tend, lorsque $\epsilon \to 0^+$, vers la matrice rationnelle $\tilde{B} \in M_n(\mathbf{k})$. On écrira également $A = I_n + \eta B$, $\eta = q - 1$. La condition de rationnalité de $\tilde{B}$ peut être affaiblie (dans ce chapitre) en $\tilde{B} \in M_n(\mathbf{k}_0)$, mais les hypothèses sur les pôles seraient nettement plus compliquées à formuler. Notons d'ailleurs que nous étudierons au chapitre 4.4 un tel exemple, avec une singularité essentielle à l'infini : nos méthodes s'appliqueront encore, ce qui montre que les équations aux q-différences que nous appelons fuchsiennes ne sont peut-être pas si fuchsiennes que ça.
- X_0 est un vecteur fixé non nul de $\mathbf{C}^n$ tel que, quelque soit q, $A_0X_0 = X_0$. On suppose de plus qu'il n'y a pas de résonnance : aucun q^m , $m \in \mathbf{N}^*$ n'est valeur propre de A_0. Cela sera conséquence d'une autre hypothèse sur $\tilde{B}$ à partir du 3.2.1.

Les algorithmes du chapitre 1 attribuent au système aux q-différences avec condition initiale ci-dessus une unique solution X. La théorie classique des équations différentielles montre l'existence d'une unique solution du système différentiel avec conditions initiales. Pour prouver la convergence de X vers $\tilde{X}$ (qui est en fait une *confluence*), nous procèderons en deux étapes :

- Etude locale : il s'agit de reprendre la résolution formelle et la preuve de convergence "en famille", et, en parallèle, l'algorithme correspondant pour l'équation différentielle. Il faudra donc également une hypothèse de non-résonnance pour celle-ci : à partir du 3.2.1, nous supposons donc que l'équation différentielle $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$ est fuchsienne sur $\mathbf{S}$ et non résonnante en 0, autrement dit $Sp(\tilde{B}(0)) \cap \mathbf{N}^* = \emptyset$. On verra que cette condition entraine que, pour ϵ assez petit, A est non résonnante en 0, autrement dit : $Sp(A(0)) \cap q^{\mathbf{N}^*} = \emptyset$.

- Etude globale : on sort d'un voisinage de 0 (dans lequel la convergence a été établie) le long de demi-spirales $q_0^{\mathbf{R}^+} z_0$. Ceci nous ramène à un problème de variable réelle (on pose $z = z_0 q_0^t$) et équivaut à l'emploi de la méthode d'Euler pour approcher les solutions d'une équation différentielle.

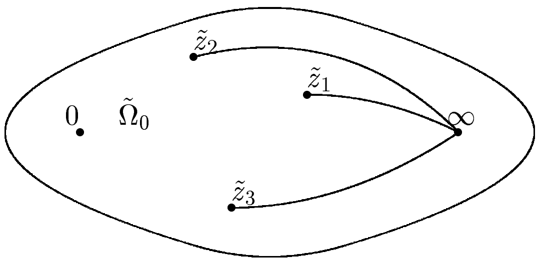
Pour que l'ouvert où cela marche, et donc le résultat, soit non trivial, il faudra en outre introduire une hypothèse sur les pôles. Notons $\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r$ les pôles de $\tilde{B}$ sur $\mathbf{S}$. Ce sont donc en fait des éléments de $\mathbf{C}^*$ (l'équation différentielle étant fuchsienne). L'hypothèse nécessaire est que "les pôles de A (et donc ceux de B) tendent vers ceux de $\tilde{B}$", c'est à dire que, quelque soit $z \notin \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$, A soit définie en z pour ϵ assez petit.

Notons alors

$$\tilde{\Omega}_0 = \mathbf{C} - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbf{R}^+} = \mathbf{S} - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\overline{\mathbf{R}^+}}$$

C'est donc un ouvert simplement connexe de $\mathbf{S}$. Si $\Omega_{q,0}$ est l'ouvert analogue pour les pôles de A, on voit que $\tilde{\Omega}_0$ est inclus dans la "limite" $\bigcup_{\alpha>0} \bigcap_{\epsilon \in]0;\alpha[} \Omega_{q,0}$. Ceci permettra de donner un sens à l'affirmation : "B converge vers $\tilde{B}$ sur $\tilde{\Omega}_0$" et à des conditions de convergence uniforme.

Figure 2



3.2.1 Etude locale

Outre les hypothèses précédentes, on suppose que $\tilde{B}$ est holomorphe en 0, ainsi que B pour ϵ assez petit :

$$\begin{cases} \tilde{B} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 z + ... \\ B = B_0 + B_1 z + ... \end{cases}$$

(les B_m dépendent donc de q), et que la convergence de B vers $\tilde{B}$ est normale dans un disque ouvert non vide $\overset{\circ}{D}(0,\rho) \subset \tilde{\Omega}_0$: il existe une série entière $b_0 + b_1 z + ...$ de rayon de convergence $\rho > 0$ telle que, pour ϵ assez petit[2] :

$$\forall m \in \mathbf{N} \ : \ ||B_m|| \leq b_m$$

Proposition

X converge uniformément vers $\tilde{X}$ sur un disque ouvert non vide $\overset{\circ}{D}(0,r) \subset \tilde{\Omega}_0$.

Pour le démontrer, nous aurons besoin du

Lemme

Il existe une constante C telle que
(i) $\forall m \geq 1$, $||(mI_n - \tilde{B}(0))^{-1}|| \leq C$
(ii) Pour ϵ suffisamment petit, $\forall m \geq 1$, $||(\frac{q^m-1}{q-1}I_n - B(0))^{-1}|| \leq C$

Preuve du lemme

Pour $m \geq 1$, $(mI_n - \tilde{B}(0))^{-1}$ existe (condition de non-résonnance) ; comme sa norme tend vers 0 pour $m \to \infty$, la première conclusion est assurée.

On a vu au 3.1.1 (corollaire du lemme 2) que $|\frac{q^m-1}{q-1}| \geq m\frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|}$. Pour ϵ petit, c'est à dire pour q proche de 1, on a donc une majoration uniforme de $||(\frac{q^m-1}{q-1}I_n - B(0))^{-1}||$ valable pour $m \geq m_0$, m_0 étant convenablement choisi (assez grand). Comme la limite de $\frac{q^m-1}{q-1}I_n - B(0)$ est $mI_n - \tilde{B}(0)$ et que l'on n'a besoin de considérer que le cas où $m < m_0$, la seconde conclusion est également assurée. □

Preuve de la proposition

La résolution formelle des deux systèmes se mène en parallèle : leurs solutions respectives sont $X = X_0 + zX_1 + ...$ et $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + z\tilde{X}_1 + ...$, où $\tilde{X}_0 = X_0$ est une donnée et où les autres termes se calculent par récurrence :

$$\begin{cases} X_m = (q^m I_n - A_0)^{-1}(A_1 X_{m-1} + ... + A_m X_0) \\ \tilde{X}_m = (mI_n - \tilde{B}_0)^{-1}(\tilde{B}_1 \tilde{X}_{m-1} + ... + \tilde{B}_m \tilde{X}_0) \end{cases}$$

Mais, compte tenu de ce que $A_0 = I_n + \eta B_0$ et, pour $m \geq 1$, $A_m = \eta B_m$, la première relation se réécrit :

$$X_m = \frac{q^m - 1}{q-1}I_n - B_0)^{-1}(B_1 X_{m-1} + ... + B_m X_0)$$

[2]Dans tout ce chapitre, on notera $||-||$ une norme quelconque sur $\mathbf{C}^n$ ainsi que la norme subordonnée sur $M_n(\mathbf{C})$, par exemple $||M|| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq j\leq n} |m_{i,j}|$

La convergence uniforme sur un disque de la fonction analytique B vers la fonction analytique $\tilde{B}$ entraine la convergence terme à terme : $\forall m \in \mathbf{N}$, $\tilde{B}_m \to B_m$. On en déduit par récurrence le fait que, quelque soit m, $\tilde{X}_m \to X_m$. Ceci est évidemment valable sur $\tilde{\Omega}_0$.

On applique la méthode des séries majorantes à ces deux résolutions formelles : on introduit $\overline{\mathcal{X}}(z) = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 z + ...$, où $\overline{x}_0 = ||X_0|| = ||\tilde{X}_0||$ et où $\overline{x}_m = C(b_1\overline{x}_{m-1} + ... + b_m\overline{x}_0)$ (C est la constante fournie par le lemme ci-dessus).

La série entière $\overline{\mathcal{X}}(z)$ a un rayon de convergence $\rho' > 0$ (voir la preuve du lemme 1 de 1.2.2). Prenant $r = \min(\rho, \rho')$, on conclut que la convergence de X vers $\tilde{X}$ est dominée sur $\overset{\circ}{D}(0, r)$, plus précisément : $\forall m \in \mathbf{N}$, $||X_m z^m|| \leq b_m r^m$, avec $\sum\limits_{m \geq 0} b_m r^m < \infty$. L'invocation du théorème de convergence dominée achève la démonstration. □

Cette démonstration contient implicitement la preuve de la non-résonnance du système au q-différences pour q proche de 1.

3.2.2 Etude globale

On va maintenant sortir du disque $\overset{\circ}{D}(0, r)$ le long de segments de spirales de la forme $q_0^{[a;b]}$ qui ne rencontrent pas les pôles $\tilde{z}_i$.

On suppose donc dorénavant que, pour tout tel segment de spirale inclus dans $\tilde{\Omega}_0$, A est défini sur tout ce segment pour q assez voisin de 1. Cette hypothèse sera subsumée par l'hypothèse C que l'on introduira au 3.2.3 (convergence uniforme de B vers $\tilde{B}$ sur tout tel segment).

Fixons un point $z_1 \in \tilde{\Omega}_0$ en lequel on veut démontrer que $X \to \tilde{X}$. Pour un certain $\lambda > 0$, $z_0 = q_0^{-\lambda} z_1 \in \overset{\circ}{D}(0, r)$. Si $z_1 \in \overset{\circ}{D}(0, r)$, on peut même prendre $\lambda = 0$, mais dans ce cas il n'y a rien à prouver !

Puisque $|z_0| < r$, on peut aussi fixer un certain $\alpha > 0$, tel que $|q_0^\alpha z_0| < r$, de sorte que $q_0^{[-\infty;\alpha]} z_0$ est une partie compacte de $\overset{\circ}{D}(0, r)$.

Notons d'autre part Σ le lieu polaire de A (et de B) et $\Omega_q = \mathbf{C} - q_0^{\mathbf{R}}\Sigma$: c'est un ouvert (non connexe en général) contenu dans $\Omega_{q,0}$. D'après les hypothèses sur les pôles, pour q assez proche de 1, $z_1 \in \Omega_q$ et l'on a même en fait l'inclusion $q_0^{\mathbf{R}} z_1 = q_0^{\mathbf{R}} z_0 \subset \Omega_q$. On le supposera désormais.

On passe aux variables réelles en posant $z = q_0^t z_0$, $t \in \mathbf{R}$ et :

$$\begin{cases} Y_\epsilon(t) = X(q_0^t z_0) \\ \tilde{Y}(t) = \tilde{X}(q_0^t z_0) \\ C_\epsilon(t) = \frac{q-1}{\epsilon} B(q_0^t z_0) \\ \tilde{C}(t) = -2\imath\pi\tau_0 \tilde{B}(q_0^t z_0) \end{cases}$$

Notre but est donc de démontrer que $Y_\epsilon(\lambda) \to \tilde{Y}(\lambda)$, c'est à dire que $X(z_1) \to \tilde{X}(z_1)$.

Les conditions posées et les conclusions déjà obtenues se réécrivent :

$$\begin{cases} Y_\epsilon(-\infty) = \tilde{Y}(-\infty) = X_0 & \text{(dont on ne se servira pas)} \\ Y_\epsilon(t+\epsilon) = (I_n + \epsilon C_\epsilon(t)) Y_\epsilon(t) & \text{(l'équation fonctionnelle)} \\ \tilde{Y}'(t) = \tilde{C}(t)\tilde{Y}(t) & \text{(l'équation différentielle)} \\ \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} Y_\epsilon(t) = \tilde{Y}(t) & \text{(convergence uniforme sur } [-\infty; \alpha]\text{, obtenue au 3.2.1)} \\ \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} C_\epsilon(t) = \tilde{C}(t) & \text{(hypothèse qui sera renforcée plus loin)} \end{cases}$$

On invoquera maintenant la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles linéaires (vectorielles, d'ordre 1), dans sa version multiplicative et à pas non constant[3]. Faute d'une référence exactement appropriée à nos besoins, nous invoquerons [20] (problème d'analyse, III.5 et IV.1).

Théorème

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(]a;b[, M_n(\mathbf{C}))$ et soient $t_0 < t_1$ dans $]a;b[$. On se donne, pour p entier ≥ 1, une subdivision $t_0 = s_0^{(p)} < s_1^{(p)} < ... < s_{p-1}^{(p)} < s_p^{(p)} = t_1$ de diamètre $\epsilon_p := \max\limits_{0 \leq i \leq p-1} \Delta s_i^{(p)}$ (on note $\Delta s_i^{(p)} = s_{i+1}^{(p)} - s_i^{(p)}$). On suppose que $\lim\limits_{p \to \infty} \epsilon_p = 0$. Alors, la résolvante de l'équation différentielle $\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X}$ est donnée par la formule :

$$U(t_1, t_0) = \lim_{p \to \infty} (I_n + \mathcal{A}(s_{p-1}^{(p)}) \Delta s_{p-1}^{(p)}) ... (I_n + \mathcal{A}(s_0^{(p)}) \Delta s_0^{(p)})$$

Appliquons ce théorème pour calculer la résolvante $\tilde{U}(\lambda, \mu)$ de l'équation différentielle $\tilde{Y}' = \tilde{C}\tilde{Y}$: nous aurons donc $\tilde{Y}(\lambda) = \tilde{U}(\lambda, 0)\tilde{Y}(0)$. On subdivise $[0; \lambda]$ avec le pas $\nu\epsilon$ puis N fois le pas ϵ, où $N = E(\frac{\lambda}{\epsilon})$ et $\nu = \frac{\lambda}{\epsilon} - N$. On trouve :

$$\tilde{U}(\lambda, 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (I_n + \epsilon \tilde{C}(\lambda - \epsilon)) ... (I_n + \epsilon \tilde{C}(\lambda - N\epsilon))(I_n + \nu\epsilon \tilde{C}(0))$$

[3] On peut considérer tout ce travail comme une vision géométrique de la méthode d'Euler : la géométrie étant celle des zéros, des pôles et de la ramification des solutions complexes exactes et approchées

Mais nous voulons utiliser C et non $\tilde{C}$. Nous remplacerons donc [20], III.6 par une version améliorée que l'on déduit du

Lemme

Soient $A_1, ..., A_m, E_1, ..., E_m$ des éléments de $M_n(\mathbf{C})$ et notons $A'_1 = A_1 + E_1, \ldots, A'_m = A_m + E_m$. Alors

$$||(I_n + A_1)...(I_n + A_m) - (I_n + A'_1)...(I_n + A'_m)|| \leq (\sum_{i=1}^{m} ||E_i||) \exp(\sum_{i=1}^{m}(||A_i|| + ||E_i||))$$

Preuve

On pose, pour $t \in [0;1]$, $f(t) = (I_n + A_1 + tE_1)...(I_n + A_m + tE_m)$. Alors

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{m}(I_n + A_1 + tE_1)...E_i...(I_n + A_m + tE_m)$$

et l'on tire de l'inégalité triangulaire :

$$||f'(t)|| \leq \sum_{i=1}^{m} ||E_i|| \prod_{j \neq i}(1 + ||A_j|| + ||E_j||)$$

Cette majoration permet de conclure, puisque $1 + x \leq e^x$. $\square$

Corollaire

Soient $(A_{p,i})$ et $(B_{p,i})$ deux familles de matrices indexées par des couples d'entiers (p, i) tels que $1 \leq i \leq p$. On considère les suites de terme général $U_p = (I_n + A_{p,1})...(I_n + A_{p,p})$ et $V_p = (I_n + B_{p,1})...(I_n + B_{p,p})$. On suppose que, lorsque $p \to \infty$:
(i) La suite de terme général $\sum_{1 \leq i \leq p} ||A_{p,i}||$ est bornée.
(ii) La suite de terme général $\sum_{1 \leq i \leq p} ||A_{p,i} - B_{p,i}||$ converge vers 0.
Alors $\lim_{p \to \infty} ||U_p - V_p|| = 0$.

Preuve

On applique le lemme avec $A_{p,i}$ pour A_i et $B_{p,i} - A_{p,i}$ pour E_i ; il vient :

$$||U_p - V_p|| \leq (\sum_{1 \leq i \leq p} ||A_{p,i} - B_{p,i}||) \exp(\sum_{1 \leq i \leq p} ||A_{p,i}|| + \sum_{1 \leq i \leq p} ||A_{p,i} - B_{p,i}||)$$

La conclusion est immédiate. $\square$

Nous utiliserons ce corollaire avec pour matrices $A_{p,i}$ et $B_{p,i}$ les valeurs respectives de $\tilde{C}$ et C aux points de la subdivision introduite plus haut. La condition (i) est vérifiée :

$$\sum_{1\leq i\leq p} ||A_{p,i}|| = \sum_{j=1}^{N} \epsilon||\tilde{C}(\lambda - j\epsilon)|| + \nu\epsilon||\tilde{C}(0)||$$

C'est une somme de Riemann, elle converge vers $\int_0^\lambda ||\tilde{C}(t)||\, dt$ ($\tilde{C}$ est une fonction continue) ; la suite correspondante est donc bornée.

De même, pour vérifier la condition (ii), on considère la somme :

$$\sum_{1\leq i\leq p} ||A_{p,i} - B_{p,i}|| = \sum_{j=1}^{N} \epsilon||\tilde{C}(\lambda - j\epsilon) - C_\epsilon(\lambda - j\epsilon)|| + \nu\epsilon||\tilde{C}(0) - C_\epsilon(0)||$$

Majorant uniformément tous les termes, et remplaçant $(N\epsilon + \nu\epsilon)$ par sa valeur λ, il vient :

$$\sum_{1\leq i\leq p} ||A_{p,i} - B_{p,i}|| \leq \lambda \sup_{[0;\lambda]}||\tilde{C} - C_\epsilon||$$

Ce dernier majorant aura pour limite 0, et donc, la condition (ii) sera à coup sur vérifiée, si C_ϵ converge uniformément vers $\tilde{C}$ sur $[0;\lambda]$; on le suppose donc. On voit alors que

$$\tilde{U}(\lambda, 0) = \lim_{\epsilon\to 0^+} (I_n + \epsilon C_\epsilon(\lambda - \epsilon))...(I_n + \epsilon C_\epsilon(\lambda - N\epsilon))(I_n + \nu\epsilon C_\epsilon(0))$$

Par ailleurs, itérant l'équation fonctionnelle satisfaite par Y_ϵ, on trouve :

$$Y_\epsilon(\lambda) = (I_n + \epsilon C_\epsilon(\lambda - \epsilon))...(I_n + \epsilon C_\epsilon(\lambda - N\epsilon))Y_\epsilon(\nu\epsilon)$$

Le produit ci-dessus est, à un facteur près, celui dont la limite est $\tilde{U}(\lambda, 0)$; le facteur manquant est $I_n + \nu\epsilon C_\epsilon(0)$, qui tend vers I_n. La convergence uniforme de Y_ϵ vers $\tilde{Y}$ sur $[-\infty; \alpha]$ implique que $\lim_{\epsilon\to 0^+} Y_\epsilon(\nu\epsilon) = \tilde{Y}(0)$. Ainsi, la limite de $Y_\epsilon(\lambda)$ est $\tilde{U}(\lambda, 0)\tilde{Y}(0)$, c'est à dire $\tilde{Y}(\lambda)$ par définition de la résolvante $\tilde{U}$. Autrement dit : $\lim_{\epsilon\to 0^+} X(z_1) = \tilde{X}(z_1)$: ceci achève l'étude globale.

Proposition

Les hypothèses : $\tilde{C}$ continue sur $[0;\lambda]$ et : $C_\epsilon \to \tilde{C}$ uniformément sur $[0;\lambda]$ entrainent : $Y_\epsilon(\lambda) \to \tilde{Y}(\lambda)$, c'est à dire : $X(z_1) \to \tilde{X}(z_1)$. □

3.2.3 Synthèse des résultats

On se donne $\tilde{B} \in M_n(\mathbf{k})$, matrice d'une équation différentielle linéaire *fuchsienne* : les pôles $\tilde{z}_1$,...,$\tilde{z}_r$ de $\tilde{B}$ sur $\mathbf{S}$ sont donc en fait des éléments de $\mathbf{C}^*$.

On se donne également une condition initiale $X_0 \in \mathbf{C}^n - \{0\}$ telle que $\tilde{B}X_0 = 0$. On suppose que l'équation avec condition initiale :

$$\begin{cases} \delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X} \\ \tilde{X}(0) = X_0 \end{cases}$$

est non-résonnante, c'est à dire qu'aucun entier non nul n'est valeur propre de $\tilde{B}(0)$. Elle admet alors une unique solution formelle, celle-ci est convergente et admet un unique prolongement analytique sur l'ouvert simplement connexe

$$\tilde{\Omega}_0 = \mathbf{C} - \bigcup_{1\leq j\leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbf{R}^+} = \mathbf{S} - \bigcup_{1\leq j\leq r} \tilde{z}_j q_0^{\overline{\mathbf{R}^+}}$$

On se donne enfin une matrice $B \in M_n(\mathbf{k})$ *dont les coefficients dépendent de* q et soumise aux conditions :

- (A) Les pôles de B tendent vers ceux de $\tilde{B}$, au sens suivant : $\forall z \notin \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$, B est définie en z pour ϵ assez petit.
- (B) Il y a un disque fermé non trivial $\overline{D}(0,\rho) \subset \tilde{\Omega}_0$ sur lequel B converge uniformément vers $\tilde{B}$.
- (C) Il y a également convergence uniforme de B vers $\tilde{B}$ sur tout segment de spirale $q_0^{[a;b]}z_0 \subset \tilde{\Omega}_0$.

Les conditions (B) et (C) sont des renforcements de (A) ; (C) garantit l'hypothèse faite au début de l'étude globale.

Si z_1,...,z_s sont les pôles de B, on peut encore définir un ouvert simplement connexe (dépendant de q)

$$\Omega_{q,0} = \mathbf{C} - \bigcup_{1\leq j\leq s} z_j q_0^{\mathbf{R}^+} = \mathbf{S} - \bigcup_{1\leq j\leq s} z_j q_0^{\overline{\mathbf{R}^+}}$$

D'après les hypothèses, tout ouvert relativement compact de $\tilde{\Omega}_0$ est contenu dans $\Omega_{q,0}$ pour q assez proche de 1.

Théorème

On pose $\eta = q-1$ et $A = I_n + \eta B$. Alors, pour ϵ assez petit, l'équation aux q-différences avec condition initiale

$$\begin{cases} \sigma_q X = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution formelle X, qui est convergente et se prolonge analytiquement à $\Omega_{q,0}$. Lorsque ϵ tend vers 0, X tend vers $\tilde{X}$.

Preuve

La remarque qui précède immédiatement l'énoncé du théorème justifie le sens de l'expression "X tend vers $\tilde{X}$". Les calculs de l'étude locale ont montré que le système aux q-différences avec condition initiale ci-dessus est non-résonnant pour ϵ assez petit, d'où les affirmations concernant X (par invocation du chapitre 1). L'hypothèse (B) est celle qui a servi à justifier l'étude locale elle-même (pour prouver la convergence dominée). L'hypothèse (C) est celle qui nous a servi à justifier l'étude globale au 3.2.2. $\square$

Nous nommerons la conjonction des hypothèses (B) et (C) "convergence uniforme sur suffisamment de compacts de Ω_0". Elle est notamment impliquée par la convergence uniforme sur tout compact.

3.2.4 Application

Le théorème sera appliqué de façon quelque peu contournée à une étape du dévissage des équations $\sigma_q X = AX$ et $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$ au 3.4 : celle qui concerne la partie H dans l'écriture $X = Q_0 HLC$ des solutions canoniques obtenue au 1.2, ou la partie F dans l'écriture $X = Fe_{q,A}$ obtenue au 1.3. On donne ici une brève description de ces applications, qui sera reprise dans son contexte au 3.4.

Solutions canoniques première manière

Dans le dévissage première manière, on considère l'équation aux q-différences *matricielle* :

$$\begin{cases} \sigma_q Y = KYK_0^{-1} \\ Y(0) = I_n \end{cases}$$

Ici, $K \in GL_n(\mathbf{k})$ et $K_0 = K(0) \in GL_n(\mathbf{C})$.

De façon analogue, on a affaire à l'équation différentielle (matricielle aussi) :

$$\begin{cases} \delta\tilde{Y} = \tilde{J}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{J}_0 \\ \tilde{Y}(0) = I_n \end{cases}$$

Ici, $\tilde{J} \in M_n(\mathbf{k})$ et $\tilde{J}_0 = \tilde{J}(0) \in M_n(\mathbf{C})$.

On suppose cette dernière équation non résonnante, au sens où deux valeurs propres de $\tilde{J}_0$ ne peuvent différer d'un entier non nul. Cela revient à dire qu'aucune valeur propre de l'endomorphisme $M \mapsto \tilde{J}(0)\tilde{M} - \tilde{M}\tilde{J}_0$ de $M_n(\mathbf{C})$ n'est un entier non nul (cf 1.3.1.2). On suppose aussi que $K = I_n + \eta J$ où $J \to \tilde{J}$ avec "convergence uniforme sur suffisamment de compacts" de $\tilde{\Omega}_0$, ce dernier défini par les pôles de $\tilde{J}$; et que les pôles de K tendent vers ceux de $\tilde{J}$.

Ces équations matricielles peuvent être vues comme des équations vectorielles dans $\mathbf{C}^{n^2}$ auxquelles on applique ce qui précède : on instancie $X \mapsto AX$ par $Y \mapsto KYK_0^{-1}$ et

$\tilde{X} \mapsto \tilde{B}\tilde{X}$ par $\tilde{Y} = \tilde{J}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{J}_0$. Alors BX est instancié par

$$\frac{KYK_0^{-1} - Y}{q-1} = (JY - YJ_0)K_0^{-1}$$

On a en effet écrit $K = I_n + \eta J$ et $K_0 = I_n + \eta J_0$. Comme $J \to \tilde{J}$ et $K_0 \to I_n$ (uniformément), on peut prouver que les hypothèses du théorème sont satisfaites et l'on conclut que $Y \to \tilde{Y}$ sur $\tilde{\Omega}_0$.

Solutions canoniques deuxième manière

Ici, l'étape correspondante du dévissage consiste à se ramener à une équation à coefficients constants par une transformation de jauge holomorphe et tangente à l'identité.

Pour l'équation $\sigma_q X = AX$, la transformation de jauge est spécifiée par les conditions :

$$\begin{cases} \sigma_q F = AFA(0)^{-1} \\ F(0) = I_n \end{cases}$$

Pour l'équation $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$, la transformation de jauge est spécifiée par les conditions :

$$\begin{cases} \delta\tilde{F} = \tilde{B}\tilde{F} - \tilde{F}\tilde{B}(0) \\ \tilde{F}(0) = I_n \end{cases}$$

Ces équations *matricielles* peuvent être considérées comme des équations *vectorielles* dans $M_n(\mathbf{C})$ et on peut leur appliquer les résultats précédents : les hypothèses sont manifestement vérifiées et l'on conclut que $F \to \tilde{F}$ sur $\tilde{\Omega}_0$.

3.3 Convergence de la partie log-car

Nous traiterons successivement (et quasi-indépendamment) les deux formes canoniques obtenues au chapitre 1. La première ($X = Q_0HLC$) nécessitera une renormalisation, tandis que la seconde ($X = Fe_{q,A(0)}$) non : c'est là un de ses nombreux charmes.

3.3.1 Renormalisation et convergence des parties log-car LC

La solution canonique obtenue en 1.2 a la forme $X = Q_0HN$, où :

- $K_0 = Q_0^{-1}A_0Q_0$ est une matrice de Jordan, formée de blocs $c\xi_{1,m}$.
- $N = LC$, partie log-car, est formée de blocs $e_{q,c}L_m$ et vérifie l'équation fonctionnelle matricielle $\sigma_q N = K_0N$.
- H est l'unique solution du système aux q-différences matriciel avec conditions initiales :
$$\begin{cases} \sigma_q H = KHK_0^{-1} \\ H(0) = I_n \end{cases}$$
dans lequel on a posé $K = Q_0^{-1}AQ_0$.

Renormalisation des solutions canoniques

La théorie des fonctions de 3.1 a mis en lumière le fait que c'est $(q-1)l_q$, et non l_q elle-même, qui se comporte agréablement lorsque $q \to 1$. Ainsi nos matrices L_m ne convergeront pas.

Au lieu des blocs $e_{q,c}L_m$, on préfèrera donc faire apparaitre des blocs $e_{q,c}L'_{c,m}$ définis comme suit :

$$L'_{c,m} = \begin{pmatrix} l_q^{(0)} & (\eta/c)^1 l_q^{(1)} & \dots & (\eta/c)^{m-1} l_q^{(m-1)} \\ 0 & l_q^{(0)} & \dots & (\eta/c)^{m-2} l_q^{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_q^{(0)} \end{pmatrix} = (\xi'_{1,\eta/c,m})^{l_q}$$

$$\xi'_{\lambda,\mu,m} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \mu\xi_{\lambda/\mu,m}$$

Comme d'habitude, on a posé $\eta = q - 1$. Ces blocs satisfont l'équation fonctionnelle :

$$\sigma_q(e_{q,c}L'_{c,m}) = \xi'_{c,\eta,m}(e_{q,c}L'_{c,m})$$

On passe des anciens blocs aux nouveaux par une conjugaison. Notant $E_m(x) = \mathrm{diag}(1, x, ..., x^{m-1})$, on a les relations :

$$\xi'_{\lambda,\mu,m} = (E_m(\mu/\lambda))^{-1}(\lambda\xi_{1,m})E_m(\mu/\lambda)$$

$$L'_{c,m} = (E_m(\eta/c))^{-1}(L_m)E_m(\eta/c)$$

La réduite de Jordan de A_0 sous forme de diagonale de blocs renormalisés ξ' sera alors $K'_0 = (Q'_0)^{-1}A_0Q'_0$, où $Q'_0 = Q_0E_0$ et où $K'_0 = E_0^{-1}K_0E_0$; la “matrice de renormalisation” E_0 est formée des blocs $E_m(\eta/c)$ correspondant aux exposants c. La partie log-car de la solution renormalisée est $N' = E_0^{-1}NE_0$, formée des blocs $e_{q,c}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\sigma_qN' = K'_0N'$.

La solution renormalisée est alors $X' = Q'_0H'N'$, où H' est spécifié par le système avec condition initiale :

$$\begin{cases} \sigma_qH' = K'H'(K'_0)^{-1} \\ H'(0) = I_n \end{cases}$$

dans lequel on a posé $K' = (Q'_0)^{-1}AQ'_0$.

On voit facilement qu'en fait, $H' = E_0^{-1}HE_0$, puisque cette dernière matrice satisfait aux conditions qui spécifient H' de manière univoque. La solution canonique renormalisée est donc simplement $X' = XE_0$.

Autrement dit, en termes de la construction vectorielle de 1.2, la solution renormalisée s'obtient en multipliant chaque vecteur d'exposant c et de “poids logarithmique” k (c'est à dire, dont l'expression fait intervenir $l_q^{(0)}$,...,$l_q^{(k)}$) par le facteur $(\eta/c)^k$. Les logarithmes “sous-dominants” sont donc voués à disparaitre à la limite.

Convergence de la partie log-car renormalisée

Supposons maintenant que la matrice A de l'équation aux q-différences varie “avec structure de Jordan en 0 continue”, c'est à dire : les blocs de la réduction de $A(0)$ sont de taille constante, les exposants de la forme $c_i = 1 + \eta\gamma_i$, où $\gamma_i \to \tilde{\gamma}_i$. Ainsi, on peut écrire $K = I_n + \eta J$, avec $J \to \tilde{J}$.

Dans ces conditions, on peut déduire des résultats de 3.1.3 et 3.1.4 que :

$$\begin{cases} e_{c_i}(z) \to (-z)^{\tilde{\gamma}_i} \\ (\eta/c_i)^k l_q^{(k)}(z) \to \frac{(\log(-z))^k}{k!} \end{cases}$$

Il s'agit, bien sur, des déterminations principales sur Ω déjà mentionnées. La partie log-car renormalisée tend donc vers la matrice $\tilde{N}$ formée des blocs :

$$(-z)^{\tilde{\gamma}_i}\begin{pmatrix} 1 & \log(-z) & ... & \frac{(log(-z))^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & ... & \frac{(log(-z))^{m_i-2}}{(m_i-2)!} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = (-z)^{\tilde{\gamma}_i} e^{\xi_{0,m_i}\log(-z)} == (-z)^{\xi_{\tilde{\gamma}_i,m_i}}$$

qui n'est autre que la solution canonique de l'équation différentielle $\delta\tilde{L} = \tilde{J}\tilde{L}$ produite par la méthode de Frobenius (*voir* [16], [28]) ; à ceci près que nous utilisons $(-z)^{\mu}$ et $\log(-z)$ au lieu de z^{μ} et $\log(z)$.

3.3.2 Parties log-car de la forme $e_{q,A}$

Dans le cas non-résonnant, on a introduit au 1.3 une autre version des solutions fondamentales canoniques, via l'équivalence avec une équation à coefficients constants : A est équivalente à $A(0)$ par une transformation de jauge F méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe et même tangente à l'identité en 0. Il y a une solution canonique spéciale $e_{q,A(0)}$ à l'équation à coefficients constants, et donc une solution canonique $Fe_{q,A(0)}$ à l'équation de départ. La partie log-car de celle-ci est donc $e_{A(0)}$, et on va ici étudier son comportement lorsque $q \to 1$.

Pour simplifier les notations, on se placera directement dans le cas d'une famille (paramétrée par q) d'équations à coefficients constants, confluant en une équation différentielle à coefficients constants. A est donc une matrice de $GL_n(\mathbf{C})$ mais dépendant de q.

Remarque préliminaire

Considérons les matrices suivantes :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_\epsilon = \epsilon\begin{pmatrix} \cos^2\frac{1}{\epsilon} & -\sin\frac{1}{\epsilon}\cos\frac{1}{\epsilon} \\ -\sin\frac{1}{\epsilon}\cos\frac{1}{\epsilon} & \sin^2\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

On voit donc que $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} B_\epsilon = \tilde{B}$. Mais B_ϵ/ϵ est la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur de coordonnées $(\cos 1/\epsilon, -\sin 1/\epsilon)$. Toute trigonalisation de B_ϵ sera donc obtenue dans une base tournant infiniment vite lorsque $\epsilon \to 0^+$, et l'on ne peut déployer *aucune* trigonalisation de $\tilde{B}$ en une trigonalisation de B_ϵ. Ceci justifie l'introduction d'une hypothèse particulière dans la définition qui suit.

Définition

On dira que B tend vers $\tilde{B}$ avec sa triangularisation s'il existe une triangularisation $S^{-1}BS = T$ (dépendant donc de q) et une triangularisation $\tilde{S}^{-1}\tilde{B}\tilde{S} = \tilde{T}$ telles que $S \to \tilde{S}$ et donc $T \to \tilde{T}$.

C'est par exemple le cas si $\tilde{B}$ est diagonalisable.

Convergence de $e_{q,A}$

On suppose ici que, pour chaque valeur de q, $B \in M_n(\mathbf{C})$. On note $A = I_n + (q-1)B$ et l'on se propose de préciser le comportement de $e_{q,A}$ lorsque $\epsilon \to 0^+$ et que $B \to \tilde{B}$ avec sa triangularisation. On reprend les notations précédentes.

Soit $\overline{D} + \overline{N}$ la décomposition de Dunford additive de B. La décomposition de Dunford multiplicative DU de A s'obtient en prenant $D = I_n + (q-1)\overline{D}$ et $U = I_n + (q-1)D^{-1}\overline{N}$. Alors la matrice diagonale $\Delta = SDS^{-1}$ et la matrice diagonale $\overline{\Delta} = S\overline{D}S^{-1}$ (qui est la partie diagonale de T) sont liées par la relation : $\Delta = I_n + (q-1)\overline{\Delta}$.

Soient $\tilde{D} + \tilde{N}$ la décomposition de Dunford additive de $\tilde{B}$ et $\tilde{\Delta} = \tilde{S}\tilde{D}\tilde{S}^{-1}$ la partie diagonale de $\tilde{T}$. Donc $(\Delta - I_n)/(q-1)$ tend vers $\tilde{\Delta}$. Il est alors immédiat (d'après les résultats de 3.1.3) que $e_{q,\Delta}$ tend vers $(-z)^{\tilde{\Delta}}$ et donc $e_{q,D}$ tend vers $(-z)^{\tilde{D}}$.

Comme $D^{-1}\overline{N}$ tend vers $\tilde{N}$, il découle pareillement des résultats de 3.1.4 que la limite de $U^{l_q} = (I_n + (q-1)D^{-1}\overline{N})^{l_q}$ est $(-z)^{\tilde{N}}$: cela revient en effet à dire que $(q-1)^k l_q^{(k)} \to (\log(-z))^k/k!$.

On voit donc que $e_{q,A}$ tend vers $(-z)^{\tilde{B}}$.

3.4 Dévissages en parallèle

On se donne maintenant

- Une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels fuchsienne non résonnante : $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$. On nomme $\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r$ les pôles de $\tilde{B}$: ce sont des éléments de $\mathbf{C}^*$. On note

$$\tilde{J}_0 = (\tilde{Q}_0)^{-1}\tilde{B}_0\tilde{Q}_0 = \begin{pmatrix} \xi_{\tilde{\gamma}_1,m_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \xi_{\tilde{\gamma}_2,m_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \xi_{\tilde{\gamma}_r,m_r} \end{pmatrix}$$

  une réduction de Jordan de $\tilde{B}_0 = \tilde{B}(0)$.
- Une équation aux q-différences linéaire à coefficients rationnels fuchsienne en 0 : $\sigma_q X = AX$, où $A \in GL_n(\mathbf{k})$ dépend de q. On suppose que l'on peut écrire la matrice A sous la forme $I_n + \eta B$ $(\eta = q-1)$, avec $B \underset{\epsilon\to 0^+}{\to} \tilde{B}$.

On supposera que la convergence $B \to \tilde{B}$ est astreinte à satisfaire les conditions suivantes :

- (A) Les pôles de A (et donc de B) tendent vers ceux de $\tilde{B}$.
- (B) $B \to \tilde{B}$ et il y a "convergence uniforme sur suffisamment de compacts" de $\tilde{\Omega}_0$.
- (C) La variation de B_0 est à structure de Jordan constante : $\tilde{Q}_0$ se prolonge en Q_0, fonction continue de q dont elle est la limite lorsque $\epsilon \to 0^+$, de sorte que l'on ait une réduction de Jordan en famille :

$$J_0 = (Q_0)^{-1}B_0Q_0 = \begin{pmatrix} \xi_{\gamma_1,m_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \xi_{\gamma_2,m_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \xi_{\gamma_r,m_r} \end{pmatrix}$$

  et $\gamma_i \to \tilde{\gamma}_i$ $(i = 1, ..., r)$.

Toutes ces conditions sont, par exemple, vérifiées si l'on prend $B = \tilde{B}$!

Dans ces conditions, la variation de A_0 est aussi à structure de Jordan constante :

$$K_0 = (Q_0)^{-1}A_0Q_0 = \begin{pmatrix} \xi'_{c_1,\eta,m_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \xi'_{c_2,\eta,m_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \xi'_{c_r,\eta,m_r} \end{pmatrix}$$

avec $c_i = 1 + \eta\gamma_i$ $(i = 1, ..., r)$.

La résolution canonique de l'équation différentielle par la méthode de Frobenius comporte les étapes suivantes (*voir* [16],[28]) :

1. On choisit une matrice "log-exposants" $\tilde{N}$ telle que $\delta\tilde{N} = \tilde{J}_0\tilde{N}$. Le choix canonique est celui d'une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont déterminés par la

structure de Jordan et ont la forme :

$$(-z)^{\tilde{\gamma}_i}\begin{pmatrix}1 & \log(-z) & ... & \frac{(log(-z))^{m_i-1}}{(m_i-1)!}\\ 0 & 1 & ... & \frac{(log(-z))^{m_i-2}}{(m_i-2)!}\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix} = (-z)^{\tilde{\gamma}_i}e^{\xi_{0,m_i}\log(-z)} == (-z)^{\xi_{\tilde{\gamma}_i,m_i}}$$

A ceci près, bien sur, que le choix classique comporte plutôt $\log z$ et $z^{\tilde{\gamma}}$, que nous avons remplacés par les déterminations principales de $\log(-z)$ et de $(-z)^{\tilde{\gamma}}$ sur Ω.

2. On cherche alors la solution $\tilde{X}$ sous la forme $\tilde{Q}_0\tilde{Y}\tilde{N}$, $\tilde{Y}$ étant spécifié par l'équation différentielle matricielle avec condition initiale :

$$\begin{cases}\delta\tilde{Y} = \tilde{J}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{J}_0\\ \tilde{Y}(0) = I_n\end{cases}$$

On a posé $\tilde{J} = (\tilde{Q}_0)^{-1}\tilde{B}\tilde{Q}_0$. Ceci détermine alors un unique $\tilde{Y}$ sur $\tilde{\Omega}_0$, grace à l'hypothèse de non-résonnance.

3.4.1 Convergence des solutions du type Q_0HLC

La résolution canonique de l'équation aux q-différences obtenue en 1.2, telle qu'elle a été renormalisée en 3.3 comporte les étapes suivantes :

1. Une matrice log-car $N = LC$ vérifie $\sigma_q N = K_0 N$. Le choix canonique (une fois choisie une réduction de Jordan) est celui de la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont déterminés par la structure de Jordan et ont la forme :

$$e_{q,c_i}\begin{pmatrix}l_q^{(0)} & (\eta/c)^1 l_q^{(1)} & ... & (\eta/c)^{m-1}l_q^{(m-1)}\\ 0 & l_q^{(0)} & ... & (\eta/c)^{m-2}l_q^{(m-2)}\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & l_q^{(0)}\end{pmatrix}$$

On a vu que, dans ces conditions, $N \to \tilde{N}$ sur Ω.

2. On cherche alors la solution X sous la forme Q_0YN, Y étant spécifié par le système aux q-différences matriciel avec condition initiale :

$$\begin{cases}\sigma_q Y = KYK_0^{-1}\\ Y(0) = I_n\end{cases}$$

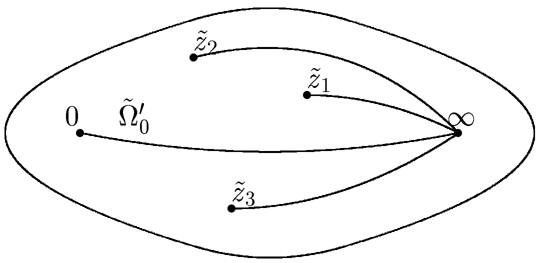
On a posé $K = Q_0^{-1}AQ_0$. Ceci détermine alors, pour ϵ assez petit, un unique Y sur $\Omega_{q,0}$, grace à la non-résonnance. On a vu au 3.2 que $Y \to \tilde{Y}$ sur $\tilde{\Omega}_0$.

On réunit ces conclusions en un

Théorème

La solution canonique renormalisée X *tend vers la solution canonique* $\tilde{X}$ *sur* $\tilde{\Omega}'_0 = \Omega \cap \tilde{\Omega}_0$. $\square$

Figure 3



3.4.2 Convergence des solutions du type $Fe_{q,A(0)}$

Le raisonnement est en tout point analogue à celui qui précède. Pour l'équation $\sigma_q X = AX$, la transformation de jauge F est spécifiée par les conditions :

$$\begin{cases} \sigma_q F = AFA(0)^{-1} \\ F(0) = I_n \end{cases}$$

Pour l'équation $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$, la transformation de jauge correspondante est spécifiée par les conditions :

$$\begin{cases} \delta\tilde{F} = \tilde{B}\tilde{F} - \tilde{F}\tilde{B}(0) \\ \tilde{F}(0) = I_n \end{cases}$$

Ces équations *matricielles* peuvent être considérées comme des équations *vectorielles* dans $M_n(\mathbf{C})$ et on peut leur appliquer les résultats de 3.2. Les hypothèses sont manifestement vérifiées et l'on conclut que $F \to \tilde{F}$ sur $\tilde{\Omega}_0$. On a vu au 3.3 que (en réadaptant les notations) $e_{q,A(0)}$ tend vers $(-z)^{\tilde{B(0)}}$, de sorte que :

Théorème

La solution canonique $Fe_{q,A(0)}$ *tend vers la solution canonique* $X = \tilde{F}(-z)^{\tilde{B(0)}}$ *sur* $\tilde{\Omega}'_0 = \Omega \cap \tilde{\Omega}_0$. $\square$

En effet, ce dévissage légèrement différent produit bien la solution canonique de Frobenius du système différentiel.

Corollaire

Ces résultats s'appliquent en particulier à la déformation linéaire $A = I_n + (q-1)\tilde{B}$.

Chapitre 4

Matrice de connexion et monodromie

On part maintenant d'une équation différentielle fuchsienne

$$\delta \tilde{X} = \tilde{B} \tilde{X}$$

où $\tilde{B} \in M_n(\mathbf{k})$. Les pôles de $\tilde{B}$ sont notés $\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r$: ce sont des éléments de $\mathbf{C}^*$ puisque l'équation est fuchsienne en 0 et en ∞. On suppose en outre l'équation non-résonnante en 0 et en ∞, c'est à dire que deux valeurs propres distinctes de $\tilde{B}(0)$ (resp. de $\tilde{B}(\infty)$) ne peuvent différer d'un entier.

On se donne alors une déformation B de $\tilde{B}$, autrement dit une matrice $B \in M_n(\mathbf{k})$ dont les coefficients dépendent de q et qui tend vers $\tilde{B}$ lorsque $q \to 1$. La variation de q obéit aux mêmes règles que précédemment : elle a lieu le long d'une spirale logarithmique $q_0^{\mathbf{R}_+^*}$ et on la paramètre par un $\epsilon > 0$ tel que $q = q_0^\epsilon$. On dénotera de telles familles par l'indice ϵ, par exemple B_ϵ pour celle que l'on vient d'introduire.

On suppose de plus de la famille des B_ϵ qu'elle satisfait aux contraintes suivantes :

- (A) Les pôles de B_ϵ tendent vers ceux de $\tilde{B}$; ceci signifie qu'en tout point de $\mathbf{S}$ qui n'est pas un pôle de $\tilde{B}$, la matrice B_ϵ est définie (n'a pas de pôle) dès que ϵ est assez petit.
- (B) $\lim_{\epsilon \to 0^+} B_\epsilon = \tilde{B}$, la convergence étant de plus uniforme sur : (i) un disque fermé non trivial de centre 0 ne contenant aucun des $\tilde{z}_i$; (ii) un disque fermé non trivial de centre ∞ ne contenant aucun des $\tilde{z}_i$; (iii) tout segment de spirale logarithmique inclus dans $\mathbf{C}^* - \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$. Par exemple, la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{C}^* - \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$ entraine cette hypothèse.
- (C) $B_\epsilon(0)$ converge vers $\tilde{B}(0)$ et $B_\epsilon(\infty)$ converge vers $\tilde{B}(\infty)$ à structure de Jordan constante, avec matrice de passage continue (voir 3.4).

L'une ou l'autre condition de convergence de (B) a bien un sens, car la condition (A) entraine que, sur tout compact de $\mathbf{C}^* - \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$, B_ϵ n'a pas de pôle pour ϵ assez petit.

Toutes ces hypothèses sont en particulier satisfaites par la déformation "linéaire", définie par $B_\epsilon = \tilde{B}$ quelque soit $\epsilon > 0$.

4.1 Les hypothèses sont symétriques en 0, ∞

On va d'abord étudier l'effet du changement de variable $w = 1/z$ sur l'équation différentielle :

$$\delta \tilde{X} = \tilde{B} \tilde{X}$$

Posant $\tilde{Y}(w) = \tilde{X}(w) = \tilde{X}(z)$, on sait que :

$$\delta_w \tilde{Y} = \tilde{D} \tilde{Y} \qquad \delta_w := w \frac{d}{dw}$$

où l'on note $\tilde{D}(w) = -\tilde{B}(1/w)$. Les pôles de $\tilde{D}$ sont donc les $\tilde{w}_i = 1/\tilde{z}_i$ et

$$\begin{cases} \tilde{D}(0) = \tilde{B}(\infty) \\ \tilde{D}(\infty) = \tilde{B}(0) \end{cases}$$

Il y a bien symétrie des hypothèses.

On considère ensuite l'équation aux q-différences qui doit déformer notre équation différentielle :

$$\sigma_q X = A_\epsilon X$$

où $A_\epsilon = I_n + \eta B_\epsilon$ ($\eta = q - 1$). Pour q voisin de 1, elle est fuchsienne puisque $\det A_\epsilon(0)$ et $\det A_\epsilon(\infty)$ ont pour limite 1. On a vu au chapitre 2 l'effet du changement de variable $w = 1/z$: Posant $Y(w) = X(1/w) = X(z)$, on a :

$$\sigma_q Y = C_\epsilon Y$$

où l'on note $C_\epsilon(w) = (A_\epsilon(1/qw))^{-1}$. Cette équation est évidemment encore fuchsienne, puisque

$$\begin{cases} C_\epsilon(0) = A_\epsilon(\infty) \\ A_\epsilon(0) = C_\epsilon(\infty) \end{cases}$$

De plus, $C_\epsilon(w) = I_n + \eta D_\epsilon(w)$, où $D_\epsilon(w) = B_\epsilon(1/qw)(A_\epsilon(1/qw))^{-1}$. On vérifie alors aisément les hypothèses symétriques de celles que nous avons faites :

- (A') Les pôles de D_ϵ sont les w tels que $1/qw$ est pôle de B_ϵ ou bien zéro de $\det A_\epsilon$. Mais il est clair que, si $z \in \mathbf{C}^* - \{\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r\}$, $\det A_\epsilon(z)$ tend vers 1. Donc les pôles de D_ϵ tendent vers les $\tilde{w}_i$, c'est à dire vers ceux de $\tilde{D}$.
- (B') La même formule montre que D_ϵ converge uniformément vers $\tilde{D}$ sur un disque centré en 0, sur un disque centré en ∞ (évitant tous deux les $\tilde{w}_i$) et les segments de spirales inclus dans $\mathbf{C}^* - \{\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_r\}$.
- (C') Enfin, des hypothèses sur $B_\epsilon(0)$ et $B_\epsilon(\infty)$ et des formules

$$\begin{cases} D_\epsilon(0) = \frac{C_\epsilon(0) - I_n}{q-1} = \frac{(A_\epsilon(\infty))^{-1} - I_n}{q-1} \\ D_\epsilon(\infty) = \frac{C_\epsilon(\infty) - I_n}{q-1} = \frac{(A_\epsilon(0))^{-1} - I_n}{q-1} \end{cases}$$

  on déduit que $D_\epsilon(0)$ converge vers $\tilde{D}(0)$ et $D_\epsilon(\infty)$ converge vers $\tilde{D}(\infty)$ à structure de Jordan constante, avec matrice de passage continue.

Au voisinage de ∞, c'est donc $C_\epsilon = I_n + \eta D_\epsilon$ que l'on considèrera comme une déformation de $\tilde{D}$.

4.2 La matrice de connexion

Notons $\tilde{X}^{(0)}$ et $\tilde{X}^{(\infty)}$ les solutions canoniques en z et en w de l'équation différentielle obtenue par la méthode de Frobenius. Sur un ouvert de $\mathbf{S}$ où toutes deux sont des systèmes fondamentaux (uniformes, de déterminant non nul), il y a une unique matrice $\tilde{P}(z)$ telle que

$$\tilde{X}^{(0)}(z) = \tilde{X}^{(\infty)}(z)\tilde{P}(z)$$

En dérivant des deux côtés et en utilisant l'équation différentielle, on voit que $\tilde{P}' = 0$: $\tilde{P}$ est localement constante sur cet ouvert. Par exemple, tout ouvert simplement connexe ne contenant aucun des $\tilde{z}_i$ conviendrait et $\tilde{P}$ y serait constante.

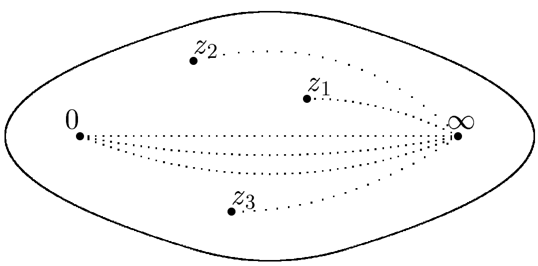
Notons de même $X_\epsilon^{(0)}$ et $X_\epsilon^{(\infty)}$ les solutions canoniques de l'équation aux q-différences de matrice A_ϵ. Ce peuvent être celles obtenues par la méthode du 1.2, renormalisées comme au 3.3 ; ou bien celles obtenues par la méthode du 1.3, puisque l'on sait que, pour q voisin de 1, l'équation est non-résonnante (en 0 aussi bien qu'en ∞ d'après la symétrie des hypothèses). Sur un ouvert σ_q-invariant sur lequel $X_\epsilon^{(0)}$ et $X_\epsilon^{(\infty)}$ sont des solutions fondamentales, il y a une unique matrice $P_\epsilon(z)$ telle que

$$X_\epsilon^{(0)}(z) = X_\epsilon^{(\infty)}(z)P_\epsilon(z)$$

C'est, bien sur, un choix de la matrice de connexion.

En appliquant σ_q des deux côtés et en utilisant l'équation aux q-différences, on voit que $\sigma_q P_\epsilon = P_\epsilon$: P_ϵ est elliptique, "constante" pour notre théorie.

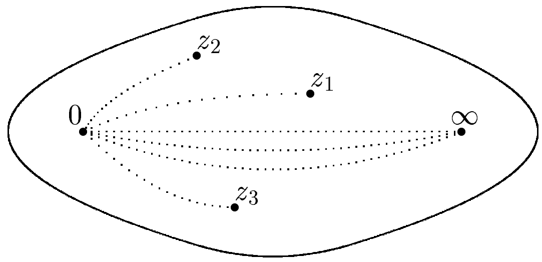
Figure 4 a



Singularités de $X_\epsilon^{(0)}$

Pour que $X_\epsilon^{(0)}$ y soit défini, un tel ouvert ne doit rencontrer aucune demi-spirale discrète partant des pôles de A_ϵ ; pour que $X_\epsilon^{(0)}$ y soit solution fondamentale, il faut en outre qu'il ne contienne aucune demi-spirale discrète partant des zéros de $\det A_\epsilon$. Il s'agit, bien sur, des demi-spirales engendrées par q. Enfin, il faut exclure les spirales de pôles et de zéros des caractères, et, éventuellement, la spirale des pôles de l_q, selon la structure de Jordan de $A_\epsilon(0)$. On a des énoncés analogues en ∞.

Figure 4 b



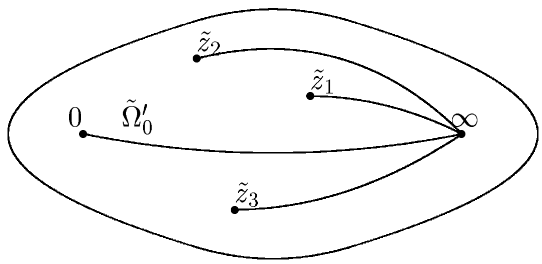
Singularités de $X_\epsilon^{(\infty)}$

On introduit maintenant les ouverts simplement connexes :

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}_0 = \mathbf{S} - \bigcup\limits_{1 \le i \le r} \tilde{z}_i q_0^{\overline{\mathbf{R}}_+} \\ \tilde{\Omega}_\infty = \mathbf{S} - \bigcup\limits_{1 \le i \le r} \tilde{z}_i q_0^{\overline{\mathbf{R}}_-} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{\Omega}'_0 = \tilde{\Omega}_0 - q_0^{\overline{\mathbf{R}}} \\ \tilde{\Omega}'_\infty = \tilde{\Omega}_\infty - q_0^{\overline{\mathbf{R}}} \end{cases} \qquad \tilde{\Omega}' = \tilde{\Omega}'_0 \cap \tilde{\Omega}'_\infty$$

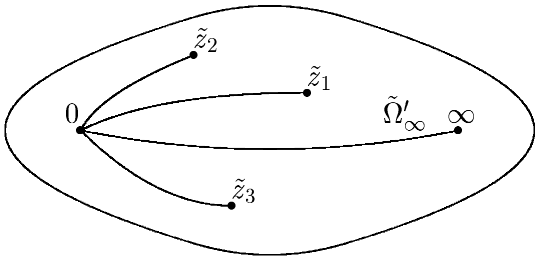
On sait alors que $X_\epsilon^{(0)}$ tend vers $\tilde{X}^{(0)}$ sur $\tilde{\Omega}'_0$ et que $X_\epsilon^{(\infty)}$ tend vers $\tilde{X}^{(\infty)}$ sur $\tilde{\Omega}'_\infty$: cela a été prouvé au chapitre 3. De plus, quelque soit $z \in \tilde{\Omega}'$, P_ϵ y est définie dès que q est suffisamment proche de 1.

Figure 5 a



Domaine de définition de $\tilde{X}^{(0)}$

Figure 5 b



Domaine de définition de $\tilde{X}^{(\infty)}$

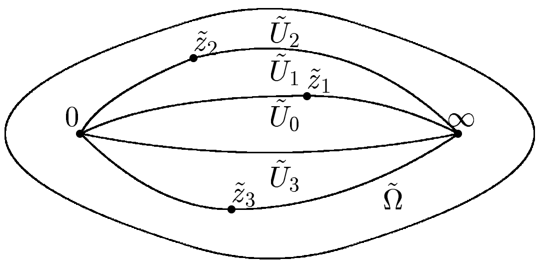
On obtient donc le

Théorème

P_ϵ converge vers $\tilde{P}$ sur $\tilde{\Omega}'$.

Posons, pour simplifier les notations, $\tilde{z}_0 = 1$. L'ouvert $\tilde{\Omega}' = \tilde{\Omega}'_0 \cap \tilde{\Omega}'_\infty = \mathbf{S} - \bigcup_{0\leq i\leq r} \tilde{z}_i \overline{q_0^R}$ est la sphère de Riemann privée d'un nombre fini de coupures spirales compactes reliant 0 à ∞. Il a autant de composantes connexes $\tilde{U}_i$ qu'il y a de spirales distinctes et chacune est homéomorphe à un disque (et même difféomorphe). La matrice $\tilde{P}$ est constante sur chacune de ces "tranches de melon".

Figure 6



Domaine de définition de $\tilde{P}$

4.3 Calcul de la monodromie

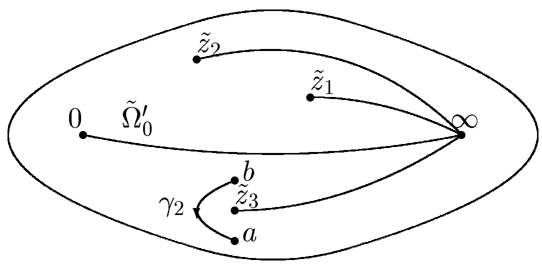
On va montrer comment le théorème précédent permet de calculer la monodromie de l'équation différentielle. On déterminera celle-ci sous la forme de l'effet sur $\tilde{X}^{(0)}$ du prolongement analytique le long de petit lacets positifs autour de $\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_r$. On ne s'occupera pas de la monodromie en 0 et en ∞, qui se lit directement sur les structures de Jordan de $\tilde{B}(0)$ et de $\tilde{B}(\infty)$ (exposants venant des valeurs propres, blocs logarithmiques venant des blocs unipotents). Ceci est conforme à la tradition (depuis Riemann!) qui considère la monodromie de z^γ et celle de $\log z$ comme des données immanentes et ne cherche la combinatoire géométrique qu'aux autres singularités.

Pour la première fois, nous devrons choisir q_0 : ceci, dans le but d'empêcher la superposition des coupures. La condition que nous imposons est que les $(r+1)$ spirales $\tilde{z}_i q_0^{\overline{R}}$ $(0 \leq i \leq r)$ soient deux à deux distinctes, donc ne se rencontrent qu'en 0 et en ∞ ; de façon équivalente : aucun $\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j}$ $(0 \leq i, j \leq r)$ n'appartient à $q_0^{\mathbf{R}}$. Autrement dit, si $q_0 = e^{-2\imath\pi\tau_0}$, et si l'on note $\log z$ l'ensemble des logarithmes de z dans $\mathbf{C}$, $\tau_0 \notin \bigcup\limits_{0 \leq i,j \leq r} \mathbf{R}\frac{\log \tilde{z}_i - \log \tilde{z}_j}{2\imath\pi}$. Cette condition est évidemment vérifiée pour q générique.

Nous ordonnons les $\tilde{z}_i$ en les réindexant de la façon suivante : lorsque l'on parcourt dans le sens positif un petit cercle autour de 0, on rencontre les spirales logarithmiques $\tilde{z}_0 q_0^{\overline{\mathbf{R}}} = q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$, $\tilde{z}_1 q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$, ..., $\tilde{z}_r q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$ dans cet ordre.

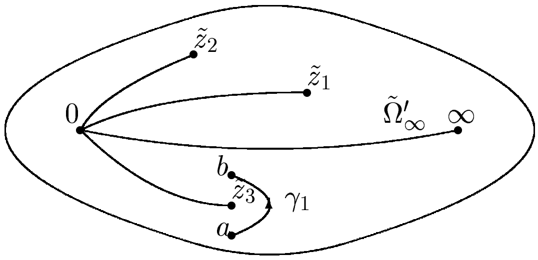
Le même parcours fait rencontrer successivement les composantes connexes de $\tilde{\Omega}'$: on nomme $\tilde{U}_i$ celle dont la frontière est formée de $\tilde{z}_i q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$ et de $\tilde{z}_{i+1} q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$ (en convenant que $\tilde{z}_{r+1} = \tilde{z}_0$).

Figure 7 a



Promenade de $\tilde{X}^{(0)}$

Figure 7 b



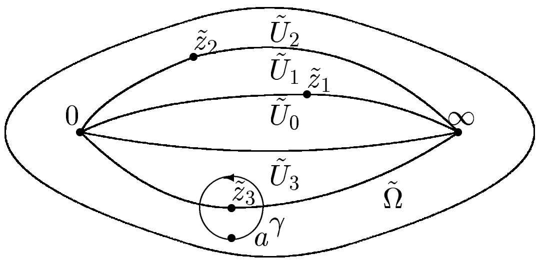
Promenade de $\tilde{X}^{(\infty)}$

Considérons un petit lacet positif γ autour de $\tilde{z}_j$ $(1 \leq j \leq r)$ de base $a \in \tilde{U}_{j-1}$; on peut le supposer composé d'un chemin γ_1 dans $\tilde{\Omega}_\infty$ partant de a et arrivant en $b \in \tilde{U}_j$, suivi d'un chemin γ_2 dans $\tilde{\Omega}_0$ partant de b et arrivant en a. Le prolongement analytique le long de γ_1 transforme $\tilde{X}^{(0)}$ en $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}_{j-1}$; celui le long de γ_2 transforme $\tilde{X}^{(\infty)}$ en $\tilde{X}^{(0)}\tilde{P}_j^{-1}$ et donc $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}_{j-1}$ en $\tilde{X}^{(0)}\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1}$.

Théorème

La matrice de monodromie de (2) autour de $\tilde{z}_j$ dans la base $\tilde{X}^{(0)}$ est $\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1}$. □

Figure 8



Monodromie de $\tilde{X}^{(0)}$

Remarque

Dans [13], il est prouvé dans le cadre de l'analyse non-standard que, si ϵ est infiniment petit > 0, et si f est une fonction analytique complexe ϵ-périodique limitée au voisinage d'un point x_0, il existe une bande horizontale bordée par des droites d'ordonnées α et β

telles que $\alpha << Im(x_0) << \beta$ sur laquelle f est constante à $\pounds e^{-C/\epsilon}$ près, où $\pounds$ est limité et où $C >> 0$.

Cela semble pouvoir être appliqué à $P_\epsilon - \tilde{P}$ pour conclure que la convergence est exponentiellement rapide : ceci rejoint l'estimation d'erreur de 3.1.2.

4.4 Trois exemples complets de déformations

On tire ici des informations géométriques des comportements asymptotiques obtenus au 3. Précisément, partant d'une équation différentielle fuchsienne, ou d'une de ses solutions particulièrement intéressante, on montre comment les formules de connexion d'une famille d'équations aux q-différences qui en sont une déformation permettent d'en calculer la monodromie.

Ces exemples sont plus une illustration qu'une application de la théorie. Ils ont en effet été étudiés les premiers (à l'exception du dernier, "non fuchsien") et ce sont eux qui ont révélé le phénomène que nous avons décrit plus haut ; l'énoncé plus général est venu ensuite. Aussi, sont ils étudiés "à la main". Tout d'abord, on utilise plutôt des équations scalaires d'ordre n que des équations vectorielles de dimension n et d'ordre 1 : dans la pratique les calculs sont plus faciles ainsi. On choisit les solutions canoniques et donc la matrice de connexion selon le contexte (par exemple historique dans le cas hypergéométrique basique !). Enfin, on passe librement de la forme scalaire à la forme matricielle (par exemple des formules de connexion à la matrice de connexion) et réciproquement.

Nous avons déjà remarqué à plusieurs reprises que les propriétés démontrées sont indépendantes du choix d'une famille particulière de caractères soumis à certaines conditions générales. Nous jouerons sur cette liberté de choix chaque fois que cela sera commode pour obtenir un comportement géométrique plus frappant.

4.4.1 Déformation de $(1 - z/z_0)^\alpha$

On considère ici l'équation différentielle fuchsienne :

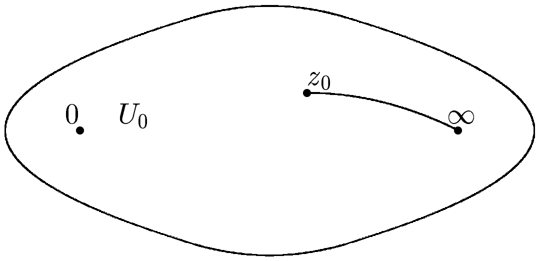
$$\delta \tilde{f} = \tilde{b}\tilde{f} \qquad \tilde{b}(z) = \frac{-\alpha z/z_0}{1 - z/z_0} = \frac{\alpha}{1 - w/w_0} \qquad (w = 1/z, w_0 = 1/z_0)$$

La méthode de Frobenius (où l'on remplace z^γ par $(-z)^\gamma$ et $\log(z)$ par $\log(-z)$) donne les solutions canoniques en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} \tilde{f}^{(0)}(z) = (1 - z/z_0)^\alpha \\ \tilde{f}^{(\infty)} = (-w)^{-\alpha}(1 - w/w_0)^\alpha = (-z)^\alpha(1 - z_0/z)^\alpha \end{cases}$$

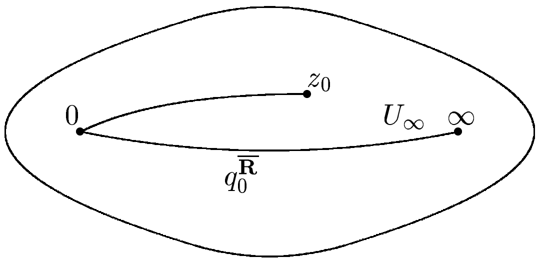
Pour les rendre uniformes, on pratique des coupures déterminées par les exposants et par les pôles de $\tilde{b}$ sur $\mathbf{C}^*$: on considère $\tilde{f}^{(0)}$ comme définie sur $U_0 = \mathbf{S} - z_0 q_0^{\overline{\mathbf{R}}^+}$ et $\tilde{f}^{(\infty)}$ comme définie sur $U_\infty = \mathbf{S} - z_0 q_0^{\overline{\mathbf{R}}^-} - q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$: ce sont bien deux ouverts simplement connexes évitant respectivement les singularités de $\tilde{f}^{(0)}$ et de $\tilde{f}^{(\infty)}$. On supposera $z_0 \notin q_0^{\overline{\mathbf{R}}}$ pour que les coupures ne se superposent pas (c'est la raison pour laquelle on n'a pas pris tout simplement $z_0 = 1$). Cela nous permettra d'utiliser notre famille habituelle de caractères.

Figure 9 a



Domaine de $\tilde{f}^{(0)}$

Figure 9 b



Domaine de $\tilde{f}^{(\infty)}$

On déformera l'équation différentielle ci-dessus en la famille d'équations aux q-différences fuchsiennes :

$$\sigma_q f = a_\epsilon f$$

avec $a_\epsilon \in \mathbf{k}^*$ et même $a_\epsilon(0), a_\epsilon(\infty) \in \mathbf{C}^*$. Les conditions naturelles à imposer pour mieux spécifier cette famille sont les suivantes :

1. $\frac{a_\epsilon - 1}{q-1} \underset{q \to 1}{\to} \tilde{b}$: ceci parce que l'on a en tête la formule heuristique $\delta_q := \frac{\sigma_q - 1}{q-1} \underset{q \to 1}{\to} \delta$. Cela permet d'espérer qu'une famille de solutions f_ϵ bien choisies vérifieront $\frac{f_\epsilon - 1}{q-1} \underset{q \to 1}{\to} \tilde{f}$, solution de l'équation différentielle. Il y a en particulier des contraintes au niveau des exposants : $\frac{a_\epsilon(0) - 1}{q-1} \underset{q \to 1}{\to} \tilde{b}(0)$ et similairement en ∞.
2. Les pôles de a_ϵ doivent en outre tendre vers ceux de $\tilde{b}$ sur $\mathbf{C}^*$ (ici : vers z_0) ; ceci, afin que les demi-spirales logarithmiques discrètes de singularités des solutions aillent se condenser sur les coupures, comme on l'a vu se produire pour les caractères au 3.1.3.

Nous décidons de prendre $a_\epsilon(z) = \frac{1 - q^\alpha z/z_0}{1 - z/z_0}$. Cela revient à poser $b_\epsilon(z) = \frac{q^\alpha - 1}{q-1} \frac{-z/z_0}{1 - z/z_0}$ et à étudier la famille d'équations $\delta_q f = b_\epsilon f$. Les conditions précédentes sont manifestement satisfaites. De plus, les calculs seront simples grace aux résultats de 3.1.5.

Solution canonique en 0

Il n'y a pas d'exposant (autrement dit, il vaut 1). On trouve donc immédiatement :

$$f_\epsilon^{(0)}(z) = \frac{\Theta_q^+(q^\alpha z/z_0)}{\Theta_q^+(z/z_0)} \div \frac{1 - q^\alpha z/z_0}{1 - z/z_0}$$

Cette solution est définie sur $\mathbf{C} - q_0^{\mathbf{N}^*}$, et en particulier sur U_0. De plus, ses zéros disparaissent de tout compact de U_0 lorsque $q \to 1$.

Solution canonique en ∞

La fonction inconnue $g(w) = f(1/w)$ doit y vérifier :

$$\sigma_q g(w) = (a_\epsilon(1/qw))^{-1} g(w) = q^{-\alpha} \frac{1 - qw/w_0}{1 - qw/q^\alpha w_0} g(w)$$

Il y a l'exposant $q^{-\alpha}$ et l'on trouve la solution

$$f_\epsilon^{(\infty)}(z) = e_{q,q^{-\alpha}}(w) \frac{\Theta_q^+(w/w_0)}{\Theta_q^+(w/q^\alpha w_0)}$$

qui est définie sur U_∞. Lorsque $q \to 1$, ses zéros disparaissent de tout compact de U_∞.

Matrice de connexion

On devrait ici dire nombre de connexion ! C'est

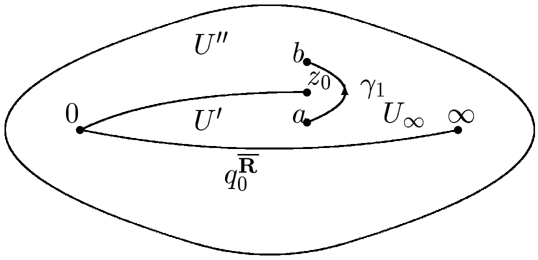
$$p_\epsilon(z) = \frac{f_\epsilon^{(0)}(z)}{f_\epsilon^{(\infty)}(z)} = \frac{1}{e_{q^{-\alpha}}(1/z)} \frac{\Theta_q(q^\alpha z/z_0)}{\Theta_q(z/z_0)}$$

Elle est définie sur tout $U = U_0 \cap U_\infty = \mathbf{S} - z_0 q_0^{\mathbf{R}} - q_0^{\mathbf{R}}$, qui a deux composantes connexes : U', à droite de la spirale $z_0 q_0^{\mathbf{R}}$ (lorsqu'on la parcourt de 0 à ∞), et U'' à sa gauche.

Confluence

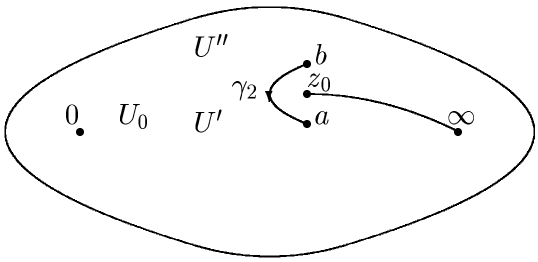
Lorsque $q \to 1$, $f_\epsilon^{(0)} \to \tilde{f}^{(0)}$ d'après 3.1.5, $f_\epsilon^{(\infty)} \to \tilde{f}^{(\infty)}$ d'après 3.1.3 et 3.1.5, et donc $p_\epsilon \to \tilde{p} = \frac{\tilde{f}^{(0)}}{\tilde{f}^{(\infty)}}$; par application de 3.1.2 et 3.1.3, on voit que $\tilde{p}(z) = (-z)^{-\alpha}(-z/z_0)^\alpha$. Cette fonction est localement constante sur U et prend donc une valeur $\tilde{p}'$ sur U' et une valeur $\tilde{p}''$ sur U''. Ces valeurs sont liées par la relation $\tilde{p}'' = \tilde{p}' e^{-2\imath\pi\alpha}$: en effet, seul le facteur $(-z/z_0)^\alpha$ est affecté lors du franchissement de la coupure $z_0 q_0^{\mathbf{R}}$ de droite à gauche.

Figure 9 c



Promenade de $\tilde{f}^{(0)}$

Figure 9 d



Retour de la promenade

Monodromie

On calculera la monodromie autour de z_0 : celles en 0 et en ∞ se lisent directement sur les exposants. On regarde l'effet sur $\tilde{f}^{(0)}$ d'un petit lacet positif autour de z_0, partant d'un point a de U'.

La première partie γ_1 du lacet est dans U_∞. Comme $\tilde{f}^{(\infty)}$ y est uniforme et que, au départ, $\tilde{f}^{(0)} = \tilde{f}^{(\infty)}\tilde{p}'$, le résultat du prolongement analytique de $\tilde{f}^{(0)}$ le long de cette première partie du lacet est $\tilde{f}^{(\infty)}\tilde{p}'$.

La seconde partie γ_2 du lacet est dans U_0, où $\tilde{f}^{(0)}$ est uniforme. Comme $\tilde{f}^{(\infty)} = \tilde{f}^{(0)}(\tilde{p}'')^{-1}$ au départ b de ce second chemin, le résultat du prolongement analytique de $\tilde{f}^{(0)}$ le long du lacet complet est $\tilde{f}^{(0)}(\tilde{p}'')^{-1}\tilde{p}'$.

L'effet sur la base canonique $\tilde{f}^{(0)}$ de la monodromie autour de z_0 est donc la multiplication à droite par $(\tilde{p}'')^{-1}\tilde{p}'$: bien qu'en dimension 1 tout commute, l'ordre correct des multiplications a été systématiquement respecté dans les calculs. On trouve donc que c'est la multiplication par $e^{2\imath\pi\alpha}$, comme il était souhaitable que ce le fût !

4.4.2 Déformation de la fonction hypergéométrique

Les formules de connexion pour les fonctions hypergéométriques basiques donnent, à la limite, celles des fonctions hypergéométriques classiques.

La série hypergéométrique (*voir* [29],*voir* [17])

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} z^n \qquad (x)_n = \prod_{0\leq k\leq n-1} (x+k) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

est solution de l'équation différentielle à coefficients rationnels :

$$\delta^2 F - \tilde{\lambda}\delta F + \tilde{\mu} F = 0 \quad \text{avec :} \begin{cases} \tilde{\lambda} = \frac{((\alpha+\beta)z+(1-\gamma))}{(1-z)} \\ \tilde{\mu} = \frac{\alpha\beta z}{(1-z)} \end{cases}$$

Les singularités de cette équation sont 0,1 et ∞ et elles sont fuchsiennes. La méthode de Frobenius en fournit des système fondamentaux de solutions en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} F(\alpha,\beta,\gamma;z) \\ z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z) \end{cases} \qquad \begin{cases} (1/z)^{\alpha} F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;1/z) \\ (1/z)^{\beta} F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;1/z) \end{cases}$$

Ces fonctions a priori multivaluées sont respectivement rendues uniformes par les coupures $[1,\infty]$ et $[-\infty,0]$ de la sphère de Riemann.

Le problème de déformer cette équation différentielle en une famille d'équations aux q-différences et, réciproquement, de déduire sa monodromie du comportement asymptotique des matrices de connexion est doublement simplifié parce que

- Une famille de fonctions déformant F est connue : les fonctions hypergéométriques basiques.
- La monodromie de F est classiquement calculée à l'aide d'une formule de connexion reliant les systèmes fondamentaux de solutions en 0 et en ∞ ; de plus, la formule de Mellin-Barnes, qui permet ce calcul, a été étendue au cas hypergéométrique basique par Watson.

La série hypergéométrique *classique* a été généralisée par Heine, puis Ramanujan (*voir* [14], [22]) en la série hypergéométrique *basique*

$$\Phi(a,b,c;q,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a;p)_n(b;p)_n}{(c;p)_n(p;p)_n} z^n \quad |q|>1\ ,\ p=q^{-1}\ ,\ (x;p)_n = \prod_{0\leq k\leq n-1} (1-xp^k)$$

Lorsque $q\to 1$, la série hypergéométrique basique de paramètres $a=q^{\alpha}, b=q^{\beta}, c=q^{\gamma}$ tend vers la série hypergéométrique classique de paramètres α,β,γ coefficient par coefficient. Il s'agit de préciser un peu la nature de cette "confluence".

Soient $a, b, c \in \mathbf{C}^*$. La série hypergéométrique basique de paramètres a, b, c est solution de l'équation aux q-différences à coefficients rationnels :

$$\sigma_q^2\Phi - \lambda'\sigma_q\Phi + \mu'\Phi = 0 \quad \text{avec :} \begin{cases} \lambda' = \frac{((a+b)z-(1+c/q))}{(abz-c/q)} \\ \mu' = \frac{(z-1)}{(abz-c/q)} \end{cases}$$

Nous préférons réécrire cette équation à l'aide de l'opérateur $\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1}$ afin de rendre plus visibles les conditions formelles de la confluence ; il suffit de faire $\sigma_q = 1 + \eta\delta_q$ $(\eta = q-1)$.

$$\delta_q^2\Phi - \lambda\delta_q\Phi + \mu\Phi = 0 \quad \text{avec :} \begin{cases} \lambda = \frac{\lambda'-2}{\eta} \\ \mu = \frac{\mu'-\lambda'+1}{\eta^2} \end{cases}$$

Notre méthode attribue à son équation les systèmes fondamentaux de solutions canoniques en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} \Phi(a, b, c; q, z) \\ e_{q/c}(z)\Phi(aq/c, bq/c, q^2/c; q, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} e_a(1/z)\Phi(a, aq/c, aq/b; q, cq/abz) \\ e_b(1/z)\Phi(b, bq/c, bq/a; q, cq/abz) \end{cases}$$

On raisonne ici directement sur l'équation du second ordre, mais des changements de variable simples montrent que les solutions ci-dessus sont de la forme (fonction holomorphe valant 1 en 0) $\times$ (caractère) : ce sont bien des solutions canoniques telles que nous les avons définies dans le cadre matriciel. Pour cette même raison, les formules de connexion que nous allons tirer de [14] sont bien celles que donneraient les coefficients de la matrice de connexion.

Le système différentiel correspondant à l'équation hypergéométrique classique de paramètres α, β et γ a pour matrice

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\mu} & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$$

Nous le déformerons donc par le système aux q-différences correspondant à l'équation hypergéométrique basique de paramètres $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $c = q^\gamma$,de matrice

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ -\frac{(\mu'-\lambda'+1)}{\eta} & \lambda'-1 \end{pmatrix}$$

On a alors $A_\epsilon = I_2 + \eta B_\epsilon$, où

$$B_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

On observe que, lorsque $\epsilon \to 0^+$, $(A_\epsilon - I_2)/(q-1) \to \tilde{B}$. Toutes nos autres conditions sont d'ailleurs satisfaites.

Les formules de connexion de Barnes-Mellin-Watson (*voir* [14] p. 106) relient les deux systèmes fondamentaux de solutions :

$$\begin{aligned}\Phi(a,b;c;q,z) &= \Phi(c/b,a;c;q,q)\frac{\Theta_q(bz/cq)}{\Theta_q(abz/cq)}\Phi(a,aq/c,aq/b;q,cq/abz)\\ &+ \Phi(c/a,b;c;q,q)\frac{\Theta_q(az/cq)}{\Theta_q(abz/cq)}\Phi(b,bq/c,bq/a;q,cq/abz)\end{aligned}$$

Sans autre calcul, nous en tirons directement les coefficients de la première colonne de la matrice de connexion :

$$P_{1,1}(z) = \Phi(c/b,a;c;q,q)\frac{\Theta_q(bz/cq)}{\Theta_q(abz/cq)}\frac{1}{e_{q,a}(1/z)}$$

$$P_{2,1}(z) = \Phi(c/a,b;c;q,q)\frac{\Theta_q(az/cq)}{\Theta_q(abz/cq)}\frac{1}{e_{q,b}(1/z)}$$

De même, en ce qui concerne la seconde solution fondamentale :

$$\begin{aligned}\Phi(aq/c,bq/c;q^2/c;q,z) &= \Phi(q/b,aq/c;q^2/c;q,q)\frac{\Theta_q(bz/q^2)}{\Theta_q(abz/cq)}\Phi(a,aq/c,aq/b;q,cq/abz)\\ &+ \Phi(q/a,bq/c;q^2/c;q,q)\frac{\Theta_q(az/q^2)}{\Theta_q(abz/cq)}\Phi(b,bq/c,bq/a;q,cq/abz)\end{aligned}$$

d'où l'on tire les coefficients de la deuxième colonne de la matrice de connexion :

$$P_{1,2}(z) = \Phi(q/b,aq/c;q^2/c;q,q)\frac{\Theta_q(bz/q^2)}{\Theta_q(abz/cq)}\frac{e_{q,q/c}(z)}{e_{q,a}(1/z)}$$

$$P_{2,2}(z) = \Phi(q/a,bq/c;q^2/c;q,q)\frac{\Theta_q(az/q^2)}{\Theta_q(abz/cq)}\frac{e_{q,q/c}(z)}{e_{q,b}(1/z)}$$

On peut alors en déduire la matrice de connexion : $P_\epsilon = (D_\epsilon^{(\infty)})^{-1}M_\epsilon D_\epsilon^{(0)}$, où :

$$D_\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e_{q,q/c}(z)\end{pmatrix} \qquad D_\epsilon^{(\infty)} = \begin{pmatrix}e_{q,a}(1/z) & 0\\ 0 & e_{q,b}(1/z)\end{pmatrix}$$

et où la matrice M_ϵ est donnée par

$$\begin{pmatrix}\Phi(c/b,a;c;q,q)\Theta_q(bz/cq)/\Theta_q(abz/cq) & \Phi(q/b,aq/c;q^2/c;q,q)\Theta_q(bz/q^2)/\Theta_q(abz/cq)\\ \Phi(c/a,b;c;q,q)\Theta_q(az/cq)/\Theta_q(abz/cq) & \Phi(q/a,bq/c;q^2/c;q,q)\Theta_q(az/q^2)/\Theta_q(abz/cq)\end{pmatrix}$$

Conformément à la théorie générale du chapitre 2 :

- La matrice de connexion P_ϵ est elliptique.
- Les singularités de la partie "interne" M_ϵ sont sur les spirales logarithmiques discrètes déduites des singularités de la matrice A_ϵ de l'équation. Ici, l'unique pôle est c/qab (et on voit bien la spirale qu'il engendre) et l'unique zéro du déterminant est 1 (mais là, cela ne se voit pas facilement !).

– Les caractères sont à l'extérieur.

Des résultats du chapitre 3, on déduit la valeur de la matrice $\tilde{M} = \lim_{\epsilon \to 0^+} M_\epsilon$:

$$\begin{pmatrix} (-z)^{-\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha) & (-z)^{\gamma-\alpha+1}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta) \\ (-z)^{-\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta) & (-z)^{\gamma-\beta+1}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha) \end{pmatrix}$$

Ces formules sont *indépendantes du choix d'une famille particulière de caractères.* Pour éviter la superposition des coupures, on remplacera les caractères utilisés jusque là par $\Theta_q(-z)/\Theta_q(-c^{-1}z)$, dont il est aisé de voir que leurs propriétés sont les mêmes. En conséquence, pour une fois, nous obtiendrons à la limite les vraies solutions canoniques de Frobenius !

On trouve alors $\tilde{D}^{(0)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} D_\epsilon^{(0)}$ et $\tilde{D}^{(\infty)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} D_\epsilon^{(\infty)}$ sur $\mathbf{S} - [-\infty, 0]$:

$$\tilde{D}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{1-\gamma} \end{pmatrix} \qquad \tilde{D}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} z^{-\alpha} & 0 \\ 0 & z^{-\beta} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\tilde{P} = \lim_{\epsilon \to 0^+} P_\epsilon = (\tilde{D}^{(\infty)})^{-1}\tilde{M}\tilde{D}^{(0)}$ prend les valeurs $\tilde{P}^+$ et $\tilde{P}^-$ sur le demi-plan de Poincaré et sur son opposé, ces valeurs étant respectivement données par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha) & e^{i\pi(\alpha-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta) \\ e^{i\pi\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta) & e^{i\pi(\beta-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha) \end{pmatrix}$$

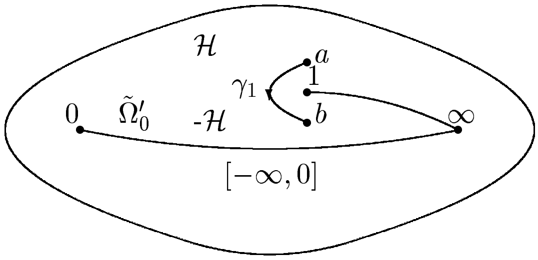
$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha) & e^{-i\pi(\alpha-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta) \\ e^{-i\pi\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta) & e^{-i\pi(\beta-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha) \end{pmatrix}$$

Notons $\tilde{X}^{(0)}$ et $X^{\tilde{(\infty)}}$ les vecteurs solutions fondamentales de l'équation différentielle au voisinage de 0 et ∞ respectivement,définis sur $\tilde{\Omega}'_0 = \mathbf{S} - [1;\infty] - [-\infty;0]$ et sur $\tilde{\Omega}'_\infty = \mathbf{S} - [0;1] - [-\infty;0]$ (la première coupure est due aux pôles de l'équation, la seconde aux caractères). Sur l'intersection $\mathbf{S} - \overline{\mathbf{R}}$ de leurs domaines, $\tilde{X}^{(0)} = X^{\tilde{(\infty)}}\tilde{P}$. Pour calculer la monodromie autour de 1, on promènera $\tilde{X}^{(0)}$ le long d'un petit lacet positif autour de 1 et partant d'un point a du demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$.

La première partie γ_1 du lacet est dans le domaine de $\tilde{X}^{(0)}$, qui se prolonge donc en $\tilde{X}^{(0)}$. On arrive alors en $b \in -\mathcal{H}$, où $\tilde{X}^{(0)} = \tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}^-$.

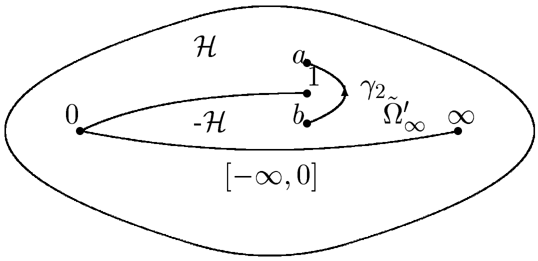
La deuxième partie γ_2 du lacet est dans le domaine de $\tilde{X}^{(\infty)}$; aussi, $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}^-$ se prolonge en $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}^-$. On arrive dans $\mathcal{H}$, où $\tilde{X}^{(\infty)} = \tilde{X}^{(0)}(\tilde{P}^+)^{-1}$. On obtient ainsi, comme prolongement de $\tilde{X}^{(0)}$, $\tilde{X}^{(0)}(\tilde{P}^+)^{-1}\tilde{P}^-$.

Figure 10 a



Promenade de $\tilde{X}^{(0)}$

Figure 10 b



Retour de la promenade

La matrice de monodromie en le pôle 1 est donc $(\tilde{P}^+)^{-1}\tilde{P}^-$, ce qui est la valeur classique : voir, par exemple, [17] pp 111-114[1].

4.4.3 Déformation de $\log(1 - z/z_0)$

On va à présent étudier le cas d'un système dont la monodromie est unipotente, mais qui rentre tout de même dans le cas non-résonnant. L'équation différentielle de départ est

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{z_0 - z}\frac{df}{dz} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta^2 f = \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}}\delta f$$

Les singularités de cette équation sont z_0 et ∞ et elles sont fuchsiennes. La méthode de Frobenius en fournit des systèmes fondamentaux de solutions en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} 1 \\ z_0 \log(1 - z/z_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \\ -\log(1 - w/w_0) + \log(-w) \end{cases}$$

[1] Il faut cependant prendre garde à une erreur de signe dans cette référence : avec la base canonique utilisée, définie p. 38 de loc.cit., on a bien la formule de connexion 4.6.3, p. 111 ; mais, avec le choix des chemins de la figure 2.5, p. 78, l'expression de A_∞ dans la formule 4.6.12, p. 114 devrait faire intervenir $\epsilon(\alpha)$ et $\epsilon(\beta)$ au lieu de $\epsilon(-\alpha)$ et $\epsilon(-\beta)$.

On a posé $w = 1/z$ et $w_0 = 1/z_0$.

On les déformera à l'aide de la fonction $l_q^+(z) = z(\Theta_q^+)'(z)/\Theta_q^+(z)$, où l'on a posé $\Theta_q^+(z) = (z;p)_\infty = \prod_{0 \le k}(1 - zq^{-k})$. La fonction $l_q^+(z)$ vérifie l'équation aux q-différences fuchsienne :

$$\delta_q^2 f = \frac{1}{1 - q^2 \frac{z}{z_0}} \delta_q f \qquad \delta_q = \frac{\sigma_q - Id}{q - 1}$$

Les systèmes fondamentaux canoniques *renormalisés* de solutions en 0 et en ∞ sont

$$\begin{cases} 1 \\ (q-1) z_0 l_q^+(z/z_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \\ (q-1)(l_q(w) - l_q^+(w/qw_0)) \end{cases}$$

La matrice de connexion est donc

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & (q-1)z_0(1 - l_q(z) + l_q(z/z_0)) \\ 0 & -z_0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer sa limite lorsque $\epsilon \to 0^+$, on invoque les estimations suivantes, aisément obtenues de façon analogue à celles de 3.1 :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \Theta_q^+(z_2)/\Theta_q^+(z_1) = (1 - z)^{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (q-1) l_q^+(z) = \log(1 - z_0)$$

On trouve alors

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & z_0(\log(-z/z_0) - \log(-z)) \\ 0 & -z_0 \end{pmatrix}$$

Celle-ci est localement constante sur la sphère de Riemann privée de la coupure triangulaire $[0;\infty] \cup [0; z_0] \cup [z_0; \infty]$. Ses deux déterminations $\tilde{P}_0$ et $\tilde{P}_1$ satisfont

$$(\tilde{P}_1)^{-1} \tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & z_0(a_0 - a_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_0 sont les valeurs de la fonction $(\log(-z/z_0) - \log(-z))$, qui est localement constante $(\log(-z/z_0) - \log(-z))$ sur les ouverts correspondants : donc $a_0 - a_1 = 2\imath\pi$ et l'on obtient la matrice de la monodromie autour de z_0 :

$$(\tilde{P}_1)^{-1} \tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2\imath\pi z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.4 Un exemple incomplet non fuchsien

Voici maintenant un exemple *incomplet* de déformation d'une équation différentielle *non fuchsienne*, ceci, à titre expérimental : on constate qu'elle peut être déformée en une famille d'équations aux q-différences *fuchsiennes*, et même que la théorie qui précède fonctionne encore dans ce cas. Cet exemple a été découvert en collaboration avec Zhang Changgui.

On part de l'équation scalaire :

$$\delta \tilde{f} = \tilde{b} \tilde{f}$$

avec $\tilde{b}(z) = e^{\frac{1}{z+1}}$: la “matrice” de cette équation a donc une singularité essentielle en -1, c'est donc une équation *très, très* irrégulière[2].

On la déforme en prenant $b_\epsilon(z) = \sum\limits_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} (\frac{1}{z+1})^k$, avec $\epsilon = \frac{1}{N}$: ce n'est donc pas une famille continue, mais il est clair que ce n'est pas le point essentiel. En tout cas, on a bien la convergence de b_ϵ vers $\tilde{b}$ soumise à toutes les contraintes du chapitre 4.

Pour voir comment la théorie fonctionne ici, on devra procéder de façon indirecte : on ne connait pas les zéros de a_ϵ, on ne saura donc pas écrire les solutions en termes de fonctions Θ, ni non plus la matrice de connexion. Mais on a tout de même affaire à des fonctions méromorphes, auxquelles nos calculs généraux s'appliquent très bien ! Pour se simplifier la vie, on utilisera des caractères $e_{q,c}$ qui confluent en z^γ.

Les exposants sont :
- En 0, $c_\epsilon = a_\epsilon(0) = 1 + (q-1)b_\epsilon(0)$, donc de la forme $1 + (q-1)e + o(q-1)$. Le caractère correspondant va tendre vers z^e : cela correspond bien à l'exposant de l'équation différentielle en 0.
- En ∞, $a_\epsilon(\infty) = 1 + (q-1)b_\epsilon(\infty) = q$ et la solution correspondante sera de la forme $z \times$ (fonction valant 1 en ∞). Le caractère correspondant tendra vers z : pas de monodromie de ce côté. Cela correspond bien à l'exposant de l'équation différentielle en ∞.

Solutions de l'équation aux q-différences

1. Solution locale en 0 :

   On écrit

$$f_\epsilon^{(0)} = e_{q,c_\epsilon} g_\epsilon^{(0)}$$

[2] Il eût suffi d'un pôle double pour la rendre irrégulière, alors une singularité essentielle, pensez donc !

avec $\sigma_q g_\epsilon^{(0)} = \frac{a_\epsilon}{c_\epsilon} g_\epsilon^{(0)}$. Donc

$$g_\epsilon^{(0)}(z) = \prod_{r \geq 1} \frac{a_\epsilon(q^{-r}z)}{c_\epsilon}$$

2. Solution locale en ∞ :

   Les calculs étant relativement simples, on les fait en z. On écrit

$$f_\epsilon^{(\infty)} = z g_\epsilon^{(\infty)}$$

   avec $\sigma_q g_\epsilon^{(\infty)} = \frac{a_\epsilon}{q} g_\epsilon^{(\infty)}$. Donc

$$g_\epsilon^{(\infty)}(z) = \prod_{r \geq 0} \frac{q}{a_\epsilon(q^r z)}$$

3. Connexion des solutions locales :

   On obtient, par division :

$$p_\epsilon(z) = \frac{e_{q,c_\epsilon}}{z} \prod_{r \geq 1} \frac{a_\epsilon(q^{-r}z)}{c_\epsilon} \prod_{r \geq 0} \frac{a_\epsilon(q^r z)}{q}$$

   C'est la partie formée des deux produits que l'on pourrait exprimer à l'aide des fonctions Θ si l'on connaissait les zéros de a_ϵ. Mais le nombre de facteurs Θ serait bien sur variable !

Solutions de l'équation différentielle

1. Solution locale en 0 :

   On écrit

$$\tilde{f}^{(0)} = z^e \tilde{g}^{(0)}$$

   avec $\delta \tilde{g}^{(0)} = (\tilde{b} - e)\tilde{g}^{(0)}$. Donc

$$\tilde{g}^{(0)}(z) = e^{\int_0^z \frac{\tilde{b}(t)-e}{t}\, dt}$$

2. Solution locale en ∞ :

   On écrit

$$\tilde{f}^{(\infty)} = z \tilde{g}^{(\infty)}$$

avec $\delta\tilde{g}^{(\infty)} = (\tilde{b} - 1)\tilde{g}^{(\infty)}$. Donc

$$\tilde{g}^{(\infty)}(z) = e^{\int_0^{1/z} \frac{1-\tilde{b}(1/t)}{t}\, dt}$$

3. Connexion des solutions locales :

   On obtient, par division :

$$\tilde{p}(z) = \frac{z^e}{z} e^{\int_0^z \frac{\tilde{b}(t)-e}{t}\, dt - \int_0^{1/z} \frac{1-\tilde{b}(1/t)}{t}\, dt}$$

Monodromie de l'équation différentielle

Les seules singularités sont 0, -1 et ∞. La monodromie en 0 est (la multiplication par) $e^{2\imath\pi e}$ et il n'y en a pas en ∞ (singularités régulières d'exposants e et 1). Donc la monodromie en -1 est $e^{-2\imath\pi e}$: on connait ici le groupe fondamental !

Confluence

Le facteur "log-car" $\frac{e_{q,c_\epsilon}}{z}$ de la matrice de connexion p_ϵ tend vers le facteur $\frac{z^e}{z}$ de $\tilde{p}$. Le facteur interne $\prod\limits_{r\geq 1} \frac{a_\epsilon(q^{-r}z)}{c_\epsilon} \prod\limits_{r\geq 0} \frac{a_\epsilon(q^r z)}{q}$ tend vers $e^{\int_0^z \frac{\tilde{b}(t)-e}{t}\, dt - \int_0^{1/z} \frac{1-\tilde{b}(1/t)}{t}\, dt}$ par la théorie sur les équations avec conditions initiales fixes (3.2) qui s'applique sans problème ici. Il y a peut-être une preuve directe via la théorie des intégrales multiplicatives.

La limite de la matrice de connexion est donc la fonction localement constante $\tilde{p}$ sur $\mathbf{S} - \overline{R}$, avec une valeur sur $\mathcal{H}$ et une valeur sur $-\mathcal{H}$, reliées par le prix de franchissement de coupure : $e^{-2\imath\pi e}$.

Bibliographie

[1] **Adams C.R, 1929.** On the Linear Ordinary q-Difference Equations, *Ann. Math.*, Série 2, Vol. 30, no 2, pp 195-205.

[2] **André Y., 1999.** Différentielles non-commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences, *en préparation.*

[3] **Andrews G.E., 1976.** *The Theory of Partitions Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 2, Addison Wesley.

[4] **Arnold D.V., 1980.** *Ordinary Differential Equations*, in *Dynamical Systems*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. 1, Springer Verlag.

[5] **Birkhoff G.D., 1913.** The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc. Amer. Acad.*, 49, pp. 521-568.

[6] **Carmichael R.D., 1912.** The General Theory of Linear q-difference Equations, *Am. Jour. Math.*, 34, pp. 147-168.

[7] **Cartan H., Eilenberg S., 1956** *Homological Algebra*, Princeton.

[8] **Cartier P., 1989** Jacobiennes gnralises, monodromie unipotente et intgrales itres, *Séminaire Bourbaki 87-88*, Exp. No. 687, Astérisque 161-162, pp. 31-52, Société Mathématique de France.

[9] **Cartier P., 1992** Dmonstration "automatique" d'identits et fonctions hypergomtriques (d'aprs D. Zeilberger), *Séminaire Bourbaki 91-92*, Exp. No. 746, Astérisque 206, pp. 41-91, Société Mathématique de France.

[10] **Chevalley C., 1963** *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Mathematical Surveys, No. VI. American Mathematical Society, Providence, R.I.

[11] **Chyzak F., 1998.** Fonctions holonomes en calcul formel, *Thèse de l'Ecole Polytechnique*, INRIA.

[12] **Etingof P.I., 1995.** Galois Groups and Connection Matrices of q-difference Equations, *Electronic Research Announcements of the A.M.S.*, Vol. 1, Issue 1.

[13] **Fruchard A., 1993.** Les fonctions périodiques de période infiniment petite, *Prépublication de l'I.R.M.A.*, 1993/040, Strasbourg.

[14] **Gasper G. and Rahman M., 1990.** *Basic hypergeometric series*, *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 35, Cambridge University Press.

[15] **Godement R., 1998** *Analyse mathématique*, vol II, Springer Verlag.

[16] **Ince E.L., 1956.** *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications.

[17] **Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S. and Yoshida M., 1991.** *From Gauss to Painlevé*, Braunschweig, Vieweg.

[18] **Lang S., 1987.** *Elliptic Functions*, Springer Verlag.

[19] **Mumford D.,1983.** *Tata Lectures on Theta*, Vol I, Birkhäuser.

[20] **Pourcin G. (ed.), 1994.** Rapport du jury de l'agrégation de mathématiques, Ministère de l'Education Nationale, Centre National de Documentation Pédagogique.

[21] **van der Put M. and Singer M.F., 1997.** *Galois theory of difference equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1666, Springer Verlag.

[22] **Ramanujan S., 1927.** *Collected Works*, Chelsea.

[23] **Ramis J.P., 1992.** About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, *Annales de Fac. des Sciences de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, pp. 53-94.

[24] **Ramis J.P., 1990.** Fonctions θ et équations aux q-différences, non publié, Strasbourg.

[25] **Sauloy J., 1999.** Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *en préparation.*

[26] **Schlesinger L., 1895.** *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Teubner.

[27] **Tarasov V. and Varchenko A., 1997** *Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups*, Astrisque No. 246, Société Mathématique de France.

[28] **Wasow W., 1965** *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover Publications.

[29] **Whittaker E.T. and Watson G.N., 1927.** *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press.

[30] **Zhang C., 1998.** Sur la sommabilit des sries entires solutions formelles d'une quation aux q-diffrences, C. R.Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 327 (1998), no. 4, pp. 349-352.

[31] **Zuily Cl., Queffelec H., 1995** *Elements d'analyse pour l'agrégation*, Masson.

Table des matières